

О неустойчивости вращающегося упругопластического ступенчатого кольцевого диска

Д.М. Ли́ла

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев;
dim_l@ukr.net*

Utilising the small parameter method, a scheme for computing a possible stability loss of a rotating circular annular step drive is proposed. A characteristic, first-order approximation equation with respect to critical radius of plastic zone is derived. Values of the critical angular rotational velocity versus different parameters of the drive are numerically found.

Запропоновано спосіб розрахунку методом малого параметра можливої втрати стійкості ступінчастого кільцевого диска, що обертається. Одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання за різних параметрів диска.

1. Введение

Вращающиеся диски представляют собой одну из наиболее важных частей турбин. Они должны передавать на машинный вал крутящий момент, воспринимаемый внешней окружностью (лопатки, насаженные по контуру, зубчатый венец и пр.). Решающими в вопросе о прочности диска являются весьма существенные радиальное и тангенциальное напряжения, возникающие в быстровращающихся дисках от центробежной силы [7].

При наличии объемных сил во вращающемся с постоянной угловой скоростью однородном диске постоянной толщины имеет место обобщенное плоское напряженное состояние. Если пренебречь

возможными колебаниями, то в этом случае для расчета можно воспользоваться двумерным приближением, рассматривая вместо действительных напряжений их средние значения по толщине диска. Практически это оказывается вполне приемлемым. Для дисков, незначительно изменяющихся по толщине, допустимо раздельное рассмотрение нескольких напряженных состояний. Это предположение не является строгим, но, как подтверждает опыт, оно позволяет получить весьма хорошие приближения для турбинных дисков [2].

В данной работе излагается основанный на методе возмущений [3–6] способ определения критической скорости вращения однородного изотропного ступенчатого кругового кольцевого диска, нагруженного по контуру в срединной плоскости, при произвольном коэффициенте Пуассона. Вид возмущения внешней контурной окружности диска, потерявшего устойчивость, предполагает самоуравновешивающуюся форму.

Подробный обзор и анализ методов изучения неустойчивости вследствие исчерпания несущей способности быстровращающихся упругопластических дисков [11] изложены в работах [12, 13]. Одни из первых аналитических результатов по определению критической угловой скорости вращения круглых дисков из несжимаемого материала и изучению потери несущей способности сплошных дисков приведены [4–6]. Некоторое развитие и перспективность указанного направления исследований подтверждают публикации [9–11].

2. Постановка задачи

Рассмотрим потерю устойчивости вращающегося ступенчатого кольцевого диска вследствие принятия им в плоскости вращения формы, отличной от круговой. При этом диск будем считать близким к круговому. Уравнение внешней границы в его срединной плоскости, являющейся плоскостью симметрии диска, с точностью до бесконечно малых первого порядка представим в виде [4, 5]

$$r = b + d \cos n\theta, \quad n \geq 2, \quad d = \text{const},$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \quad (1)$$

где b — внешний радиус невозмущенного диска (радиус контурной окружности), $\rho = r/b$ — безразмерный текущий радиус, δ — малый

параметр, $n \in \mathbb{N}$, θ — полярный угол (см. рисунок). Внутренний радиус диска обозначим через a , предел текучести материала — σ_s , модуль упругости — E , плотность — γ , коэффициент Пуассона — ν , угловую скорость вращения — ω , текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска — r_0 .

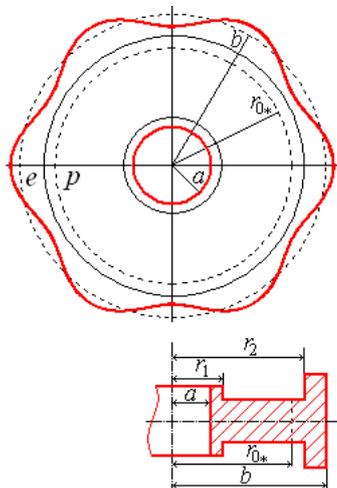


Рис . Потеря устойчивости диска по самоуравновешивающейся форме.

Предположим, что максимальная из толщин $2h_1, 2h_2, \dots, 2h_{n_0}$ кольцевых зон диска радиусов $r_1, r_2, \dots, r_{n_0} = b$ (для случая, изображенного на рисунке, $n_0 = 3$) мала по сравнению с остальными его размерами. На основании этого предположения наличие сосредоточенных на внутреннем и внешнем контурах диска нагрузок будем считать результатом определенных усилий, действующих на диск в его срединной плоскости. Внутреннее и внешнее радиальные давления примем соответственно в виде $p_i = p_{i0} + \tilde{p}_i$ и $p_e = p_{e0} + \tilde{p}_e$. Первые слагаемые p_{i0} и p_{e0} здесь имеют постоянное статическое давление, а вторые слагаемые \tilde{p}_i и \tilde{p}_e , равные нулю при $\omega = 0$, отображают изменение контурных нагрузок в динамике. Такая постановка соответствует насадке с натяжением на вал исследуемого диска, запрессованного с обжатием в отдельно изготовленный внешний кольцевой диск.

