

УДК 517.54

С. А. Охрименко, А. Л. Таргонский

*(Житомирский государственный университет им. И. Франка,
Житомир)*

Экстремальные задачи на лучевых системах

targonsk@zu.edu.ua

Светлой памяти Промарза Меликовича Тамразова посвящается

Знайдено максимум функціонала, що складається з добутків внутрішніх радіусів для довільних степенів внутрішніх радіусів областей.

1. Введение. В геометрической теории функций комплексной переменной экстремальные задачи о произведении внутренних радиусов областей представляют известное классическое направление. Возникновение этого направления связывается с известной работой академика М. А. Лаврентьева [1], где была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно непересекающихся односвязных областей. В последующем этот результат обобщался и усиливался в различных направлениях в работах многих авторов (см., например, [2 – 15]).

Пусть \mathbb{N} и \mathbb{R} — множества натуральных и вещественных чисел, соответственно, \mathbb{C} — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — её одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

В работе используется понятие квадратичного дифференциала, с которым можно ознакомиться в монографии [7].

Пусть $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ [8 – 10], $g_D(w, a)$ — обобщенная функция Грина.

Рассмотрим систему точек $A_n := \{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k = \overline{1, n}$, такую, что

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < \arg a_{n+1} := 2\pi. \quad (1)$$

При $k = \overline{1, n}$ обозначим $P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$ и $\sigma_k = \frac{1}{\pi}(\arg a_{k+1} - \arg a_k)$. Ясно, что $\sum_{k=1}^n \sigma_k = 2$.

Пусть $D, D \subset \overline{\mathbb{C}}$, — произвольное открытое множество и $w = a \in D$. Тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту D , содержащую a . Для произвольной системы точек $A_n = \{a_k\}$, удовлетворяющей (1), и открытого множества $D, A_n \subset D$, обозначим через $D_k(a_p)$ связную компоненту множества $D(a_p) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащую точку $a_p, p = k, k + 1, k = \overline{1, n}, a_{n+1} := a_1$.

Будем говорить, что открытое множество $D, \{0\} \cup A_n \subset D$, удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек A_n если выполняется условие

$$[D_k(a_k) \cap D_k(a_{k+1})] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_k)] \cup [D_k(0) \cap D_k(a_{k+1})] = \emptyset, \quad (2)$$

для всех углов $\overline{P_k}, k = \overline{1, n}$.

Более подробно с введенными выше понятиями можно ознакомиться в работе [5].

На системе точек A_n определим функционал

$$\eta^{(\gamma)}(A_n) = \prod_{k=1}^n \left[\left(\chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\sigma_k}} \right) \right)^{1 - \frac{1}{2}\gamma\sigma_k^2} |a_k|^{1 + \frac{1}{4}\gamma(\sigma_k + \sigma_{k-1})} \right],$$

где $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1}), \gamma \geq 0$.

В работе для произвольной системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n, n \geq 2$, удовлетворяющей (1), любого открытого множества $D, 0, a_k \in D, k = \overline{1, n}$, удовлетворяющего условию неналегания (2), рассматривается задача о нахождении максимума функционала

$$I_n = r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k),$$

где $\gamma \geq 0$. Отметим, что в работе [12] задача об оценке функционала I_n в случае попарно непересекающихся областей сформулирована как открытая проблема. Решение этой задачи в частном случае описано в работе [5].

Теорема. Для произвольных $\gamma \in \mathbb{R}^+, \beta \geq 1$ и $\mu \geq \mu_0$ существует $n_0(\gamma, \beta, \mu) \in \mathbb{N}$ такое, что при каждом $n \geq n_0(\gamma, \beta, \mu)$ выполняется неравенство

$$r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k) \leq r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}), \quad (3)$$

где $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — любая система различных точек, удовлетворяющая (1) и такая, что $\eta^{(\gamma)}(A_n) = 1$, $\eta^{(0)}(A_n) \leq \beta$; D — произвольное открытое множество такое, что $0, a_k \in D$ при $k = \overline{1, n}$, $r(D, 0) \leq \mu$, и удовлетворяющее условию неналегания (2); $a_k^{(0)}$ и $B_k^{(0)}$ при $k = \overline{0, n}$ — соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2 \quad (4)$$

и $\mu_0 := r(B_0^{(0)}, 0)$.

