Збірник праць Інституту математики НАН України 2013, т. 10, № 3, 71–87

УДК 534.1:629.764.7

Тензорне формулювання нелінійної крайової задачі про коливання ідеальної рідини в нахилених циліндричних резервуарах

І.О. Луковський

Інститут математики НАН України, Київ; lukovsky@imath.kiev.ua

В работе сформулирован общий принцип рационального выбора неортогональной системы криволинейных координат и предложены формулы преобразования трехмерных несимметричных областей в области более простой геометрической конфигурации. На этой основе в римановом пространстве предложены новые формулировки основных краевых задач нелинейной динамики ограниченного объема жидкости в тензорном виде и предложены пути их дальнейшего исследования. Конкретная реализация демонстрируется на примере области в виде усеченного кругового цилиндра.

The present paper formulates a main principle for a rational choose of a non-orthogonal system of curvilinear coordinates and proposes formulas for transformation of three-dimensional nonsymmetric domains to domains of simpler geometric shape. Based on that, new formulations of main boundary problems on the nonlinear sloshing dynamics are proposed in a tensor form. Perspective solution methods of these problems are discussed. The theoretical results are illustrated for the case of a truncated circular cylindrical tank.

Теорії коливань рідини в резервуарах складної геометричної форми присвячено багато наукових праць, серед них і роботи монографічного характеру. Обширна бібліографія з цього приводу наведена в монографіях [1–7] та інших, в яких поряд з фундаментальними проблемами цієї теорії дискутуються також питання розробки та реалізації різноманітних математичних методів, пов'язаних з практичними її застосуваннями. В цьому відношенні найбільший практичний інтерес викликає проблема силової взаємодії рідини зі стінками резервуара, особливо у випадку немалих збурень вільної поверхні рідини. Це надзвичайно важливо в плані створення нелінійних математичних моделей просторового руху обмежених об'ємів рідини з вільною поверхнею.

В цій роботі ми зосередимося на формулюванні крайових задач нелінійної теорії руху обмеженого об'єму рідини, що частково заповнює нахилений резервуар в формі прямого кругового циліндра. Характерним для цього практично важливого випадку є те, що об'єм, зайнятий рідиною, являє собою істотно несиметричну конфігурацію. Традиційні постановки гідродинамічних задач в декартовій системі координат [6, 8–12] приводять навіть в лінійній постановці до складних крайових задач математичної фізики, які не допускають навіть часткового розділення змінних. Ще більші труднощі математичного характеру виникають на шляху розробки методів розв'язування задач динаміки твердих тіл з рідиною в нелінійній постановці. Частково уникнути цих труднощів можна, як буде показано далі, за рахунок введення в розгляд ефективної криволінійної системи координат і послідовного застосування апарату тензорного аналізу.

1 Постановка задачі

В цьому пункті розглянемо постановку задачі про вільні коливання рідини в нерухомому резервуарі циліндричної форми, вісь якого нахилена до вектора прискорення $\vec{g}$ сил земного тяжіння під кутом α. Введемо до розгляду дві системи декартових координат $Ox^{'}y^{'}z^{'}$ і $Oxyz$ з початком на незбуреній вільній поверхні Σ_0 (рис. 1).

Вісь $Ox^{'}$ спрямуємо в бік, протилежний напрямку вектора $\vec{g}$. Статична вільна поверхня Σ_0 збігається при цьому з площиною $Oy^{'}z^{'}$. Зв'язану з циліндром систему координат $Oxyz$ виберемо так, щоб вісь Ox збігалася з віссю симетрії циліндра (рис. 1). Направляючі косинуси осей вибраних систем координат наведені в табл. 1.

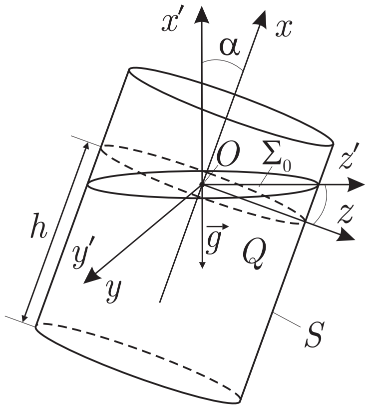

Рис. 1.