Для описываемой зависимостью (1) формы границы диска требуется получить в первом приближении характеристическое уравнение для критического радиуса пластической зоны r_{0*} и определить соответствующее значение критической угловой скорости вращения ω_* . Для этого необходимо установить (и разрешить относительно r_0) условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений [6]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \frac{d\sigma_{rr}^0}{dr}u &= 0 \quad \text{при } r = b, \\ \sigma_{r\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}^0 - \sigma_{rr}^0}{b} \frac{du}{d\theta} &= 0 \quad \text{при } r = b, \\ \sigma_{rr} &= 0 \quad \text{при } r = r_0, \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \quad \text{при } r = r_0\end{aligned}$$

относительно произвольных постоянных, входящих в выражения для компонент напряжений и перемещений σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ и u , определяющих напряженно-деформированное состояние неподвижной упругой ступенчатой круговой кольцевой пластины, нагруженной в своей срединной плоскости системой самоуравновешенных контурных нагрузок:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \bar{a} \cos n\theta, \quad \sigma_{r\theta} = \bar{b} \sin n\theta \quad \text{при } r = b, \\ \sigma_{rr} &= \underline{a} \cos n\theta, \quad \sigma_{r\theta} = \underline{b} \sin n\theta \quad \text{при } r = r_0.\end{aligned}$$

Приведенным граничным и контурным условиям должны удовлетворять решения уравнений равновесия плоской задачи:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= 0\end{aligned}$$

и уравнений связи между напряжениями и перемещениями:

$$\begin{aligned}E \frac{\partial u}{\partial r} &= \sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}, \\ E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r} \right) &= \sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr},\end{aligned}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = \sigma_{r\theta}.$$

Проверка условий возможна после определения из уравнения квазистатического равновесия

$$\frac{r}{y} \frac{d}{dr} (\sigma_{rr} y) + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + \gamma \omega^2 r^2 = 0$$

и уравнений связи

$$E \frac{du}{dr} = \sigma_{rr} - \nu \sigma_{\theta\theta}, \quad E \frac{u}{r} = \sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}$$

в упругой зоне или условия текучести $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$ в пластической зоне невозмущенного напряженного состояния (с верхним индексом 0) вращающегося диска произвольного (ступенчатого) профиля $y(r)$. При этом предполагается, что материал диска не обладает упрочнением.

3. Невозмущенное упругопластическое состояние

Введем в рассмотрение внутреннее давление p_i . Для этого проинтегрируем уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma}{b^2} r, \quad \sigma = \gamma b^2 \omega^2, \quad (2)$$

при $r \in [a, r_0]$, т.е. в пластической области. Основываясь на условии текучести из теории наибольшего касательного напряжения и учитывая, что по условию задачи $\sigma_{rr}(a) = -p_i$, имеем

$$\sigma_{rr} = \sigma_s - \frac{\sigma}{3b^2} r^2 + \frac{\left(-p_i - \sigma_s + \frac{\sigma a^2}{3b^2}\right) a}{r}.$$

Вместе с тем

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s. \quad (3)$$

Если упругопластическая граница находится не в первой кольцевой зоне, т.е. $r_{j-1} \leq r_0 < r_j$, $j = \overline{2, n_0}$, то дополнительно следует учесть непрерывность радиального усилия $h\sigma_{rr}$ в местах скачкообразного

