Збірник праць Ін-ту математики НАН України   2013, том 10, N 4–5, 379–400

УДК 517.5

Е. С. Афанасьева

(Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк)

Об одном классе отображений в метрических пространствах

es.afanasjeva@yandex.ru

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Исследуется проблема продолжения на границу континуально кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля между континуальными областями квазиэкстремальной длины в метрических пространствах с мерами. Изучаются также свойства множеств континуально нулевой экстремальной длины, континуально слабо плоских пространств и модулей семейств континуумов, содержащих общую точку.

1. Введение. Статья посвящена развитию метода модулей, которому профессор П. М. Тамразов уделял большое внимание, см., например, его статьи [1, 2].

В прошедшее десятилетие в теории отображений началось интенсивное изучение отображений в метрических пространствах с мерами методом модулей. Отметим, что эти исследования не являются простой данью абстракции, а ведут к важным приложениям к римановым многообразиям, а также к фракталам в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, которые тесно связаны с современной теоретической физикой. Важный вклад в развитие этого направления внесла донецкая школа по теории отображений, см., например, статьи [3 — 9] и монографии [10, 11].

В этой связи в последнее время активно развивалась теория так называемых Q-гомеоморфизмов. В работе [12] для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое легло в основу определения Q-гомеоморфизмов, введенных впоследствии

О. Мартио. Основной целью теории Q-гомеоморфизмов являлось изучение взаимосвязей между свойствами отображения f и свойствами функции Q. Развитие этой теории начиналось с работ [13, 14]. Определение Q-гомеоморфизма относительно p-модуля в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, при $p \neq n$ во внутренних точках областей впервые встречается в [15].

В данной работе развивается техника p-модулей в метрических пространствах с мерами применительно к семействам континуумов, которые, вообще говоря, не являются линейно связными и, на этой основе, строится теория граничного поведения континуально кольцевых Q-гомеоморфизмов.

Напомним в этой связи, что кольцевые Q-гомеоморфизмы мотивированы кольцевым определением квазиконформности в $\mathbb{R}^n,\ n = 3$, по Герингу (см. [16]). Эти гомеоморфизмы были впервые введены на плоскости в связи с изучением уравнений Бельтрами (см., например, [17]), а затем и в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ (см. [18]). Впоследствии понятие кольцевого гомеоморфизма было распространено в граничные точки областей на плоскости (см. [10, 19 — 21]), а затем и в пространстве (см. [15]). Как известно, теория граничного поведения всегда была наиболее трудной и интересной частью теории отображений (см., например, монографии [10, 11] и приведенную там библиографию). Отметим также, что кольцевые Q-гомеоморфизмы в последнее время нашли приложения к теории граничного поведения классов Соболева и Орлича–Соболева на римановых многообразиях (см., например, [5]). Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма в граничных точках относительно p-модуля при $p = 2$ было введено в связи с исследованием уравнения Бельтрами с вырождением условия строгой эллиптичности в [20, 21]. Кроме того, кольцевые Q-отображения, допускающие точки ветвления, изучались в [22]. В работе [23] в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ исследовались кольцевые Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля при $p \neq n$ во внутренних точках областей и приведен критерий принадлежности отображений классу кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля.

В то же время в теории отображений сейчас широко используются различные типы регулярных областей, такие как области квазиэкстремальной длины (QED-области), области со слабо плоскими и сильно достижимыми границами, а также множества нулевой экстремальной длины (NED-множества), см., например, [4, 6, 11, 13, 14, 24 — 27] и др. Впервые QED-области были введены в работе Геринга и Мартио [28].

Позже появились различные характеристики указанных областей, см., например, статьи [29, 26] и др.

Автор продолжил начатое в работе [9] исследование граничного поведения кольцевых Q-гомеоморфизмов, но уже относительно p-модулей между континуальными областями квазиэкстремальной длины в метрических пространствах с мерами, см. также [3].

2. О континуальных связностях в топологических пространствах. Напомним, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся открытых множества. Напомним также, что топологические пространство T называется *локально связным*, если для любой его точки x_0 и любой ее окрестности U найдется ее связная окрестность $V \subseteq U$. Компактные связные пространства называются *континуумами*. В дальнейшем для любых множеств A, B и C в топологическом пространстве T через $\Gamma(A, B; C)$ обозначаем семейство всех континуумов γ, соединяющих A и B в C, т.е. таких, что $\gamma \cap A \neq \emptyset$, $\gamma \cap B \neq \emptyset$ и $\gamma \setminus \{A \cup B\} \subseteq C$.

Пространство T будем называть *континуально связным*, если любую пару его точек можно погрузить в континуум γ в T. Под *континуальной областью* в топологическом пространстве T будем понимать открытое континуально связное множество D. Также пространство T будем называть *локально континуально связным* в точке x_0, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$, которая является континуальной областью в T. Пространство T будем называть *континуально связным* в точке x_0, если для любой ее окрестности U найдется ее окрестность $V \subseteq U$, такая что $V \setminus \{x_0\}$ является континуальной областью, ср. [11, с. 274]. Наконец, континуальную область D будем называть *континуально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ этой точки такая, что $V \cap D$ является континуальной областью.

Начнем с континуального аналога предложения 2.1 из статьи [6], см. также предложение 13.1 в монографии [11].

Предложение 1. *Пусть T — топологическое пространство с базой топологии $\mathcal{B}$, состоящей из континуально связных множеств. Тогда произвольное открытое множество Ω в T связно тогда и только тогда, когда Ω континуально связно.*

Следствие 1. *Открытое множество Ω в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, или в любом многообразии является связным тогда и только тогда, когда Ω континуально связно.*

Замечание 1. Таким образом, если область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, или на многообразии $\mathbb{M}^n$, $n \geq 2$, локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, то она и континуально связна в x_0. На основе предложения 1, далее мы покажем, что связность и континуальная связность открытых множеств эквивалентны в широком классе так называемых континуально слабо плоских пространств.