Табл. 1.

	x	y	z
$x^{'}$	$\cos\alpha$	0	$-\sin\alpha$
$y^{'}$	0	1	0
$z^{'}$	$\sin\alpha$	0	$\cos\alpha$

Формули переходу від однієї системи координат до іншої мають наступний вигляд:

$$x^{'} = x\cos\alpha - z\sin\alpha,\ \ y^{'} = y,\ \ z^{'} = x\sin\alpha + z\cos\alpha; \tag{1}$$

$$x = x^{'}\cos\alpha + z\sin\alpha,\ \ y = y^{'},\ \ z = -x^{'}\sin\alpha + z^{'}\cos\alpha. \tag{2}$$

Отже, нова система координат $Oxyz$ одержується шляхом повороту системи $Ox^{'}y^{'}z^{'}$ навколо вісі $Oy^{'}$ на кут α до суміщення вісі $Ox^{'}$ з віссю циліндра.

Традиційна постановка задачі про вільні коливання ідеальної нестисливої рідини в гравітаційному полі полягає у відшуканні потенціала швидкостей $\Phi(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t)$ і форми збуреної вільної поверхні $\Sigma(t)$ із наступної нелінійної крайової задачі [13]:

$$\triangle\Phi = 0,\quad \vec{r} \in Q(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{(\nabla\zeta)^2}}, \;\; \vec{r} \in \Sigma(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0, \;\; \vec{r} \in S(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + gx^{'} = 0, \;\; \vec{r} \in \Sigma(t), \tag{6}$$

де $\zeta(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t) = 0$ — рівняння збуреної вільної поверхні рідини $\Sigma(t)$; $\vec{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні області $Q(t)$, зайнятої рідиною. Крім цього, функція $\Phi(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t)$ має бути підпорядкована також початковим умовам, які полягають у виборі вільної поверхні і розподілі швидкостей на ній в початковий момент часу $t_0 = 0$.

В лінійних постановках задач зазвичай кінематична (4) і динамічна (6) умови об'єднують в одну умову вигляду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial x^{'}} = 0, \;\;\; \vec{r} \in \Sigma_0, \tag{7}$$

вважаючи за можливе представити вільну поверхню у вигляді

$$x^{'} = f(y^{'}, z^{'}, t). \tag{8}$$

Тоді в лінійному наближенні крайова задача (3)–(6) може бути представлена у вигляді

$$\triangle\Phi = 0, \;\;\; \vec{r} \in Q_0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^{'}} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \;\; \vec{r} \in \Sigma_0; \;\; \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0, \;\; \vec{r} \in S_0, \tag{9}$$

де значком о) позначено об'єм та його границі в незбуреному стані.

Особливе місце серед задач про коливання обмеженого об'єму рідини займає задача про вільні гармонічні коливання, які описуються, наприклад, у вигляді

$$\Phi(x^{'}, y^{'}, z^{'}, t) = \cos(\sigma t + \varepsilon)\varphi(x^{'}, y^{'}, z^{'}), \tag{10}$$

де σ — частота вільних коливань, а ε — фаза.

Для функції $\varphi(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ із (9) одержуємо наступну задачу на власні значення з параметром в граничних умовах

$$\triangle\varphi = 0, \;\; \vec{r} \in Q_0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varkappa\varphi, \ \ \vec{r}\in\Sigma_0; \ \ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0, \ \ \vec{r}\in S_0, \tag{11}$$

де $\varkappa = \dfrac{\sigma^2}{g}$ — власне значення крайової задачі (11), яке в задачах динаміки обмеженого об'єму рідини іменується частотним параметром.