изменения толщины диска. Тогда в общем случае с использованием безразмерных величин $\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{rr}/\sigma_s$, $\beta = a/b$, $\rho_{j^*} = r_{j^*}/b$, $j^* = \overline{1, j-1}$, получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} -\frac{p_i}{\sigma_s} &= 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\beta^2 + \frac{C_1}{\beta}, \\ h_1 \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_1^2 + \frac{C_1}{\rho_1}\right) &= h_2 \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_1^2 + \frac{C_2}{\rho_1}\right), \\ h_2 \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_2^2 + \frac{C_2}{\rho_2}\right) &= h_3 \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_2^2 + \frac{C_3}{\rho_2}\right), \\ &\dots \\ h_{j-1} \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_{j-1}^2 + \frac{C_{j-1}}{\rho_{j-1}}\right) &= h_j \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_{j-1}^2 + \frac{C_j}{\rho_{j-1}}\right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -\frac{p_i}{\sigma_s} &= 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\beta^2 + \frac{C_1}{\beta}, \\ \frac{h_1}{\Pi_1} \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_1^2\right) + \frac{h_1}{\Pi} C_1 &= \frac{h_2}{\Pi_1} \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_1^2\right) + \frac{h_2}{\Pi} C_2, \\ \frac{h_2}{\Pi_2} \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_2^2\right) + \frac{h_2}{\Pi} C_2 &= \frac{h_3}{\Pi_2} \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_2^2\right) + \frac{h_3}{\Pi} C_3, \\ &\dots \\ \frac{h_{j-1}}{\Pi_{j-1}} \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_{j-1}^2\right) + \frac{h_{j-1}}{\Pi} C_{j-1} &= \frac{h_j}{\Pi_{j-1}} \left(1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho_{j-1}^2\right) + \frac{h_j}{\Pi} C_j, \end{aligned}$$

где $\Pi = \prod_{k=1}^{j-1} \rho_k$, $\Pi_{j^*} = \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq j^*)}}^{j-1} \rho_k$. Исключая из этих равенств постоянные C_1, \dots, C_{j-1} , приходим к соотношению

$$C_j = \delta_1 \frac{p_i}{\sigma_s} + \delta_2 \frac{\sigma}{\sigma_s} + \delta_3, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{h_1}{h_j}\beta, \quad \delta_2 = -\frac{1}{3h_j} \sum_{k=1}^j (h_{k-1} - h_k)\rho_{k-1}^3, \\ \delta_3 &= \frac{1}{h_j} \sum_{k=1}^j (h_{k-1} - h_k)\rho_{k-1}, \quad h_0 := 0, \quad \rho_0 := \beta. \end{aligned}$$

Вычисляя последовательно C_{j-1}, \dots, C_1 , получаем радиальное напряжение невозмущенного диска во всей пластической области:

$$\sigma_{\rho\rho}^{0p} = \begin{cases} 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho^2 + \frac{C_1}{\rho}, & \rho \in [\beta, \rho_1), \\ 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho^2 + \frac{C_2}{\rho}, & \rho \in (\rho_1, \rho_2), \\ \dots \\ 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\rho^2 + \frac{C_j}{\rho}, & \rho \in (\rho_{j-1}, \beta_0), \end{cases} \quad (5)$$

где $\beta_0 = r_0/b$. Таким образом, с учетом выражения (4) имеем

$$\sigma_{\rho\rho}^{0p}(\beta_0 - 0) = 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s}\beta_0^2 + \frac{C_j}{\beta_0}. \quad (6)$$

В упругой области диска постоянной толщины компоненты напряжения можно искать в виде [8]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= k_e \left(C + \frac{1}{k_e} \left[p_e + \frac{\sigma(\nu+3)}{8} \right] - C \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma(\nu+3)}{8} \frac{r^2}{b^2}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= k_e \left(C + \frac{1}{k_e} \left[p_e + \frac{\sigma(\nu+3)}{8} \right] + C \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma(3\nu+1)}{8} \frac{r^2}{b^2}, \end{aligned}$$

если учесть, что $\sigma_{rr}(b) = p_e$. При этом из условия текучести (постоянство интенсивности напряжений) следует, что $\sqrt{3}k_e = \sigma_s$, а постоянная C подлежит определению. Радиальное перемещение u связано с напряжениями σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ соотношением [2] $E \frac{u}{r} = \sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}$, из которого условие сохранения связи между соседними частичными дисками ступенчатого диска получаем в виде $\Delta\sigma_{\theta\theta} = \nu\Delta\sigma_{rr}$, где $\Delta(\cdot)$ — скачок напряжения. Учитывая это и исходя из непрерывности радиального усилия, а также соотношения (6), формулируем задачу: определить посредством сопряжения решений постоянную интегрирования и величину σ/σ_s как функции радиуса пластической зоны β_0 .