Следствие. Для произвольных $\gamma \in \mathbb{R}^+$ и $\mu \geq \mu_0$ существует $n_0(\gamma, \mu) \in \mathbb{N}$ такое, что при каждом $n \geq n_0(\gamma, \mu)$ выполняется неравенство (3), где $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — любая система различных точек, удовлетворяющая (1) и $|a_k| = 1$ при $k = \overline{1, n}$, D — произвольное открытое множество такое, что $0, a_k \in D$ при $k = \overline{1, n}$, $r(D, 0) \leq \mu$, и удовлетворяющее условию неналегания (2); $a_k^{(0)}$ и $B_k^{(0)}$ при $k = \overline{0, n}$ — соответственно полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (4) и $\mu_0 := r(B_0^{(0)}, 0)$.

Доказательство теоремы. Обозначим $\sigma_0 = \max_k \sigma_k$

Рассмотрим сначала случай $\sigma_0 < 1/\sqrt{\gamma}$. Так как, множество D удовлетворяет условию неналегания, то в соответствии с работами [5, 6, 9 — 12], открытое множество D обладает обобщенной функцией Грина $g_D(z, a)$ при всех $a \in D$.

Далее будем использовать результаты работ [5, 6, 9 — 12]. Для достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$ образуем множества $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $\overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq t\}$, $E_k(t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_k| \leq t\}$, $k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим конденсатор $C(t, D, A_n) = \{E_0, \overline{U}_t, E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ с предписанными значениями $0, \sqrt{\gamma}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ раз}}$. Емкостью конденсатора

$C(t, D, A_n)$ называется величина (см. [8, 10])

$$\text{cap } C(t, D, A_n) = \inf \int \int [(G'_x)^2 + (G'_y)^2] dx dy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества E_0 , $G|_{\overline{U}_t} = \sqrt{\gamma}$, $G|_{E_k(t)} = 1$, $k = \overline{1, n}$. Модуль конденсатора $|C(t, D, A_n)|$ определяется выражением

$$|C(t, D, A_n)| = [\text{cap } C(t, D, A_n)]^{-1}.$$

Учитывая теорему 1 [11], находим асимптотику модуля конденсатора $C(t, D, A_n)$:

$$|C(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n + \gamma} \log \frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad (5)$$

где

$$M(D, A_n) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(n + \gamma)^2} \left[\gamma \log r(D, 0) + \sum_{k=1}^n \log r(D, a_k) + \sum_{k \neq p} g_D(a_p, a_k) + \sum_{k=1}^n 2\sqrt{\gamma} g_D(0, a_k) \right]. \quad (6)$$

Рассмотрим разделяющее преобразование конденсатора $C(t, D, A_n)$ относительно семейства углов $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$ и семейства функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, где $z_k(w) = (-1)^k i (e^{-i \arg a_k w})^{\frac{1}{\sigma_k}}$, $k = \overline{1, n}$.

При достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$ рассмотрим конденсаторы $C_k(t, D, A_n) = (E_0^{(k)}, \overline{U}_t^{(k)}, E_1^{(k)}, E_2^{(k)})$, где $E_0^{(k)} = z_k(E_0 \cap \overline{P}_k) \cup \{z_k(E_0 \cap \overline{P}_k)\}^*$, $U_t^{(k)} = z_k(\overline{U}_t \cap \overline{P}_k) \cup \{z_k(\overline{U}_t \cap \overline{P}_k)\}^*$, $E_1^{(k)} = z_k(E_k(t) \cap \overline{P}_k) \cup \{z_k(E_k(t) \cap \overline{P}_k)\}^*$, $E_2^{(k)} = z_k(E_{k+1}(t) \cap \overline{P}_k) \cup \{z_k(E_{k+1}(t) \cap \overline{P}_k)\}^*$, $k = \overline{1, n}$, $E_{n+1}(t) = E_1(t)$, $\{A\}^* = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : -\overline{w} \in A\}$.