Доказательство предложения 1. 1) Пусть Ω континуально связно. Если Ω при этом несвязно, то $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 — некоторые непустые и непересекающиеся открытые множества. Пусть $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$. Тогда по континуальной связности Ω найдется континуум K в Ω, включающий в себя обе точки. Однако, множества $K \cap \Omega_1$ и $K \cap \Omega_2$ — открытые в индуцированной топологии K, оба они не пусты, не пересекаются и $K = (K \cap \Omega_1) \cup (K \cap \Omega_2)$, что противоречит связности K. Полученное противоречие опровергает сделанное выше предположение о том, что Ω несвязно.

2) Пусть теперь Ω связно. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \Omega$ и обозначим через Ω_0 множество всех точек x в Ω, которые можно соединить с x_0 конечной цепью множеств $B_k \in \mathcal{B}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, так что $x_0 \in B_1$, $x \in B_m$ и $B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Ясно, что Ω_0 континуально связно, см., например, теорему 5.47.I.1 в [30].

Во-первых, множество Ω_0 открыто. Действительно, если $x_* \in \Omega_0$, то по построению найдется ее окрестность $B_* \in \mathcal{B}$, все точки которой принадлежат Ω_0.

Во-вторых, множество Ω_0 замкнуто в Ω. Действительно, предположим, что $\partial\Omega_0 \cap \Omega \neq \emptyset$. Заметим, что для любой точки $z_0 \in \partial\Omega_0 \cap \Omega$ найдется ее окрестность $B_0 \in \mathcal{B}$, а в этой окрестности найдется точка $y_0 \in \Omega_0$, поскольку $z_0 \in \partial\Omega_0$. Таким образом, $z_0 \in \Omega_0$ по определению Ω_0. Однако, Ω_0 открыто и потому $\Omega_0 \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$. Полученное противоречие опровергает сделанное выше предположение.

Итак, Ω_0 одновременно открыто и замкнуто в Ω и, следовательно, совпадает с Ω ввиду его связности. Таким образом, Ω континуально связно. Предложение 1 доказано.

Говорим, что семейство континуумов Γ_1 из произвольного топологического пространства T *минорируется* семейством континуумов Γ_2 из T, и пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждого континуума $\gamma_1 \in \Gamma_1$ существует континуум $\gamma_2 \in \Gamma_2$ такой, что γ_2 является подконтинуумом γ_1, т.е. $\gamma_2 \subseteq \gamma_1$.

Приведем континуальный аналог предложения 2.3 из работы [6], см. также предложение 13.3 в монографии [11], доказанной в [3].

Предложение 2. *Пусть* Ω — *открытое множество в метрическом пространстве* (X,d)*. Тогда*

$$\Gamma(\Omega, X\setminus\Omega; X) > \Gamma(\Omega, \partial\Omega; \Omega)\,. \tag{1}$$

Далее H^k, $k\in[0,\infty)$, обозначает *k-мерную меру Хаусдорфа* множества A в метрическом пространстве (X,d):

$$H^k(A) := \sup_{\varepsilon>0}\ H^k_\varepsilon(A)\,,$$

где

$$H^k_\varepsilon(A) := \inf\ \sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}\ A_i)^k\,, \tag{2}$$

и инфимум в (2) берётся по всем покрытиям A множествами A_i с $\mathrm{diam}\ A_i := \sup\limits_{x,\ y\in A_i} d(x,y) < \varepsilon$ (см., например, [31]).

Известно, что если для некоторого множества A и $k_1\geq 0$ выполнено условие $H^{k_1}(A)<\infty$, то $H^{k_2}(A)=0$ для произвольного числа $k_2>k_1$, см., например, разд. 1 в гл. VII в [31]. При этом величина

$$\dim_H A := \sup_{H^k(A)>0} k,$$

называется *хаусдорфовой размерностью* множества A.

В дальнейшем говорим, что континуум в метрическом пространстве (X,d) является *k-спрямляемым*, если его мера Хаусдорфа H^k конечна. Будем называть 1-спрямляемые континуумы γ просто *спрямляемыми континуумами* или континуумами *конечной длины*, а $H^1(\gamma)$ — *длиной* γ. Фугледе рассматривал системы мер в абстрактном множестве $\mathcal{X}$ с фиксированной основной мерой (см., например, [32]). Мы рассмотрим системы борелевских мер, ассоциированных с континуумами в метрических пространствах (X,d). Именно, мера $m_\gamma^{(k)}$, ассоциированная с континуумом γ в (X,d), определяется для каждого борелевского множества B в (X,d) как хаусдорфова мера H^k пересечения $B\cap\gamma$ при фиксированном $k>0$. В дальнейшем для любого континуума $\gamma\in\Gamma$ мера $m_\gamma := m_\gamma^{(1)}$.

Приведем также континуальный аналог предложения 2.4 из статьи [6], см. также предложение 13.4 в монографии [11], доказанной в [3].

Предложение 3. *Пусть γ — спрямляемый континуум в метрическом пространстве (X,d), соединяющий точки $x_1 \in \overline{B(x_0,r_1)}$ и $x_2 \in X \setminus B(x_0,r_2)$, где $x_0 \in X$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и пусть $\eta : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — борелева функция. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} \eta(d(x,x_0))\, dm_\gamma \ \geq \ \int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \ . \tag{3}$$

Замечание 2. В частности, из неравенства (3) следует, что для любого континуума γ

$$H^1(\gamma) \ \geq \ \mathrm{diam}\ \gamma \ . \tag{4}$$

Однако, неравенство вида

$$H^k(\gamma) \ \geq \ [\mathrm{diam}\ \gamma]^{\alpha_k} \tag{5}$$

не выполняется для невырожденных континуумов ни при каком другом k, кроме $k = 1$, и ни при каком $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Действительно, при $k < 1$ по теореме VII.2 из [31] $1 > \dim_H \gamma \geq \dim \gamma = 0$, где $\dim \gamma$ — топологическая размерность γ, т.е. γ — полностью разрывное множество (см. II.4.D в [31]). Однако, последнее противоречит тому, что γ — невырожденный континуум. Если $k > 1$, то неравенство (4) также не выполняется, как показывает следующий контрпример. Пусть $I = [0,1]$. Очевидно, что $H^1(I) = 1 < \infty$ и потому $H^k(I) = 0$ для любого $k > 1$ (см. разд. 1 гл. VII в [31]), а $\mathrm{diam}\ I = 1$, т.е. (5) не выполнено для простейшего континуума I.