Заменой переменных [2]

$$\begin{aligned} s &= \sigma_{\rho\rho} + \alpha'\rho^2, & t &= \sigma_{\theta\theta} + \beta'\rho^2, & x &= 1/\rho^2, \\ \alpha' &= \frac{\sigma(\nu+3)}{8\sigma_s}, & \beta' &= \frac{\sigma(3\nu+1)}{8\sigma_s}, \end{aligned} \quad (7)$$

обезразмеренное основное дифференциальное уравнение (2) преобразуем в начальную задачу:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{s-t}{2x}, \quad s(1) = \frac{p_e}{\sigma_s} + \alpha', \quad (8)$$

с общим решением (для диска постоянной толщины)

$$s = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x, \quad t = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 x. \quad (9)$$

Приведем правила сопряжения функций (9) на произвольной окружности $\rho = 1/\sqrt{x}$, разделяющей соседние кольцевые секции (им припишем соответственно символы $-$ и $+$) в упругой зоне ступенчатого диска. Поскольку

$$h^- \sigma_{\rho\rho}^- = h^+ \sigma_{\rho\rho}^+ = h^+ (\sigma_{\rho\rho}^- + \Delta\sigma_{\rho\rho}) = h^+ (\sigma_{\rho\rho}^- + \Delta s),$$

то (сравнить с [2])

$$\begin{aligned} \Delta s &= -\frac{h^+ - h^-}{h^+} \left(s^- - \frac{\alpha'}{x} \right), \\ s^+ &= \frac{h^-}{h^+} s^- + \frac{h^+ - h^-}{h^+} \frac{\alpha'}{x}. \end{aligned} \quad (10)$$

Вместе с тем

$$t^+ = t^- + \nu \Delta s = t^- - \nu \frac{h^+ - h^-}{h^+} s^- + \nu \frac{h^+ - h^-}{h^+} \frac{\alpha'}{x}. \quad (11)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{h_k}{h_{k+1}}, \quad b_k := \frac{h_{k+1} - h_k}{h_{k+1}} \frac{\alpha'}{x_k}, \quad c_k := \frac{h_{k+1} - h_k}{h_{k+1}}, \quad d_k := \frac{x_k + x_{k+1}}{2x_k}, \\ f_k &:= \frac{x_{k+1} - x_k}{2x_k}, \quad x_{k^*} = \frac{1}{\rho_{k^*}^2}, \quad k^* = k, k+1, \quad k = j, \dots, n_0 - 1. \end{aligned}$$

Предположим, что известны левосторонние (в направлении возрастания радиуса ρ) пределы s_j^- и t_j^- функций (9) на окружности $\rho = \rho_j$, т.е. на первой после упругопластической границы окружности, разделяющей ступени диска разной толщины. Тогда согласно правилам сопряжения (10) и (11) правосторонние пределы получим в виде

$$s_j^+ = a_j s_j^- + b_j, \quad t_j^+ = -\nu c_j s_j^- + t_j^- + \nu b_j.$$

Это дает возможность определить вначале постоянные в формулах (9), а затем и s_{j+1}^- , t_{j+1}^- :

$$\begin{aligned} s_{j+1}^- &= d_j s_j^+ - f_j t_j^+ = A_{j+1} s_j^- - B_{j+1} t_j^- + C_{j+1}, \\ t_{j+1}^- &= -f_j s_j^+ + d_j t_j^+ = A_{j+1}^* s_j^- - B_{j+1}^* t_j^- + C_{j+1}^*, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_{j+1} &= d_j a_j + \nu f_j c_j, & B_{j+1} &= f_j, & C_{j+1} &= d_j b_j - \nu f_j b_j, \\ A_{j+1}^* &= -f_j a_j - \nu d_j c_j, & B_{j+1}^* &= -d_j, & C_{j+1}^* &= -f_j b_j + \nu d_j b_j. \end{aligned}$$

Зная левосторонние пределы рассматриваемых функций в точке ρ_{j+1} и повторяя предыдущие рассуждения, теперь нетрудно получить и соответствующие правосторонние пределы:

$$\begin{aligned} s_{j+1}^+ &= a_{j+1} s_{j+1}^- + b_{j+1} = \\ &= a_{j+1}(d_j a_j + \nu f_j c_j) s_j^- - a_{j+1} f_j t_j^- + a_{j+1}(d_j b_j - \nu f_j b_j) + b_{j+1}, \\ t_{j+1}^+ &= -\nu c_{j+1} s_{j+1}^- + t_{j+1}^- + \nu b_{j+1} = \\ &= [-\nu c_{j+1}(d_j a_j + \nu f_j c_j) + (-f_j a_j - \nu d_j c_j)] s_j^- + \\ &+ [\nu c_{j+1} f_j + d_j] t_j^- - \nu c_{j+1}(d_j b_j - \nu f_j b_j) + (-f_j b_j + \nu d_j b_j) + \nu b_{j+1}. \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} s_{j+2}^- &= A_{j+2} s_j^- - B_{j+2} t_j^- + C_{j+2}, \\ t_{j+2}^- &= A_{j+2}^* s_j^- - B_{j+2}^* t_j^- + C_{j+2}^*, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} A_{j+2} &= d_{j+1} a_{j+1} A_{j+1} - f_{j+1}(-\nu c_{j+1} A_{j+1} + A_{j+1}^*), \\ B_{j+2} &= d_{j+1} a_{j+1} B_{j+1} - f_{j+1}(-\nu c_{j+1} B_{j+1} + B_{j+1}^*), \\ C_{j+2} &= d_{j+1}(a_{j+1} C_{j+1} + b_{j+1}) - f_{j+1}(-\nu c_{j+1} C_{j+1} + C_{j+1}^* + \nu b_{j+1}), \\ A_{j+2}^* &= -f_{j+1} a_{j+1} A_{j+1} + d_{j+1}(-\nu c_{j+1} A_{j+1} + A_{j+1}^*), \\ B_{j+2}^* &= -f_{j+1} a_{j+1} B_{j+1} + d_{j+1}(-\nu c_{j+1} B_{j+1} + B_{j+1}^*), \\ C_{j+2}^* &= -f_{j+1}(a_{j+1} C_{j+1} + b_{j+1}) + d_{j+1}(-\nu c_{j+1} C_{j+1} + C_{j+1}^* + \nu b_{j+1}). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} s_{j+3}^- &= A_{j+3} s_j^- - B_{j+3} t_j^- + C_{j+3}, \\ t_{j+3}^- &= A_{j+3}^* s_j^- - B_{j+3}^* t_j^- + C_{j+3}^*, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} A_{j+3} &= d_{j+2} a_{j+2} A_{j+2} - f_{j+2}(-\nu c_{j+2} A_{j+2} + A_{j+2}^*), \\ B_{j+3} &= d_{j+2} a_{j+2} B_{j+2} - f_{j+2}(-\nu c_{j+2} B_{j+2} + B_{j+2}^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{j+3} &= d_{j+2}(a_{j+2}C_{j+2} + b_{j+2}) - f_{j+2}(-\nu c_{j+2}C_{j+2} + C_{j+2}^* + \nu b_{j+2}), \\
A_{j+3}^* &= -f_{j+2}a_{j+2}A_{j+2} + d_{j+2}(-\nu c_{j+2}A_{j+2} + A_{j+2}^*), \\
B_{j+3}^* &= -f_{j+2}a_{j+2}B_{j+2} + d_{j+2}(-\nu c_{j+2}B_{j+2} + B_{j+2}^*), \\
C_{j+3}^* &= -f_{j+2}(a_{j+2}C_{j+2} + b_{j+2}) + d_{j+2}(-\nu c_{j+2}C_{j+2} + C_{j+2}^* + \nu b_{j+2}).
\end{aligned}$$

Применяя метод математической индукции, убеждаемся в справедливости следующей из соотношений (12)–(14) закономерности построения общего члена отрезка последовательности пар элементов $\{s_k^-, t_k^-\}_{k=j}^{n_0}$. При $k = n_0$, в частности, имеем

$$\begin{aligned}
s_{n_0}^- &= s_{n_0} = A_{n_0} s_j^- - B_{n_0} t_j^- + C_{n_0}, \\
t_{n_0}^- &= t_{n_0} = A_{n_0}^* s_j^- - B_{n_0}^* t_j^- + C_{n_0}^*,
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{n_0} &= d_{n_0-1}a_{n_0-1}A_{n_0-1} - f_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1}A_{n_0-1} + A_{n_0-1}^*), \\
B_{n_0} &= d_{n_0-1}a_{n_0-1}B_{n_0-1} - f_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1}B_{n_0-1} + B_{n_0-1}^*), \\
C_{n_0} &= d_{n_0-1}(a_{n_0-1}C_{n_0-1} + b_{n_0-1}) - \\
&\quad - f_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1}C_{n_0-1} + C_{n_0-1}^* + \nu b_{n_0-1}), \\
A_{n_0}^* &= -f_{n_0-1}a_{n_0-1}A_{n_0-1} + d_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1}A_{n_0-1} + A_{n_0-1}^*), \\
B_{n_0}^* &= -f_{n_0-1}a_{n_0-1}B_{n_0-1} + d_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1}B_{n_0-1} + B_{n_0-1}^*), \\
C_{n_0}^* &= -f_{n_0-1}(a_{n_0-1}C_{n_0-1} + b_{n_0-1}) + \\
&\quad + d_{n_0-1}(-\nu c_{n_0-1}C_{n_0-1} + C_{n_0-1}^* + \nu b_{n_0-1}).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$b_k = \alpha' g_k, \quad g_k := \frac{h_{k+1} - h_k}{h_{k+1}} \frac{1}{x_k},$$