Каждому конденсатору $C_k(t, D, A_n)$ сопоставим класс V_k всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0^{(k)}$, $G|_{\overline{U}_t^{(k)}} = \sqrt{\gamma}$, $G|_{E_p^{(k)}} = 1$, $k = \overline{1, n}$, $p = 1, 2$. При разделяющем преобразовании конденсатору $C(t, D, A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t, D, A_n)\}_{k=1}^n$, причем в силу результатов работ [6, 9 – 12] справедливо неравенство

$$\text{cap } C(t, D, A_n) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{cap } C_k(t, D, A_n),$$

откуда непосредственно получаем соотношение

$$|C(t, D, A_n)| \leq 2 \left(\sum_{l=1}^n |C_k(t, D, A_n)|^{-1} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Из определения функций $z_k(w)$ следует

$$\begin{aligned} |z_k(w) - z_k(a_m)| &\sim \frac{1}{\sigma_k} |a_m|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1} |w - a_m|, \quad w \rightarrow a_m, \\ k &= 1, 2, \dots, n, \quad m = k, k + 1; \\ |z_k(w)| &= |w|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad w \rightarrow 0, \quad w \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя соотношения (8), по аналогии с (5) и (6) убеждаемся в справедливости асимптотических равенств (см. [11])

$$|C_k(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2 + \gamma\sigma_k} \log \frac{1}{t} + M_k(D, A_n) + o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} M_k(D, A_n) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2 + \gamma\sigma_k)^2} \times \\ &\times \left[\sigma_k^2 \gamma \log r(D_0^{(k)}, 0) + \log \frac{r(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}) \cdot r(D_k^{(2)}, a_k^{(2)})}{\frac{1}{\sigma_k} |a_k|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1} \cdot \frac{1}{\sigma_k} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1}} \right], \quad (10) \\ z_k(a_k) &=: a_k^{(1)}, \quad z_k(a_{k+1}) =: a_k^{(2)}, \quad a_{n+1} = a_1, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

$D_0^{(k)}$ и $D_k^{(s)}$ — объединение связных компоненты множеств $z_k(D \cap \overline{P}_k)$, содержащих соответственно точки 0 и $a_k^{(s)}$, с их симметричным отражением относительно мнимой оси, $k = \overline{1, n}$, $s = 1, 2$.

Вычислим асимптотику правой части неравенства (7). Для этого согласно (9) запишем (при $t \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} &|C_k(t, D, A_n)|^{-1} = \\ &= 2\pi (2 + \gamma\sigma_k) \frac{1}{\log \frac{1}{t}} \left(1 + \frac{2\pi (2 + \gamma\sigma_k)}{\log \frac{1}{t}} M_k(D, A_n) + o\left(\frac{1}{\log \frac{1}{t}}\right) \right)^{-1} = \\ &= \frac{2\pi (2 + \gamma\sigma_k)}{\log \frac{1}{t}} - \left(\frac{2\pi (2 + \gamma\sigma_k)}{\log \frac{1}{t}} \right)^2 M_k(D, A_n) + o\left(\frac{1}{\log^2 \frac{1}{t}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^n |C_k(t, D, A_n)|^{-1} = \frac{2\pi \left(2n + \gamma \sum_{k=1}^n \sigma_k\right)}{\log \frac{1}{t}} - \left(\frac{2\pi}{\log \frac{1}{t}}\right)^2 \sum_{k=1}^n (2 + \gamma\sigma_k)^2 M_k(D, A_n) + o\left(\frac{1}{\log^2 \frac{1}{t}}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^n |C_k(t, D, A_n)|^{-1}\right)^{-1} = \frac{\log \frac{1}{t}}{4\pi(n + \gamma)} \times \\ & \times \left(1 - \frac{\pi}{(n + \gamma) \log \frac{1}{t}} \sum_{k=1}^n (2 + \gamma\sigma_k)^2 M_k(D, A_n) + o\left(\frac{1}{\log \frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} = \\ & = \frac{1}{4\pi(n + \gamma)} \log \frac{1}{t} + \frac{1}{4(n + \gamma)^2} \sum_{k=1}^n (2 + \gamma\sigma_k)^2 M_k(D, A_n) + o(1). \quad (11) \end{aligned}$$