Неотрицательную μ-измеримую функцию $\rho : X \to [0,\infty]$ называем *допустимой* для семейства континуумов Γ в (X,d) и пишем $\rho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_{X} \rho\, dm_\gamma \ \geq \ 1 \quad \ \forall\ \gamma \in \Gamma.$$

3. О метрических пространствах с мерами. Пусть теперь (X,d,μ) — метрическое пространство с борелевой мерой μ. Напомним, что пространство (X,d,μ) называется *α-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \geq 1$, такая что

$$C^{-1} r^\alpha \leq \mu(B_r) \leq C r^\alpha$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \mathrm{diam}\, X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α (см., например, [33, с. 61]). Пространство (X, d, μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α-регулярно по Альфорсу для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Говорят также, что пространство (X, d, μ) *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \leq Cr^{\alpha} \tag{6}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Будем также говорить, что пространство (X, d, μ) — *регулярно сверху*, если условие (6) выполнено в каждой точке x для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

p-модуль, $0 < p < \infty$, семейства Γ континуумов γ в (X, d, μ) определим следующим образом:

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho\, \in\, adm\, \Gamma} \int\limits_X \rho^p(x)\, d\mu(x).$$

Здесь мы доопределим $M_p(\Gamma) = +\infty$, если $\Gamma = \emptyset$.

Из соотношения (1) в соответствии с [32, с. 178] вытекает

Следствие 2. *Для любого открытого множества Ω в метрическом пространстве с борелевой мерой (X, d, μ)*

$$M_p(\Gamma(\Omega, X \setminus \Omega; X)) \leq M_p(\Gamma(\Omega, \partial\Omega; \Omega)) \qquad \forall\ p \in (0, \infty)$$

Пусть D и D' — континуальные области соответственно в пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ'), $Q : X \to (0, \infty)$ — μ-измеримая функция и $p \in (0, \infty)$. Говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является *континуально кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \in \overline{D}$ относительно p-модуля, если неравенство

$$M_p(\Gamma(f(C_0),\, f(C_1);\, D')) \leq \int\limits_{A \cap D} Q(x)\, \eta^p(d(x, x_0))\, d\mu(x)$$

выполняется для любого кольца $A = A(x_0, r_1, r_2) := \{x_0 \in X : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, любых двух континуумов $C_0 \subset \overline{B(x_0,\, r_1)} \cap D$ и $C_1 \subset D \setminus B(x_0, r_2)$ и любой борелевой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr \ \geq\ 1.$$

Наконец, говорим, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ есть *континуально кольцевой Q-гомеоморфизм,* если f является континуально кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Аналогично [6], говорим, что граница континуальной области D — *континуально слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, если для любого числа $N > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \geq N$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V.

Аналогично [6], также говорим, что граница континуальной области D *континуально сильно достижима* в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, если для любой окрестности U точки x_0, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$, такие что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \geq \delta$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V.

Наконец, границу континуальной области D называем *континуально сильно достижимой* относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, и *континуально слабо плоской* относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке ее границы.

Приведем некоторые вспомогательные утверждения из [3].

Предложение 4. *Если граница континуальной области D — континуально слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, то ∂D континуально сильно достижима в точке x_0 относительно p-модуля.*

Лемма 1. *Пусть D — континуальная область в (X, d, μ). Если ∂D — континуально слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, то D континуально связна в x_0.*

Следствие 3. *Континуальные области с континуально слабо плоскими границами относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, континуально связны во всех точках границы.*

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с расстоянием d и борелевой мерой μ. Следуя [6], говорим, что функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in X$, сокращенно $\varphi \in FMO(x_0)$,

если
$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))}\int_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\widetilde{\varphi}_\varepsilon|\ d\mu(x)<\infty\,, \tag{7}$$
где
$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon=\frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)d\mu(x)\qquad -$$
среднее значение функции φ по шару $B(x_0,\varepsilon)=\{x\in X: d(x,x_0)<\varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (7) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ по некоторому шару $B(x_0,\varepsilon),\ \varepsilon>0$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5. *Если*
$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))}\int_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\varphi_\varepsilon|\ \ d\mu(x)<\infty$$
для некоторого набора чисел $\varphi_\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, то $\varphi\in FMO(x_0)$.

Следствие 4. *В частности, если*
$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \frac{1}{\mu(B(x_0,\varepsilon))}\int_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)|\ \ d\mu(x)<\infty\,,$$
то $\varphi\in FMO(x_0)$.

Частные случаи следующей леммы из [6] были сначала доказаны для BMO функций и внутренних точек области D в $\mathbb{R}^2$ (а также в $\mathbb{R}^n$ при $n\geq 3$), затем — для FMO функций и граничных точек D в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, с условием удвоения меры, см. историю вопроса более подробно в главе 13 монографии [11].