в соотношениях (12)–(15)

$$C_k = \alpha' D_k, \quad k = \overline{j+1, n_0}, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
D_{j+1} &= g_j(d_j - \nu f_j), \\
D_{j^*} &= d_{j^*-1}(a_{j^*-1}D_{j^*-1} + g_{j^*-1}) - f_{j^*-1}(-\nu c_{j^*-1}D_{j^*-1} + D_{j^*-1}^* + \nu g_{j^*-1}), \\
j^* &= \overline{j+2, n_0}.
\end{aligned}$$

Далее отдельно рассмотрим интервал (β_0, ρ_j) , чтобы получить предполагаемые выше известными величины s_j^- и t_j^- . Для этого, определив из системы уравнений

$$s_0 = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x_0, \quad t_0 = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 x_0$$

($x_0 = 1/\beta_0^2$) постоянные \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 , найдем

$$s_j^- = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x_j = d_0 s_0 - f_0 t_0, \quad t_j^- = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 x_j = -f_0 s_0 + d_0 t_0,$$

где $d_0 = \frac{x_0 + x_j}{2x_0}$, $f_0 = \frac{x_j - x_0}{2x_0}$. Используя непрерывность компонент напряжения при переходе через упругопластическую границу, на основании соотношений (4) и (6) приходим к заключению, что

$$s_0 = 1 - \frac{\sigma}{3\sigma_s} \beta_0^2 + \beta_0^{-1} \left(\delta_1 \frac{p_i}{\sigma_s} + \delta_2 \frac{\sigma}{\sigma_s} + \delta_3 \right) + \frac{\alpha'}{x_0},$$

$$t_0 = 1 + \frac{\beta'}{x_0} = 1 + \frac{3\nu + 1}{\nu + 3} \frac{\alpha'}{x_0}$$

и

$$s_j^- = Q\alpha' + R \frac{p_i}{\sigma_s} + S, \quad (17)$$

$$t_j^- = Q^*\alpha' + R^* \frac{p_i}{\sigma_s} + S^*, \quad (18)$$

где

$$Q = d_0 \frac{(3\nu + 1)\beta_0^2 + 24\delta_2\beta_0^{-1}}{3(\nu + 3)} - f_0 \frac{(3\nu + 1)\beta_0^2}{\nu + 3},$$

$$R = d_0\delta_1\beta_0^{-1}, \quad S = d_0\delta_3\beta_0^{-1} + 1,$$

$$Q^* = -f_0 \frac{(3\nu + 1)\beta_0^2 + 24\delta_2\beta_0^{-1}}{3(\nu + 3)} + d_0 \frac{(3\nu + 1)\beta_0^2}{\nu + 3},$$

$$R^* = -f_0\delta_1\beta_0^{-1}, \quad S^* = -f_0\delta_3\beta_0^{-1} + 1.$$

Согласно (8) $s_{n_0} = \frac{p_e}{\sigma_s} + \alpha'$, поэтому, подставив в первое из равенств (15) это выражение и выражения (17), (18), получим уравнение относительно α' , из которого находим

$$\frac{\sigma}{\sigma_s} = \frac{\omega^2}{q^2} = \frac{8}{\nu + 3} \frac{\frac{p_e}{\sigma_s} - (RA_{n_0} - R^*B_{n_0}) \frac{p_i}{\sigma_s} - (SA_{n_0} - S^*B_{n_0})}{QA_{n_0} - Q^*B_{n_0} + D_{n_0} - 1}, \quad (19)$$

где $q = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}$. Напряженное состояние в упругой зоне

$$\sigma_{\rho\rho}^{0e} = \begin{cases} \tilde{C}_{1,j} + \tilde{C}_{2,j}\rho^{-2} - \alpha'\rho^2, & \rho \in (\beta_0, \rho_j), \\ \tilde{C}_{1,j+1} + \tilde{C}_{2,j+1}\rho^{-2} - \alpha'\rho^2, & \rho \in (\rho_j, \rho_{j+1}), \\ \dots \\ \tilde{C}_{1,n_0} + \tilde{C}_{2,n_0}\rho^{-2} - \alpha'\rho^2, & \rho \in (\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0}], \end{cases} \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{0e} = \begin{cases} \tilde{C}_{1,j} - \tilde{C}_{2,j}\rho^{-2} - \beta'\rho^2, & \rho \in (\beta_0, \rho_j), \\ \tilde{C}_{1,j+1} - \tilde{C}_{2,j+1}\rho^{-2} - \beta'\rho^2, & \rho \in (\rho_j, \rho_{j+1}), \\ \dots \\ \tilde{C}_{1,n_0} - \tilde{C}_{2,n_0}\rho^{-2} - \beta'\rho^2, & \rho \in (\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0}] \end{cases} \quad (21)$$