У зв'язаній системі координат $Oxyz$ рівняння незбуреної вільної поверхні Σ_0 на основі формул перетворення (1), (2) приймає вигляд

$$x = k_0 z, \quad k_0 = \operatorname{tg}\alpha_0, \tag{12}$$

а крайова задача (11) записується наступним чином:

$$\begin{gathered} \triangle\varphi(x,y,z) = 0, \quad \vec{r}\in Q_0, \\ \frac{1}{\sqrt{1+k_0^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - k_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \lambda\varphi, \quad \vec{r}\in\Sigma_0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0, \quad \vec{r}\in S_0. \end{gathered} \tag{13}$$

Зазначимо також, що область Q_0 в цій системі координат, як і у вихідній, має неосесиметричну конфігурацію, обмежену циліндричною поверхнею $y^2+z^2=r_0^2$, площиною $x=-h$ і вільною поверхнею Σ_0 еліптичної форми

$$\frac{x^2}{k_0^2 r_0^2} + \frac{y^2}{r_0^2} = 1. \tag{14}$$

Для розв'язування спектральної задачі (13) розроблено декілька варіантів варіаційного методу [8, 9, 11] та запропоновано при їх реалізації відповідні координатні функції. Ефективність реалізації цих методів обговорюється в монографії [6].

З метою розробки альтернативних наближених методів розв'язування спектральних задач типу (13), а також створення модальних методів дослідження нелінійних крайових задач теорії коливань обмеженого об'єму рідини несиметричної конфігурації, видається природною спроба перетворення вихідної області в область більш простої геометричної форми.

Ця ідея успішно використовувалася раніше для класу осесиметричних резервуарів нециліндричної форми при створенні модальних методів для дослідження нелінійних коливань ідеальної рідини в конічних, параболічних, сфероїдальних та еліпсоїдальних баках [4, 5, 13] та інших.

2 Неконформні перетворення несиметричних областей. Система криволінійних координат

Відмовимося від декартової параметризації тривимірного простору і введемо до розгляду перетворення

$$x = k(z + z_0) - h, \;\; y = \xi \cos \eta, \;\; z = \xi \sin \eta, \tag{15}$$

де ξ, η — полярні координати на площині Oyz, h — глибина рідини при $\alpha = 0\,(k_0 = 0)$, $z_0 = h/k_0$. Якщо параметр k вважати змінним $(0 \le k \le k_0)$, то перше співвідношення із (7) при значенні $k = 0$ дає в системі координат $Oxyz$ рівняння дна циліндра $x = -h$, а при значенні $k = k_0 = \operatorname{tg} \alpha$ — рівняння незбуреної вільної поверхні (4).

Виберемо тепер в якості криволінійних координат параметри $x_1 = k$, $x_2 = \xi$ і $x_3 = \eta$, а розглядуваний об'єм рідини Q віднесемо до простору, зв'язаному із системою координат $Ox_1x_2x_3$.

Перетворення (15) прийме тоді вигляд

$$x = x_1(x_2 \sin x_3 + z_0) - h, \;\; y = x_2 \cos x_3, \;\; z = x_2 \sin x_3, \tag{16}$$

причому $0 \le x_1 \le k_0, \;\; 0 \le x_2 \le r_0, \;\; 0 \le x_3 \le 2\pi$.

Обернене по відношенню до (16) перетворення визначається формулами

$$x_1 = \frac{x + h}{z + z_0}, \;\; x_2 = \sqrt{y^2 + z^2}, \;\; x_3 = \operatorname{arctg} \frac{z}{y}, \tag{17}$$

які можна порівняти з одержаними нами аналогічними формулами при дослідженні нелінійних проблем динаміки обмеженого об'єму рідини у випадку осесиметричних резервуарів нециліндричної конфігурації [4, 5, 13].

У відповідності з загальною ідеєю введення криволінійних координат, формулами (16) і (17) по суті вводиться до розгляду два простори, перший із яких віднесено до системи прямокутних координат xyz, а другий — до системи координат $x_1x_2x_3$. Реальному обмеженому об'єму рідини в цих просторах відповідають замкнуті області τ і τ^*, обмежені відповідно кусково-гладкими поверхнями S і S^*.

Згідно формул перетворення (16), (17) кожній внутрішній точці (x_{10}, x_{20}, x_{30}) області τ^* відповідає внутрішня точка (x_0, y_0, z_0) області τ і, навпаки, внутрішній точці області τ відповідає завжди внутрішня точка області τ^*. При цьому точкам поверхні S^* відповідають саме

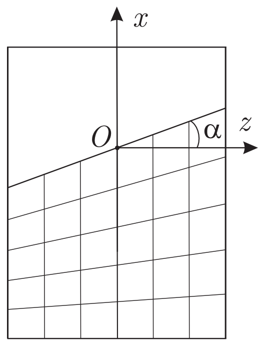

Рис. 2.