Лемма 2. *Пусть пространство (X,d,μ) p-регулярно сверху при $p\geq 2$ в точке x_0 и*
$$\mu(B(x_0,2r))\leq\gamma\,\log^{p-2}\frac{1}{r}\ \mu(B(x_0,r))\qquad\forall\, r\in(0,r_0)\,. \tag{8}$$
Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi: X\to\mathbb{R}$ класса $FMO(x_0)$
$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)}\frac{\varphi(x)\,d\mu(x)}{\left(d(x,x_0)\log\frac{1}{d(x,x_0)}\right)^p}=O\Big(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\Big),\quad \varepsilon\to 0\,,$$
при некотором $\varepsilon_0\in(0,\delta_0)$, где $\delta_0=\min\,(e^{-e},d_0)$, $d_0:=\sup\limits_{x\in D}d(x,x_0)$.

Замечание 3. Отметим, что условие (8) слабее *условия удвоения меры* μ:
$$\mu(B(x_0,2r)) \leq \gamma\, \mu(B(x_0,r)) \qquad \forall\, r \in (0,r_0)\,, \tag{9}$$
которое использовалось ранее в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в работе [34], см. также раздел 6.2 в монографии [11]. Заметим также, что условие (9) автоматически выполняется в точках пространства X, где X — регулярно по Альфорсу.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \psi^p(d(x,x_0))\ d\mu(x) = o\left(\left[\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\ dt\right]^p\right), \quad \varepsilon \to 0\,, \tag{10}$$

при $\varepsilon_0 \in (0,\infty)$ *и пусть* $\psi(t)$ *— неотрицательная функция на* $(0,\infty)$ *такая, что* $0 < \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\ dt < \infty$ *при всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. *Тогда* p*-модуль,* $p \in (0,\infty)$*, семейства всех континуумов в* X*, содержащих точку* x_0*, равен нулю.*

Замечание 4. Условие (10) включает предположение, что при всех $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_1)} \psi^p(d(x,x_0))\ d\mu(x) = o\left(\left[\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \psi(t)\ dt\right]^p\right), \quad \varepsilon \to 0\,. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть Γ — семейство всех континуумов в X, содержащих точку x_0. Тогда все континуумы в X содержат точку x_0 и $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty}\Gamma_k$, где Γ_k — семейство всех континуумов в X, содержащих точку x_0 и пересекающих сферы $S_k = S(x_0,r_k)$ для некоторой последовательности r_k такой, что $r_k \in (0,\varepsilon_0)\,, r_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Однако, $M(\Gamma_k) = 0$. Действительно, функция

$$\rho(x) \;=\; \begin{cases} \psi(d(x,x_0))\left(\int\limits_{r}^{r_k} \psi(t)\ dt\right)^{-1}, & \text{если } x \in A_k(r), \\ 0, & \text{если } x \in X \backslash A_k(r), \end{cases}$$

где $A_k(r) = A(x_0,r,r_k)$, является допустимой для семейства $\Gamma_k(r)$ по всем континуумам, пересекающим сферы S_k и $S(x_0,r)$, $r \in (0,r_k)$; см. предложение 3. Так как $\Gamma_k > \Gamma_k(r)$, то

$$M_p(\Gamma_k) \le M_p(\Gamma_k(r)) \le \left(\int\limits_r^{r_k} \psi(t)\,dt\right)^{-p} \int\limits_{A_k(r)} \psi^p(d(x,x_0))\,d\mu(x)$$

и по условию (10) (см. также (11)) получаем, что $M_p(\Gamma_k) = 0$, так как $r \in (0, r_k)$ — произвольное.

Наконец по свойству полуаддитивности p-модуля получаем, что

$$M_p(\Gamma) \le \sum_{k=1}^{\infty} M_p(\Gamma_k) = 0.$$

Теорема 1. *Пусть при некотором $\varepsilon_0 \in (0,\infty)$ выполнено условие*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{d\mu(x)}{d^p(x,x_0)} = o\left(\left[\log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^p\right), \quad \varepsilon \to 0\,. \tag{12}$$

Тогда p-модуль, $p \in (0,\infty)$, семейства всех континуумов в X, содержащих точку x_0, равен нулю.

4. Слабо плоские пространства. Аналогично [6] (см. также главу 13 в [11]) континуально связное пространство (X, d, μ) называем *континуально слабо плоским в точке* $x_0 \in X$ относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, если для любой окрестности U точки x_0 и любого $N > 0$ найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $M_p(\Gamma(E,F;X)) \ge N$ для любых континуумов E и F в X, пересекающих ∂V и ∂U. Говорим также, что континуально связное пространство (X, d, μ) *континуально сильно достижимо в точке* $x_0 \in X$ относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0, компактное множество E в X и число $\delta > 0$ такие, что $M_p(\Gamma(E,F;X)) \ge \delta$ для любого континуума F в X, пересекающего ∂V и ∂U. Наконец, говорим, что пространство (X, d, μ) — *континуально слабо плоское* (*континуально сильно достижимое*), если соответствующие свойства выполнены в каждой точке пространства.

Замечание 5. В определениях континуально слабо плоских и континуально сильно достижимых пространств, можно ограничиться окрестностями точки x_0 и, в частности, в качестве U и V выбирать достаточно малые шары (открытые или замкнутые) с центром в точке x_0. Более того, по предложению 2 можно ограничиться только континуумами E и F в $\overline{U}$. Очевидно также, что любая континуальная область в континуально слабо плоском пространстве относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, является континуально слабо плоским пространством по предложению 2.

Следующее предложение доказывается совершенно аналогично предложению 4.

Предложение 6. *Если пространство (X, d, μ) — континуально слабо плоское в точке $x_0 \in X$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, то (X, d, μ) континуально сильно достижимо в точке x_0 относительно p-модуля.*

Приведем полное доказательство континуального аналога леммы 9.1 из работы [6], см. также лемму 13.7 в монографии [11].