становится известным после определения $2(n_0 - j + 1)$ постоянных $\tilde{C}_{1,j}, \tilde{C}_{2,j}, \dots, \tilde{C}_{1,n_0}, \tilde{C}_{2,n_0}$ из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1,j} + \tilde{C}_{2,j}x_j &= s_j^-, \\ \tilde{C}_{1,j} - \tilde{C}_{2,j}x_j &= t_j^-, \\ \tilde{C}_{1,j+1} + \tilde{C}_{2,j+1}x_{j+1} &= s_{j+1}^-, \\ \tilde{C}_{1,j+1} - \tilde{C}_{2,j+1}x_{j+1} &= t_{j+1}^-, \\ &\dots \\ \tilde{C}_{1,n_0} + \tilde{C}_{2,n_0} &= s_{n_0}, \\ \tilde{C}_{1,n_0} - \tilde{C}_{2,n_0} &= t_{n_0}. \end{aligned}$$

Зависимости (20), (21), а также (3) и (5) задают нулевое приближение к решению задачи о пластическом равновесии, которое определяет положение упругопластической границы.

4. Возмущенное состояние диска

Согласно принципу наложения [1] отнесенные к σ_s возмущения первого порядка малости $\sigma_{\rho\rho}^{1e}, \sigma_{\theta\theta}^{1e}, \sigma_{\rho\theta}^{1e}$ компонент напряжения и отнесенные к b возмущения радиального u^{1e} и тангенциального v^{1e} смещений в первом приближении для плоского кольцевого диска (диска постоянной толщины) $\beta_0 \leq \rho \leq 1$ имеют в общем случае такой вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{1e} &= [a_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + a_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + a_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + a_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \cos n\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{1e} &= [b_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + b_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + b_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + b_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \cos n\theta, \end{aligned}$$

$$\sigma'_{\rho\theta} = [c_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + c_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + c_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + c_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \sin n\theta, \quad (22)$$

$$u^e = \frac{\sigma_s}{E} [d_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + d_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + d_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + d_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \cos n\theta,$$

$$v^e = \frac{\sigma_s}{E} [e_I(\beta_0, \rho)\bar{a} + e_{II}(\beta_0, \rho)\underline{a} + e_{III}(\beta_0, \rho)\bar{b} + e_{IV}(\beta_0, \rho)\underline{b}] \sin n\theta.$$