точки поверхні S, і навпаки. Це, як відомо, випливає із того факту, що якобіан перетворення $\dfrac{D(x,y,z)}{D(x_1,x_2,x_3)}$ в області τ^* відмінний від нуля.

Задання фіксованих змінних x_1, x_2, x_3 із області τ^* однозначно визначає деяку точку області τ. Як зазначалося вище це дає підставу і числа x_1, x_2, x_3 називати координатами (криволінійними) точок області τ. Сім'я кривих, які залежать від одного параметра $k = \operatorname{tg}\alpha$ і суцільно заповнюють площину Oxz, показано на рис. 2. Точки простору xyz, для яких одна із криволінійних координат є постійною, утворюють відповідну координатну поверхню.

Якщо в області τ^* взяти деяку кусково-гладку поверхню, задану рівняннями

$$x_1 = x_1(u,v); \quad x_2 = x_2(u,v); \quad x_3 = x_3(u,v), \tag{18}$$

то за допомогою формул (16) її можна перетворити саме в кусково-гладку поверхню в області τ. При цьому змінні u, v приймають свої значення в деякій області E на площині uv.

Для досягнення сформульованої вище мети простір, точки якого визначаються криволінійними координатами x_1, x_2, x_3 і до якого віднесено область τ^*, доцільно тепер перетворити в рімановий простір R_3, метрика якого задається фундаментальною квадратичною формою

$$dS^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_j, \tag{19}$$

де $g_{ik}(x_1,x_2,x_3)$ — компоненти коваріантного тензора другого рангу, який задовольняє відповідним умовам неперервності, симетричності та інваріантності відносно допустимих перетворень координат. Метричні характеристики простору $x_1x_2x_3$ повністю визначаються метричним тензором g_{ik}. Особливу роль він відіграє у формуванні операцій тензорного аналізу, який використовується далі при створенні математичних моделей гідродинамічних полів.

Почнемо з визначення якобіана перетворення компонент $g_{ik}(x_1,x_2,x_3)$ метричного тензора, виходячи з формул (16). Для якобіана перетворення одержимо

$$\frac{D(x,y,z)}{D(x_1,x_2,x_3)} = \begin{vmatrix} x_2\sin x_3 + z_0 & x_1\sin x_3 & x_1x_2\cos x_3 \\ 0 & \cos x_3 & -x_2\sin x_3 \\ 0 & \sin x_3 & x_2\cos x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= x_2(x_2\sin x_3 + z_0). \tag{20}$$

Компоненти $g_{ik}(x_1,x_2,x_3)$ метричного тензора визначаються за формулами

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 = (x_2\sin x_3 + z_0)^2, \\
g_{12} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} = (x_2\sin x_3 + z_0)x_1\sin x_3, \\
g_{13} &= \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_3} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_3} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_3} = (x_2\sin x_3 + z_0)x_1x_2\cos x_3, \\
g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 = x_1^2\sin x_3^2 + 1, \\
g_{23} &= \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial x}{\partial x_3} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial x_3} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1^2x_2\sin x_3\cos x_3, \\
g_{33} &= \left(\frac{\partial x}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2 = x_2^2(x_1^2\cos^2 x_3 + 1).
\end{aligned} \tag{21}$$

Вирази для g_{ik} (21) свідчать, що вибрана система криволінійних координат $x_1x_2x_3$ не є ортогональною, поскільки $g_{ik} \neq 0$ при $i \neq k$.

У відповідності з (21)

$$q = det[g_{ik}(x_1,x_2,x_3)] = x_2^2(x_2\sin x_3 + z_0)^2, \tag{22}$$

що, і як повинно бути, повністю узгоджується з результатом (20).

Другим фундаментальним тензором ріманового простору є абсолютний тензор другого рангу, компоненти $g^{ik}(x_1, x_2, x_3)$ якого визначаются співвідношеннями

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \quad \text{або} \quad g^{ik} = \frac{G^{ik}}{q}, \tag{23}$$

де $G^{ik} = G^{ki}$ є алгебраїчне доповнення g_{ik} у визначнику $det|g_{ik}|$. Цей тензор називають асоційованим або взаємним метричним тензором.