Из соотношений (5), (7), (11) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n + \gamma} \log \frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1) \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi(n + \gamma)} \log \frac{1}{t} + \frac{1}{2(n + \gamma)^2} \sum_{k=1}^n (2 + \gamma\sigma_k)^2 M_k(D, A_n) + o(1). \end{aligned}$$

Это означает, что

$$M(D, A_n) \leq \frac{1}{2(n + \gamma)^2} \sum_{k=1}^n (2 + \gamma\sigma_k)^2 M_k(D, A_n). \quad (12)$$

С учетом (6), (10) из (12) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(n + \gamma)^2} \log \left[r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k) \right] \leq \\ & \leq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(n + \gamma)^2} \log \left[\prod_{k=1}^n r^{\gamma\sigma_k^2} \left(D_0^{(k)}, 0 \right) \frac{r \left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)} \right) r \left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)} \right)}{\frac{1}{\sigma_k} |a_k|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1} \frac{1}{\sigma_k} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\sigma_k} - 1}} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k) \leq \prod_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{|a_k|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}} \times \\ \times \prod_{k=1}^n \left\{ r(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}) r(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}) r^{\gamma\sigma_k^2}(D_0^{(k)}, 0) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 5.2.1 работы [5], получаем

$$r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k) \leq \\ \leq \eta^{(\gamma)}(A_n) \prod_{k=1}^n \left\{ \sigma_k^2 r^{\gamma\sigma_k^2}(B_0, 0) r(B_1, -i) r(B_2, i) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где B_k при $k = 0, 1, 2$ — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(n^2 - \gamma)w^2 - \gamma}{w^2(w^2 + 1)^2} dw^2.$$

С учетом результатов работы [9] последнее неравенство перепишем в виде

$$r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k) \leq \frac{\eta^{(\gamma)}(A_n)}{\sqrt{\gamma^n}} \prod_{k=1}^n (\psi(\sigma_k \sqrt{\gamma}))^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

причем знак равенства достигается на круговых областях квадратичного дифференциала (4), где

$$\psi(\sigma_k \sqrt{\gamma}) = \frac{2^{\gamma\sigma_k^2+6} (\sigma_k \sqrt{\gamma})^{\gamma\sigma_k^2+2}}{|\sigma_k \sqrt{\gamma} - 2|^{\frac{1}{2}(\sigma_k \sqrt{\gamma}-2)^2} (\sigma_k \sqrt{\gamma} + 2)^{\frac{1}{2}(\sigma_k \sqrt{\gamma}+2)^2}}.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 5.2.3 [5], используя выпуклость функции $\log \psi(\sigma_k \sqrt{\gamma})$ на промежутке $(0; 1)$, из (13) получаем неравенство

$$r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k) \leq \frac{\eta^{(\gamma)}(A_n)}{\sqrt{\gamma^n}} \left(\psi\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right) \right)^{\frac{n}{2}} \quad (14)$$

для $\sigma_k < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Из (14) следует справедливость теоремы в случае $\sigma_0 < 1/\sqrt{\gamma}$.

Рассмотрим теперь случай $\sigma_0 \geq 1/\sqrt{\gamma}$. В силу теоремы 5.1.2 [5], а также условий теоремы, справедлива следующая цепочка неравенств

$$r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k) \leq 2^n \mu^\gamma \beta \prod_{k=1}^n \sigma_k \leq 2^n \mu^\gamma \beta \sigma_0 \left(\frac{2 - \sigma_0}{n - 1} \right)^{n-1},$$

причем $2 - \sigma_0 \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, $\sigma_0 \geq \frac{2}{n}$. Сравним эту величину с величиной

$$J_n^0 = r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}) = \frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}} \gamma^{\frac{\gamma}{n}} n^n}{|n^2 - \gamma|^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left| \frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right|^{2\sqrt{\gamma}},$$