Лемма 4. *Если пространство (X, d, μ) — континуально слабо плоское в точке $x_0 \in X$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, то (X, d, μ) локально континуально связно в точке x_0.*

Доказательство. Предположим, что пространство X не является локально континуально связным в точке x_0. Тогда найдется $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup_{x \in X} d(x, x_0)$, такое, что $\mu_0 := \mu(B(x_0, r_0)) < \infty$ и любая окрестность $V \subseteq U := B(x_0, r_0)$ точки x_0 имеет континуально связную компоненту K_0, содержащую x_0, и континуально связные компоненты $K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots$, отличные от K_0, такие, что $x_0 = \lim_{m \to \infty} x_m$ для некоторых $x_m \in K_m$. Заметим, что $\overline{K_m} \cap \partial V \neq \emptyset$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ ввиду континуальной связности X (см. предложение 2).

В частности, это верно для окрестности $V = U = B(x_0, r_0)$. Пусть $r_* \in (0, r_0)$. Тогда для любого $i = 1, 2, \ldots$

$$M_p(\Gamma(K_i^*, K_0^*; D)) \leq M_0 := \frac{\mu_0}{[r_0 - r_*]^p} < \infty\,,$$

где $K_i^* = K_i \cap \overline{B(x_0, r_*)}$ и $K_0^* = K_0 \cap \overline{B(x_0, r_*)}$. Действительно, одной из допустимых функций для семейства Γ_i всех спрямляемых континуумов из $\Gamma(K_i^*, K_0^*; D)$ является

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{(r_0 - r_*)}, & \text{если } x \in B_0 \setminus \overline{B_*}, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus (B_0 \setminus \overline{B_*}), \end{cases}$$

где $B_0 = B(x_0, r_0)$ и $B_* = B(x_0, r_*)$, так как компоненты K_i и K_0 не могут быть связаны континуумом в $V = B(x_0, r_0)$ и любой континуум, соединяющий K_i^* и K_0^* должен пересечь кольцо $B_0 \setminus \overline{B_*}$ по свойству Дарбу связных множеств (см., например, следствие 5.46.I.3a в [30]; см. также предложение 3).

Однако, модульная оценка, приведенная выше, противоречит условию континуальной слабой плоскости пространства X в точке x_0. Действительно, по этому условию найдется $r \in (0, r_*)$ такое, что

$$M_p(\Gamma(K_{i_0}^*, K_0^*; D)) \geq M_0 + 1$$

для любого достаточно большого $i_0 = 1, 2, \ldots$, так как в соответствующих $K_{i_0}^*$ с $d(x_0, x_{i_0}) < r$ и K_0^*, найдутся континуумы, пересекающие $\partial B(x_0, r_*)$ и $\partial B(x_0, r)$ (см. предложение 2).

Таким образом, предположение о нарушении континуальной связности пространства X в точке x_0 было неверным. Лемма доказана.

Комбинируя лемму 4 и лемму 1 с предложением 1, получаем следующие заключения.

Следствие 5. *Континуально слабо плоские пространства (X, d, μ) являются локально связными.*

Следствие 6. *Открытое множество Ω в континуально слабо плоском пространстве (X, d, μ) является континуальной областью тогда и только тогда, когда Ω связно.*

Следствие 7. *Континуальная область D в континуально слабо плоском пространстве (X, d, μ) континуально связна в точке $x_0 \in \partial D$ тогда и только тогда, когда D локально связна в x_0.*

Комбинируя леммы 3 и 4, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Если пространство (X, d, μ) — континуально слабо плоское в точке $x_0 \in X$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, и условие* (10) (*в частности,* (12)) *выполнено, то (X, d, μ) континуально связно в точке x_0.*

По замечанию 13.8 из [11] приходим к следующему заключению.

Следствие 8. *Если пространство X — континуально слабо плоское относительно p-модуля, $p \in (1, \infty)$, и p-регулярно сверху в точке $x_0 \in X$, то X континуально связно в точке x_0.*

5. Континуальные области квазиэкстремальной длины. Аналогично [28], говорим, что континуальная область D в (X, d, μ) является *континуальной областью квазиэкстремальной длины* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, сокращенно *континуальной QED областью*, если

$$M_p(\Gamma(E,F;X)) \le K\, M_p(\Gamma(E,F;D))$$

для некоторого конечного $K \ge 1$ и любых континуумов E и F в D.

Как видно, непосредственно из определений, континуальные QED области в континуально слабо плоских пространствах относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, имеют континуально слабо плоские границы. Таким образом, приходим к следующим результатам на основе теории граничного поведения континуально кольцевых Q-гомеоморфизмов, развитой в работе [3].

Лемма 5. *Пусть f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, между континуальными QED областями D и D' соответственно в континуально слабо плоских пространствах X и X', $\overline{D'}$ — компакт и пусть в точке $x_0 \in \partial D$ выполнено условие*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\,\psi^p(d(x,x_0))\,d\mu(x) \;=\; o\Bigg(\Bigg[\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt\Bigg]^p\Bigg), \quad \varepsilon\to 0\,, \tag{13}$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$ такая, что

$$0 < \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt < \infty \qquad\qquad \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

Тогда существует предел $f(x)$ при $x\to x_0$.

Следствие 9. *В частности, предел $f(x)$ при $x \to x_0$ существует, если*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\,\psi^p(d(x,x_0))\,d\mu(x) \;<\; \infty \tag{14}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt \;=\; \infty\,. \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, между континуальными QED областями D и D' соответственно в континуально слабо плоских пространствах X и X', и пусть $\overline{D'}$ — компакт. Если в точке $x_0 \in \partial D$*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^p} = o\left(\left[\log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^p\right), \tag{16}$$

то f допускает продолжение в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Следствие 10. *В частности, заключение теоремы 3 имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^p} < \infty \tag{17}$$

сходится в окрестности точки x_0.