В нашому випадку його компоненти визначаються наступним чином:

$$\begin{gathered} g^{11} = \frac{x_1^2 + 1}{(x_2 \sin x_3 + z_0)^2}, \;\; g^{12} = -\frac{x_1 \sin x_3}{x_2 \sin x_3 + z_0}, \\ g^{13} = -\frac{x_1 \cos x_3}{x_2 (x_2 \sin x_3 + z_0)}, \;\; g^{22} = 1, \;\; g^{23} = 0, \;\; g^{33} = \frac{1}{x_2^2}. \end{gathered} \tag{24}$$

На підставі (24) знаходимо величину

$$det[g^{ik}] = \frac{1}{x_2^2 (x_2 \sin x_3 + z_0)^2} = \frac{1}{q}, \tag{25}$$

що повністю узгоджується з результатом (22), так як

$$det[g_{ik}] \cdot det[g^{ik}] = 1. \tag{26}$$

На основі формул (21), (22) та (24) легко встановити вирази для елемента об'єму $d\tau$ та елементів поверхонь $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, які відповідають незбуреній вільній поверхні рідини, боковій поверхні та дну циліндра:

$$d\tau = \sqrt{q}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = x_2 (x_2 \sin x_3 + z_0)\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \tag{27}$$

$$\begin{gathered} d\sigma_1|_{x_1 = k_0} = \sqrt{q g^{11}} x_2 \sqrt{k_0^2 + 1}\, dx_2\, dx_3, \\ d\sigma_2|_{x_2 = r_0} = \sqrt{q g^{22}} r_0 (r_0 \sin x_3 + z_0)\, dx_1\, dx_3, \\ d\sigma_3|_{x_1 = 0} = \sqrt{q g^{33}} x_2\, dx_2\, dx_3. \end{gathered} \tag{28}$$

Формули (27), (28) є корисними при формулюванні інтегральних теорем типу Гауса–Островського на мові тензорного числення, а також при застосуванні варіаційних методів до розв'язування крайових задач гідромеханіки. Наведемо результати прямих обчислень об'єму, зайнятого рідиною, та його поверхонь Σ_0, $S_{\text{б}}$ і $S_{\text{Д}}$:

$$V = \int\limits_0^{k_0}\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} x_2(x_2 \sin x_3 + z_0)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \pi\, r_0^2\, k_0\, z_0 = \pi\, r_0^2\, h,$$

$$S_{\Sigma_0} = \sqrt{k_0^2+1}\int\limits_0^{r_0} x_2\, dx_2 \int\limits_0^{2\pi} dx_3 = \pi r_0^2 \sqrt{k_0^2+1} = \pi r_0\, b, \;\; b = \frac{r_0}{\cos\alpha},$$

$$S_{\text{б}} = \int\limits_0^{k_0} dx_1 \int\limits_0^{2\pi} r_0^2 \sin x_3\, dx_3 + \int\limits_0^{k_0}\int\limits_0^{2\pi} r_o\, z_0\, dx_1\, dx_3 = 2\pi\, r_0\, h, \tag{29}$$

$$S_{\text{Д}} = \int\limits_0^{r_0} x_2\, dx_2 \int\limits_0^{2\pi} dx_3 = \pi\, r_0^2.$$

Це є прямим підтвердженням коректного введення криволінійних координат та вірного визначення фундаментальних тензорів введеного ріманового простору.

3 Формулювання основних крайових задач теорії нелінійних коливань обмеженого об'єму рідини в тензорній формі

До основних математичних об'єктів нелінійної динаміки обмеженого об'єму рідини ми відносимо спектральну задачу з параметром в граничних умовах типу (9) або (12) та нелінійну крайову задачу (3)–(6), що описує вільні коливання ідеальної рідини в гравітаційному полі.