экстремальной в случае $\sigma_0 < 1/\sqrt{\gamma}$. Для этого рассмотрим оценку

$$\begin{aligned} \frac{r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k)}{r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})} &\leq \frac{2^n \mu^\gamma \beta \sigma_0 (2 - \sigma_0)^{n-1} (n - 1)^{-(n-1)}}{\frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}} \gamma^{\frac{\gamma}{n}} n^n}{|n^2 - \gamma|^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left| \frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right|^{2\sqrt{\gamma}}} \leq \\ &\leq \mu^\gamma \beta \frac{2^n (2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}})^{n-2} |n^2 - \gamma|^{n+\frac{\gamma}{n}}}{4^{n+\frac{\gamma}{n}} \gamma^{\frac{\gamma}{n}} (n - 1)^{(n-1)} n^n \left| \frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right|^{2\sqrt{\gamma}}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующий предел:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}})^{n-2} |n^2 - \gamma|^{n+\frac{\gamma}{n}}}{4^{n+\frac{\gamma}{n}} \gamma^{\frac{\gamma}{n}} (n - 1)^{(n-1)} n^n \left| \frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right|^{2\sqrt{\gamma}}} = \\ &= \frac{1}{(2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}})^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|n^2 - \gamma|^{\frac{\gamma}{n}}}{4^{\frac{\gamma}{n}} \gamma^{\frac{\gamma}{n}} \left| \frac{n - \sqrt{\gamma}}{n + \sqrt{\gamma}} \right|^{2\sqrt{\gamma}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}})^n}{2^n} \frac{|n^2 - \gamma|^n}{(n - 1)^{n-1} n^n} \right] = \\ &= \frac{\gamma}{(2\sqrt{\gamma} - 1)^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \right)^n \frac{|n^2 - \gamma|^n (n - 1)}{(n^2 - n)^n} \right] = \\ &= \frac{\gamma}{(2\sqrt{\gamma} - 1)^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \right)^n (n - 1) \right] \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|n^2 - \gamma|^n}{n^2 - n} \right] = 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$J_n(\gamma) = \frac{r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k)}{r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})}.$$

Легко видеть, что если $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $n \rightarrow \infty$, то $J_n(\gamma) \rightarrow 0$. Таким образом, существует такое $n_0(\gamma, \beta, \mu)$, что $J_\gamma(n) < 1$ при всех $n \geq n_0(\gamma, \beta, \mu)$ и при всех σ_0 таких, что $2 - \sigma_0 \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Это означает, что при $n \geq n_0(\gamma, \beta, \mu)$ и $2 > \sigma_0 \geq 1/\sqrt{\gamma}$ для любой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяющей (1), произвольного открытого множества D , удовлетворяющего условию неналегания (2) относительно системы точек A_n , $0, a_k \in D$, выполняется строгое неравенство

$$r^\gamma(D, 0) \prod_{k=1}^n r(D, a_k) < r^\gamma(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}).$$

Вопрос достижимости знака равенства рассматривается стандартным путем. Теорема доказана.

Авторы признательны профессору А. К. Бахтину за постановку задачи и ряд ценных указаний.

Список литературы

- [1] Лаврентьев М. А. *К теории конформных отображений*// Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159–245.
- [2] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. — Москва: Наука, 1966. — 628 с.
- [3] Бахтина Г. П. *Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегających областях*: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.
- [4] Кузьмина Г. В. *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 253–275.
- [5] Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б. *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — 308 с.

- [6] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций*: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Владивосток, 1988. — 193 с.
- [7] Дженкинс Дж. А. *Однолистные функции и конформные отображения*. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.
- [8] Хейман В. К. *Многолистные функции*. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. — 180 с.
- [9] Дубинин В. Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48–66.
- [10] Дубинин В. Н. *Емкости конденсаторов в геометрической теории функций*: Учебн. пособие. — Владивосток: Изд. Дальневосточ. ун-та, 2003. — 116 с.
- [11] Дубинин В. Н. *Асимптотика модуля выражающегося конденсатора и некоторые ее применения* // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1997. — **237**. — С. 56–73.
- [12] Дубинин В. Н. *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1. — С. 3–76.
- [13] Бахтин О. К. *Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин* // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 5. — С. 596–610.
- [14] Емельянов Е. Г. *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей* // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2002. — **286**. — С. 103–114.
- [15] Бахтин А. К., Таргонский А. Л. *Обобщенные (n, d) -лучевые системы точек и неравенства для неналегающих областей и открытых множеств* // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 7. — С. 867–879.