Теорема 4. *Пусть f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, между континуальными QED областями D и D' соответственно в континуально слабо плоских пространствах X и X', и пусть $\overline{D}$ — компакт. Если $Q \in L^1_\mu(D)$, то обратный гомеоморфизм $g = f^{-1}$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g} : \overline{D'} \to \overline{D}$.*

Теорема 5. *Пусть f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in (0,\infty)$, между континуальными QED областями D и D' соответственно в континуально слабо плоских пространствах X и X', и пусть $\overline{D}$ и $\overline{D'}$ — компакты. Если $Q \in L^1_\mu(D)$ удовлетворяет условию (16) или (17) в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то f допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Теорема 6. *Пусть f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $p \in [2,\infty)$, между континуальными QED областями D и D' соответственно в континуально слабо плоских пространствах X и X', и пусть $\overline{D'}$ и $\overline{D}$ — компакты. Если в некоторой точке $x_0 \in \partial D$ функция $Q : X \to (0,\infty)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in \partial D$, выполняется условие* (8) *и пространство (X, d, μ) p-регулярно сверху в точке x_0, то f допускает продолжение в точку x_0 по непрерывности. Если последние два условия выполнены в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то f допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Замечание 6. В случае регулярных по Альфорсу пространств, имеет место даже условие удвоения меры, которое сильнее условия Р. Р. Салимова (8). В силу компактности $\overline{D}$, Q интегрируема в окрестности ∂D, что следует из условия конечного среднего колебания в точках ∂D. Напомним, для того чтобы $Q \in FMO(x_0)$ при $x_0 \in \partial D$ достаточно выполнения условия

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\ d\mu(x) < \infty\,.$$

6. Множества континуально нулевой экстремальной длины. Замкнутое множество A в пространстве (X, d, μ) будем называть *множеством континуально нулевой экстремальной длины* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, сокращенно, континуальным NED-*множеством*, если

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) = M_p(\Gamma(E, F; D \setminus A)) \tag{18}$$

для любой континуальной области D в X и любых континуумов E и F в D.

Также как и в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, континуальные NED-множества A в континуально слабо плоских пространствах относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, не могут иметь внутренних точек и, кроме того, они не разбивают пространство X даже локально, т.е. $D \setminus A$ имеет единственную компоненту континуальной связности для любой континуальной области D в X. Таким образом, дополнение к континуальным NED-множествам A в X представляет собой весьма частный случай континуальных QED-областей. Поэтому континуальные NED-множества в континуально слабо плоских пространствах относительно p-модулей, $p \in (0, \infty)$, играют ту же роль в проблемах устранимости особых множеств при квазиконформных отображениях и их обобщениях как и в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Предложение 7. *Пусть A — континуальное NED-множество относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, в континуально слабо плоском пространстве (X, d, μ) относительно p-модуля, не вырождающемся в точку. Тогда:*

1) *A не имеет внутренних точек;*

2) *$D \setminus A$ — континуальная область для любой континуальной области D в X.*

Доказательство. 1) Допустим, что существует точка $x_0 \in A$ такая, что $B(x_0, r_0) \subseteq A$ для некоторого $r_0 > 0$. Пусть $x_* \in X$, $x_* \neq x_0$, и γ — континуум в X, содержащий x_0 и x_*. Так как всегда существует меньший шар $B^* = B(x_0, r^*) \subseteq A$, который уже не содержит точку x_*, то по предложению 2 найдется его подконтинуум $\gamma^* \subseteq \overline{B^*}$, содержащий точки x_0 и $x_1 \in \partial B^*$. Следовательно, полагая $E = F = \gamma^*$, имеем $M_p(\Gamma(E, F, X)) = \infty$, поскольку пространство X — континуально слабо плоское относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$. С другой стороны, $\Gamma(E, F; X \setminus A) = \emptyset$ и, следовательно, $M_p(\Gamma(E, F; X \setminus A)) = 0$. Таким образом, мы получаем противоречие с условием (18). Полученное противоречие опровергает сделанное выше предположение.

2) Ввиду следствия 6 достаточно установить, что $D \setminus A$ связно. Обозначим через Ω_* одну из связных компонент открытого множества $D \setminus A$. Заметим, что Ω_* — открытое множество в X, поскольку по следствию 5 X локально связно (см., например, предложение I.11.11. в [35]). По тем же соображениям объединение Ω всех остальных связных компонент множества $D \setminus A$ является открытым множеством. Допустим, что $\Omega \neq \emptyset$.

Положим $\overline{\Omega}^0 := \overline{\Omega} \setminus \partial\overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}_*^0 := \overline{\Omega}_* \setminus \partial\overline{\Omega}_*$, т.е. $\overline{\Omega}^0$ и $\overline{\Omega}_*^0$ — соответственно внутренности замыканий Ω и Ω_*. Тогда $\overline{\Omega}^0 \neq \emptyset$, поскольку $\Omega \subseteq \overline{\Omega}^0$, и $B := \partial\overline{\Omega} \cap D = \partial\overline{\Omega}_* \cap D = A \setminus \{(A \cap \overline{\Omega}^0) \cup (A \cap \overline{\Omega}_*^0)\}$, поскольку по первой части доказательства $A^0 := A \setminus \partial A = \emptyset$, т.е. $A = \partial A$. Заметим, что $B \neq \emptyset$ ввиду связности D, так как в противном случае $D = \overline{\Omega}^0 \cup \overline{\Omega}_*^0$.