Розпочнемо з розгляду крайової задачі (3)–(6), пам'ятаючи про те, що в ній визначенню підлягають одночасно потенціал швидкостей $\Phi(\vec{r}, t)$ і форма вільної поверхні $\zeta(\vec{r}, t)$, причому область визначення гармонічної функції $\Phi(\vec{r}, t)$ по (3) теж наперед невідома. Залишаючись в рамках ріманового простору R_3 рівняння збуреної вільної поверхні Σ представимо в криволінійних координатах у вигляді

$$\zeta(x_1, x_2, x_3, t) = 0. \tag{30}$$

Припустимо, далі, що рівняння збуреної поверхні в криволінійних координатах може бути представлена у вигляді

$$x_1 = \mathrm{const} + f(x_2, x_3, t). \tag{31}$$

Оскільки рімановий простір x_1, x_2, x_3 і об'єм рідини Q^*, до якого він віднесений, задається квадратичного формою (19), нелінійна крайова задача (3)–(6) може бути тепер записана в інваріантній формі з врахуванням формул перетворення (16), (17) та формул для компонент фундаментальних тензорів (21) та (24).

Серед диференціальних інваріантів, визначених в рімановихпросторах, для нас в першу чергу представляє інтерес градієнт скаляра $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$

$$\nabla\Phi = \vec{e}_i\, g^{ji}\, \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \tag{32}$$

і оператор Лапласа

$$\nabla^2 \equiv \nabla\cdot\nabla = g^{ik}\,\nabla_i\,\nabla_k. \tag{33}$$

Зокрема, лапласіан потенціала поля швидкостей Φ має наступний вигляд:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{q}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ik}\sqrt{q}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{q}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{q}\,g^{11}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\right.\right.$$

$$\left. + \sqrt{q}\,g^{12}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \sqrt{q}\,g^{13}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{q}\,g^{21}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \sqrt{q}\,g^{22}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{q}\,g^{23}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{q}\,g^{31}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \sqrt{q}\,g^{32}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \sqrt{q}\,g^{33}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\right]. \tag{34}$$

Підставивши в (34) значення q і g^{ij} за формулами (22), (24), одержимо

$$\nabla^2\Phi = g^{11}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + g^{33}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} + 2g^{12}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2}+$$

$$+2g^{13}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_3} + 2c\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + e\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = 0, \tag{35}$$

де

$$g^{11} = \frac{x_1^2+1}{(x_2\sin x_3 + z_0)^2},\ \ g^{33} = \frac{1}{x_2^2},$$

$$g^{12} = -\frac{x_1 \sin x_3}{x_2 \sin x_3 + z_0}, \quad g^{13} = -\frac{x_1 \cos x_3}{x_2(x_2 \sin x_3 + z_0)}, \tag{36}$$

$$c(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{(x_2 \sin x_3 + z_0)^2}, \quad e(x_2) = \frac{1}{x_2}.$$

Кінематична умова на збуреній вільній поверхні рідини, заданій неявно рівнянням (30), записується в тензорному вигляді наступним чином:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = -\frac{\zeta_t}{\sqrt{g^{ij}\dfrac{\partial \zeta}{\partial x_i}\dfrac{\partial \zeta}{\partial x_j}}} = -\frac{\zeta_t}{N}, \tag{37}$$

де N з врахуванням формул (31) та (24) набуває вигляду

$$N = \left(g^{11} - 2g^{12}\frac{\partial f}{\partial x_2} - 2g^{13}\frac{\partial f}{\partial x_3} + g^{22}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + g^{33}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2\right)^{\dfrac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{x_2\gamma}\left(x_2^2(1+f^2) + 2\gamma f\frac{\partial f}{\partial x_2}x_2^2 \sin x_3 + 2\gamma f\frac{\partial f}{\partial x_3}x_2 \cos x_3 + \right.$$

$$\left. + \gamma^2\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)^2\right)^{\dfrac{1}{2}}, \tag{38}$$

де $\gamma = x_2 \sin x_3 + z_0$.

Оскільки орти нормалей до координатних поверхностей $x_i = \mathrm{const}$ збігаються з векторами $\operatorname{grad} x_i$, то значення нормальних похідних на цих поверхнях в тензорному аналізі визначається за формулою для скалярного добутку двох векторів з коваріантними компонентами.

Умова неперетікання на боковій стінці циліндра ($x_2 = r_0$) має вигляд

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + g^{12}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \ \text{ при } \ x_2 = r_0, \tag{39}$$

а на дні циліндра ($x_1 = 0$)

$$\left(g^{12}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)_{x_1=0} = 0. \tag{40}$$

Збурена поверхня рідини в просторі криволінійних координат x_1, x_2, x_3 переходить в деяку поверхню Σ^*, яку в неявному вигляді представимо рівнянням

$$\zeta(x_1, x_2, x_3, t) = 0. \tag{41}$$

В перетвореній області Q^* збурена вільна поверхня проектується на деяку плоску область, яка не міняється з часом і збігається з незбуреною вільною поверхнею Σ_0^*. Представивши (41) у вигляді, розв'язному відносно просторової координати x_1,

$$x_1 = \mathrm{const} + f(x_2, x_3, t), \tag{42}$$

подамо збурену вільну поверхню в параметричній формі, вибравши в (18) в якості параметрів $u = x_2$, $v = x_3$.

Елемент площі криволінійної поверхні тоді представляється в вигляді

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \tag{43}$$

де гаусові коефіцієнти з врахуванням формул перетворення (16) визначаються як

$$E = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2, \quad F = x_u v_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \tag{44}$$

Використавши матрицю похідних

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 \sin x_3 + z_0) + f \sin x_3 & \cos x_3 & \sin x_3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x_2 \sin x_3 + z_0) + f x_2 \cos x_3 & -x_2 \sin x_3 & x_2 \cos x_3 \end{pmatrix} \tag{45}$$

за формулами (44) знаходимо спочатку E, G і F, а потім елемент площі

$$dS = \left(x_2(1 + f^2) + 2\, x_2^2 \gamma f \frac{\partial f}{\partial x_2} \sin x_3 + 2\, x_2 \gamma f \frac{\partial f}{\partial x_3} \cos x_3 + \right.$$
$$\left. + \, x_2^2 \gamma^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right)^{1/2} dx_2\, dx_3. \tag{46}$$

Співставляючи (38) з (46), бачимо, що

$$dS = \sqrt{(\nabla \zeta)^2}\, x_2\, (x_2 \sin x_3 + z_0)\, dx_2\, dx_3. \tag{47}$$

Тепер ми маємо можливість записати умову розв'язності нелінійної крайової задачі по визначенню потенціалу швидкостей $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ та вільної поверхні обмеженого об'єму рідини $\zeta(x_1, x_2, x_3, t)$. Вона має наступний вигляд:

$$\int\limits_{\Sigma^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\, dS = \int\limits_{\Sigma_0^*} f_t\, x_2\, (x_2 \sin\, x_3 + z_0)\, dx_2\, dx_3 = 0. \tag{48}$$

На підставі викладеного вище, нелінійна крайова задача, що описує гравітаційні хвилі в обмеженому об'ємі рідини з вільною поверхнею, остаточно може бути подана в криволінійних координатах в такому вигляді:

$$\nabla^2 \Phi = g^{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + g^{33} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + 2\, g^{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1\, \partial x_2} + 2\, g^{13} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1\, \partial x_3} +$$

$$+ 2\, c \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + e \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \;\; \text{в} \;\; Q^*, \tag{49}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right|_{\Sigma^*} = \left(g^{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + g^{21} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + g^{31} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) = \left.\frac{f_t}{N}\right|_{\Sigma^*}, \tag{50}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right|_{x_2 = r_0} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + g^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{x_0 = r_0} = 0, \tag{51}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\right|_{x_1 = 0} = \left(g^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)_{x_1 = 0} = 0. \tag{52}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g[(x_1 (x_2 \sin\, x_3 + z_0) - h)\, \cos \alpha - x_2 \sin x_3\, \sin \alpha] = 0 \;\; \text{на} \;\; \Sigma^*. \tag{53}$$

В динамічній умові на вільній поверхні Σ^* через g позначено прискорення сил земного тяжіння.

Система рівнянь (49)–(53) разом з умовою збереження об'єму у вигляді (48) являє собою повну сукупність рівнянь для визначення потенціалу швидкостей $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ та форми вільної поверхні $\zeta(x_1, x_2, x_3, t)$.