Рассматривая D как метрическое пространство, а $\overline{\Omega}^0$ как его подмножество, из предложения 2 получаем, что найдется континуум в $\overline{\overline{\Omega}^0} \cap D = \overline{\Omega} \cap D$ такой, что $\gamma \cap \overline{\Omega}^0 \neq \emptyset$ и $\gamma \cap \partial\Omega \cap \partial\Omega_* \cap D \neq \emptyset$, поскольку $\partial\overline{\Omega} \subseteq \partial\Omega$ и $\partial\overline{\Omega}_* \subseteq \partial\Omega_*$. Пусть $x_0 \in \gamma \cap \partial\Omega \cap \partial\Omega_* \cap D$, $x_* \in \Omega_*$ и $x_n \in \Omega_*$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Заметим, что Ω_* континуально связно по следствию 6 и, таким образом, найдется последовательность континуумов γ_n в Ω_*, соединяющих точки x_* и x_n. Тогда $M_p(\Gamma(\gamma, \gamma_n; D)) \to \infty$ при $n \to \infty$, поскольку D — континуально слабо плоское пространство (см. замечание 5). С другой стороны, $\Gamma(\gamma, \gamma_n; D \setminus A) = \emptyset$ и потому $M_p(\Gamma(\gamma, \gamma_n; D \setminus A)) = 0$. Полученное противоречие опровергает сделанное выше предположение о том, что $D \setminus A$ не является связным.

Лемма 6. *Пусть X и X' — компактные континуально слабо плоские пространства относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, D — континуальная область в X, $A \subset D$ — континуальное NED-множество в X и f — гомеоморфизм из $G = D \setminus A$ в X'. Если предельное множество*

$$A' := C(A, f) = \{x' \in X' : x' = \lim_{k\to\infty} f(x_k), x_k \in G, \lim_{k\to\infty} x_k \in A\}$$

является континуальным NED–множеством в X' *и* $G' = f(G)$, *то* $D' = G' \cup A'$ *— континуальная область в* X'. *Кроме того, существуют континуальные области* D^* *в* X *со свойствами* $A \subset D^*$, $\overline{D^*} \subset D$ *и* $A' \cap A^* = \varnothing$, *где* $A^* := f(\partial D^*)$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что континуальное NED-множество A является компактом, как замкнутое множество в компактном пространстве X и поэтому $\varepsilon_0 = \mathrm{dist}\,(A, \partial D) > 0$. Таким образом, A принадлежит открытому множеству $\Omega = \{x \in X : \mathrm{dist}\,(x, A) < \varepsilon\}$ при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, которое само входит в D. Так как A — компакт, A содержится в конечном числе компонент (континуальной) связности $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ множества Ω. Пусть x_0 — произвольная точка континуальной области D и пусть $x_k \in \Omega_k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Тогда найдутся континуумы γ_k в D, содержащие x_0 и x_k, $k = 1, 2, \dots, m$. Отметим, что множество $C = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k$ является также континуумом в D (см., например, теорему 5.47.I.1 в [30]) и $\delta_0 = \mathrm{dist}\,(C, \partial D) > 0$.

Рассмотрим открытые множества $D_\delta = \{x \in D : \mathrm{dist}\,(x, \partial D) > \delta\}$. По неравенству треугольника множество $C_0 = C \bigcup \big(\bigcup\limits_{k=1}^{m} \Omega_k\big)$ входит в D_δ при любом $\delta \in (0, d_0)$, где $d_0 = \min\,(\varepsilon_0 - \varepsilon, \delta_0)$. Более того, C_0 входит в одну компоненту (континуальной) связности D^*_δ множества D_δ, поскольку множество C_0 – (континуально) связное (см. предложение I.11.11 в [35] и следствие 5).

По построению $\overline{D^*_\delta} \subset D$ и D^*_δ — континуальные области в X и, следовательно, континуально слабо плоские пространства относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$. По предложению 7 множества $G_\delta = D^*_\delta \setminus A$ являются континуальными областями с континуально слабо плоскими границами A в пространствах D^*_δ, $\delta \in (0, d_0)$.

Пусть $f_\delta = f|_{G_\delta}$ и $g_\delta = (f_\delta)^{-1} : G'_\delta \to G_\delta$, где $G'_\delta = f_\delta(G_\delta)$. Тогда, как видно из предложения 13.5 в [11], имеет место симметрия

$$A' = C(A, f_\delta), \quad A = C(A', g_\delta) \qquad \forall\, \delta \in (0, d_0)\,.$$

Заметим, что $\partial D^*_\delta, \delta \in (0, d_0)$, являются компактными подмножествами континуальной области G и, следовательно, $f(\partial D^*_\delta)$ — компактные подмножества континуальной области $G' = f(G)$, которые по предложению 13.5 из [11] не пересекаются с A'. Таким образом, $d_\delta = \mathrm{dist}\,(A', f(\partial D^*_\delta)) > 0$ для любых $\delta \in (0, d_0)$. По лемме 4 пространство X' является континуально связным и поэтому для любой точки $x_0 \in A'$ найдется континуальная область $U \subset B(x_0, d_\delta)$, являющаяся окрестностью x_0, и по предложению 7 $V = U \setminus A'$ — также континуальная область, которая по построению является континуальной подобластью G'. Таким образом, $D' = G' \cup A'$ — континуальная область в X'.

Наконец, по предложению 7 и лемме 6, получаем следующие следствия из раздела 5 для континуальных NED множеств; сравни также замечания 13.5 и 13.6 в [11].

Лемма 7. *Пусть X и X' — компактные континуально слабо плоские пространства относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, D — континуальная область в X, $A \subset D$ — континуальное NED-множество в X и пусть f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм $G = D \setminus A$ в X' такой, что предельное множество $C(A, f)$ является континуальным NED-множеством в X'. Если в некоторой точке $x_0 \in A$ выполнено условие* (13), *то f допускает непрерывное продолжение в точку x_0.*

Замечание 7. В частности, f допускает продолжение по непрерывности в точку $x_0 \in A$, если в этой точке выполнено условие (8) или одно из условий (14) — (17), где $Q \in \mathrm{FMO}(x_0)$.