Переходячи до формулювання спектральної задачі динаміки обмеженого об'єму рідини в криволінійній системі координат, зазначимо, що і в розглядуваному випадку модель типу (11) формується із нелінійної системи (49)–(53) за допомогою співвідношення (10).

Для незбуреної області Q_0^* в просторі параметрів $x_1x_2x_3$ для функції $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ одержимо відповідну спектральну задачу в наступному вигляді:

$$\nabla^2\varphi = 0 \text{ в } Q_0^*,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \varkappa\,\varphi \text{ на } \Sigma_0^*, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ на } S_0^*. \tag{54}$$
$$\int\limits_{\Sigma_0^*} \varphi\, d\sigma_1 = 0.$$

Крайова умова на незбуреній вільній поверхні Σ_0^* і умова неперетікання на S_0^* в криволінійній системі координат $x_1x_2x_3$ формулюються на основі (50)–(52), (24) з використанням виразів:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{x_1=k_0} = \left[g^{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + g^{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + g^{31}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right]_{x_1=k_0}, \tag{55}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{x_2=r_0} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + g^{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right]_{x_2=r_0}, \tag{56}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{x_1=0} = \left[g^{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right]_{x_1=0}. \tag{57}$$

Наведені вище нелінійна крайова задача (49)–(53) і спектральна задача (54) сформульовані для області Q^* більш простої, порівняно з вихідною, конфігурації. В просторі параметрів $x_1x_2x_3$ область Q^* має форму прямого кругового циліндра ($0 \le x_1 \le k_0$, $0 \le x_2 \le r_0$, $0 \le x_3 \le 2\pi$) з елементами площ поверхонь (28), (47), що обмежують об'єм Q^* (незбуреної вільної поверхні Σ_0^*, бокової поверхні S_2^*, дна циліндра S_3^* та збуреної вільної поверхні Σ^*).

Це відкриває в конструктивному аспекті широкі можливості застосування варіаційних принципів механіки в плані створення модальних методів при дослідженні нелінійних проблем динаміки твердого тіла з рідиною у випадку нахилених циліндричних порожнин.

З іншого боку, проведене дослідження видається також перспективним і в плані розробки альтернативних варіаційних чисельно-аналітичних методів розв'язування спектральної задачі (47), яка є базовою в нелінійній теорії просторового руху твердих тіл з порожнинами, частково заповненими рідиною [13].

Зазначимо також, що представлені тут результати легко узагальнюються на клас нахилених циліндричних резервуарів з поперечним перерізом, відмінним від кругового, а також на резервуари, які мають форму тіл обертання. На подібного типу дослідженнях ми зупинимося окремо.

[1] *Моисеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. — М.: ВЦ СССР, 1966. — 269 с.

[2] *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.

[3] *Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В.* Методы расчета присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 251 с.

[4] *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.

[5] *Луковский И.А.* Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. — Киев: Наук. думка, 1975. — 136 с.

[6] *Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наук. думка, 1984. — 232 с.

[7] *Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дружинина Г.З., Либин Э.Е.* Введение в динамику сосудов с жидкостью. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977. — 144 с.

[8] *Борисова Э.П.* Свободные колебания жидкости в наклонном цилиндре // Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью. — М.: ВЦ АН СССР, 1966. — С. 203–211.

[9] *Богоряд И.Б., Симонова Н.М.* О колебаниях жидкости, частично заполняющей наклонный цилиндр // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Сб. науч. докл. IY симпоз. — М.: ЦНТИ "Волна" , 1980. — С. 39–44.

[10] *Моисеев Г.А., Савин А.В.* Решение задачи о колебаниях жидкости в наклонной полости вращения // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Сб. науч. докл. Ш симпоз. — М.: ЦНТИ "Волна" , 1976. — С. 305–307.

[11] *Комаренко А.Н., Швец Г.А.* Определение гидродинамических коэффициентов уравнений движения твердого тела с наклонной цилиндрической полостью, содержащей жидкость // Динамика и устойчивость

механических систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. — С. 50–63.

[12] *Луковский И.А., Швец Г.А.* Метод возмущений в задаче о движениях жидкости в наклонных резервуарах // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. Сб. статей. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. — С. 40–52.

[13] *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — Киев: Наук. думка, 2010. — 407 с.