Теорема 7. *Пусть X и X' — компактные континуально слабо плоские пространства относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, D — континуальная область в X, $A \subset D$ — континуальное NED-множество в D и f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм из $G = D \backslash A$ в X' с континуальным NED-множеством $A' = C(A, f)$. Если $Q \in L^1_\mu(D)$, то обратный гомеоморфизм $g = f^{-1} : G' \to G$, $G' = f(G)$, допускает непрерывное продолжение $\overline{g} : D' \to D$, где $D' = G' \cup A'$.*

Замечание 8. Таким образом, если $Q \in L^1_\mu(G)$ удовлетворяет условию (8) или одному из условий (14) — (17) с $Q \in \mathrm{FMO}(x_0)$, неравенству замечания 3 в каждой точке $x_0 \in A$, то любой континуально кольцевой Q-гомеоморфизм f из континуальной области $G = D \backslash A$ в X' с континуальными NED-множествами A и $A' = C(A, f)$, допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : D \to D'$, где $D' = G' \cup A'$ и $G' = f(G)$.

Теорема 8. *Пусть X и X' — компактные континуально слабо плоские пространства относительно p-модуля, $p \in [2, \infty)$, D — континуальная область в X, $A \subset D$ — континуальное NED-множество в X и f — континуально кольцевой Q-гомеоморфизм из $G = D \setminus A$ в X' с континуальным NED-множеством $A' := C(A, f)$. Если Q имеет конечное среднее колебание и X p-регулярно по Альфорсу в каждой точке $x_0 \in A$, то f допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : D \to D'$, где $D' = G' \cup A'$, $G' = f(G)$.*

Список литературы

[1] Тамразов П. М. *Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях* // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 10. — С. 1388—1398.

[2] Тамразов П. М. *Непрерывность определенных конформных инвариантов* // Укр. мат. журн. — 1966. — **18**, № 6. — С. 78—84.

[3] Афанасьева Е. С. *О граничном поведении одного класса отображений в метрических пространствах* // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 10.

[4] Афанасьева Е. С., Рязанов В. И. *Регулярные области в теории отображений на римановых многообразиях* // Труды ИПММ НАН Украины. — 2011. — **22**. — С. 23—32.

[5] Афанасьева Е. С., Рязанов В. И., Салимов Р. Р. *Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях* // Укр. мат. вест. — 2011. — **8**, № 3. — С. 319—342.

[6] Рязанов В., Салимов Р. *Слабо плоские пространства и границы в теории отображений* // Укр. мат. вест. — 2007. — **4**, № 2. — С. 199—234.

[7] Рязанов В., Салимов Р. *Слабо плоские границы в метрических пространствах* // Докл. НАН Украины. — 2007. — № 11. — С. 23—28.

[8] Салимов Р. Р. *Локальное поведение Q-гомеоморфизмов в пространстве Лёвнера* // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 10. — С. 1378—1387.

[9] Смоловая Е. С. *Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах* // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 5. — С. 682—689.

[10] Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *The Beltrami Equation: A Geometric Approach* // Developments in Mathematics. — **26**. — New York etc.: Springer, 2012.

[11] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Moduli in Modern Mapping Theory*. — Springer Monographs in Mathematics, New York etc.: Springer, 2009.

[12] Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M. *On conformal dilatation in space* // Int. J. Math. Math. Sci. — 2003. — **22**. — P. 1397—1420.

[13] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *On Q–homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. — 2005. — **30**, № 1. — P. 49—69.

[14] Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Q-homeomorphisms* // Contemporary Math. — 2004. — **364**. — P. 193—203.

[15] Golberg A. *Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms* // Further Progress in Analysis / Proc. 6th ISAAC Congr. Hackensack, NJ: World Sci. Publ. — 2009. — P. 218—228.

[16] Gehring F. W. *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — **103**. — P. 353—393.

[17] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *On ring solutions of Beltrami equation* // J. Anal. Math. — 2005. — **96**. — P. 117—150.

[18] Рязанов В. И., Севостьянов Е. А. *Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов* // Сиб. мат. журн. — 2007. — **48**, № 6. — С. 1361—1376.

[19] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Integral conditions in the theory of the Beltrami equations* // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2012. — **57**, № 12. — P. 1247—1270.

[20] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *On strong solutions of the Beltrami equations* // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010. — **55**, № 1—3. — P. 219—236.

[21] Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *To strong ring solutions of the Beltrami equations* // Uzbek. Math. J. — 2009. — **1**. — P. 127—137.

[22] Салимов Р. Р., Севостьянов Е. А. *Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций* // Мат. сб. — 2010. — **201**, № 6. — С. 131—158.

[23] Салимов Р. Р. *Об оценке меры образа шара* // Сиб. мат. журн. — 2012. — **53**, № 4. — С. 920—930.

[24] Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И. *К теории нижних Q-гомеоморфизмов* // Укр. мат. вест. — 2008. — **5**, № 2. — С. 159—184.

[25] Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И. *О границах пространственных областей* // Труды ИПММ НАН Украины. — 2006. — **13**. — С. 110—120.

[26] Näkki R., Väisälä J. *John disks* // Expo Math. — 1991. — **9**, № 1. — P. 3—43.

[27] Yang Sh. *QED domains and NED sets in* $\mathbb{R}^n$ // Transactions of the AMS. — 1992. — **334**, № 1. — P. 97—120.

[28] Gehring F. W., Martio O. *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings* // J. Anal. Math. — 1985. — **24**. — P. 181—206.

[29] Gehring F. W. *Characteristic Properties of Quasidisk*. — Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1982.

[30] Куратовский К. *Топология. Т.2.*. — Москва: Мир, 1969.

[31] Hurewicz W., Wallman H. *Dimension Theory*. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.

[32] Fuglede B. *Extremal length and functional completion* // Acta Math. — 1957. — **98**. — P. 171—219.

[33] Heinonen J. *Lectures on Analysis on Metric Spaces*. — New York etc.: Springer, 2001.

[34] Игнатьев А. А., Рязанов В. И. *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Укр. мат. вест. — 2005. — **2**, № 3. — С. 395—417.

[35] Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры*. — Москва: Наука, 1969.