Здесь известные рациональные функции

$$\begin{aligned} a_{(\cdot)}(\beta_0, \rho) &= -(n-1)c'_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{n-2} - (n+1)c''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n-2} - \\ &\quad - (n+1)(n-2)c'''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^n - (n-1)(n+2)c''''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n}, \\ b_{(\cdot)}(\beta_0, \rho) &= (n-1)c'_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{n-2} + (n+1)c''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n-2} + \\ &\quad + (n+1)(n+2)c'''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^n + (n-1)(n-2)c''''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n}, \\ c_{(\cdot)}(\beta_0, \rho) &= (n-1)c'_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{n-2} - (n+1)c''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n-2} + \\ &\quad + n(n+1)c'''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^n - n(n-1)c''''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n}, \\ d_{(\cdot)}(\beta_0, \rho) &= -(1+\nu)c'_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{n-1} + (1+\nu)c''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n-1} - \\ &\quad - (n-2+\nu[n+2])c'''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{n+1} + (n+2+\nu[n-2])c''''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n+1}, \\ e_{(\cdot)}(\beta_0, \rho) &= (1+\nu)c'_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{n-1} + (1+\nu)c''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n-1} + \\ &\quad + (n+4+\nu n)c'''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{n+1} + (n-4+\nu n)c''''_{(\cdot)}(\beta_0)\rho^{-n+1}, \\ c'_I(\beta_0) &= \frac{n[-n+1+n\beta_0^2-\beta_0^{-2n}]}{2N(\beta_0)(n-1)}, \quad c''_I(\beta_0) = \frac{n[-n-1+n\beta_0^2+\beta_0^{2n}]}{2N(\beta_0)(n+1)}, \\ c'''_I(\beta_0) &= \frac{-n-1+n\beta_0^{-2}+\beta_0^{-2n}}{2N(\beta_0)(n+1)}, \quad c''''_I(\beta_0) = \frac{-n+1+n\beta_0^{-2}-\beta_0^{2n}}{2N(\beta_0)(n-1)}, \\ c'_{II}(\beta_0) &= \frac{n[-(n-1)+n\beta_0^{-2}-\beta_0^{2n}]\beta_0^{-n+2}}{2N(\beta_0)(n-1)}, \\ c''_{II}(\beta_0) &= \frac{n[-(n+1)+n\beta_0^{-2}+\beta_0^{-2n}]\beta_0^{n+2}}{2N(\beta_0)(n+1)}, \\ c'''_{II}(\beta_0) &= \frac{[-(n+1)+n\beta_0^2+\beta_0^{2n}]\beta_0^{-n}}{2N(\beta_0)(n+1)}, \\ c''''_{II}(\beta_0) &= \frac{[-(n-1)+n\beta_0^2-\beta_0^{-2n}]\beta_0^n}{2N(\beta_0)(n-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'_{III}(\beta_0) &= \frac{(n+2)(n-1) - n^2\beta_0^2 - (n-2)\beta_0^{-2n}}{2N(\beta_0)(n-1)}, \\
c''_{III}(\beta_0) &= \frac{-(n-2)(n+1) + n^2\beta_0^2 - (n+2)\beta_0^{2n}}{2N(\beta_0)(n+1)}, \\
c'''_{III}(\beta_0) &= \frac{(n+1) - (n+2)\beta_0^{-2} + \beta_0^{-2n}}{2N(\beta_0)(n+1)}, \\
c''''_{III}(\beta_0) &= \frac{-(n-1) + (n-2)\beta_0^{-2} + \beta_0^{2n}}{2N(\beta_0)(n-1)}, \\
c'_{IV}(\beta_0) &= \frac{[(n+2)(n-1) - n^2\beta_0^{-2} - (n-2)\beta_0^{2n}] \beta_0^{-n+2}}{2N(\beta_0)(n-1)}, \\
c''_{IV}(\beta_0) &= \frac{[-(n-2)(n+1) + n^2\beta_0^{-2} - (n+2)\beta_0^{2n}] \beta_0^{n+2}}{2N(\beta_0)(n+1)}, \\
c'''_{IV}(\beta_0) &= \frac{[(n+1) - (n+2)\beta_0^2 + \beta_0^{2n}] \beta_0^{-n}}{2N(\beta_0)(n+1)}, \\
c''''_{IV}(\beta_0) &= \frac{[-(n-1) + (n-2)\beta_0^2 + \beta_0^{-2n}] \beta_0^n}{2N(\beta_0)(n-1)}, \\
N(\beta_0) &= 2(n^2 - 1) - n^2(\beta_0^2 + \beta_0^{-2}) + (\beta_0^{2n} + \beta_0^{-2n})
\end{aligned}$$

отображают влияние сосредоточенных на внешнем контуре $\rho = 1$ и внутреннем контуре $\rho = \beta_0$ периодических нагрузок соответственно $\sigma_{\rho\rho}^{te} = \bar{a} \cos n\theta$, $\sigma_{\rho\theta}^{te} = \bar{b} \sin n\theta$ и $\sigma_{\rho\rho}^{te} = \underline{a} \cos n\theta$, $\sigma_{\rho\theta}^{te} = \underline{b} \sin n\theta$ соответственно. В случае диска переменной толщины приведенные зависимости следует переопределить для каждого частичного диска, используя условия в точке разрыва. В противоположность установленным в предыдущем пункте правилам сопряжения теперь надо отказаться от предположения об осевой симметрии из-за наличия в указанных формулах полярного угла θ . Это означает необходимость учета в местах скачкообразного изменения толщины диска не только непрерывности радиального усилия $h\sigma_{\rho\rho}^{te}$ и радиального смещения u^{te} , но и непрерывности соответствующих тангенциальных величин $h\sigma_{\rho\theta}^{te}$ и v^{te} [2].

Поскольку в крайней n_0 -й кольцевой секции $\rho_{n_0-1} < \rho \leq 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{te} &= [a_I(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0} + a_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0-1} + a_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0} + \\
&\quad + a_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0-1}] \cos n\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^{\prime e} &= [b_I(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0} + b_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0-1} + b_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0} + \\
&\quad + b_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0-1}] \cos n\theta, \\
\sigma_{\rho\theta}^{\prime e} &= [c_I(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0} + c_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0-1} + c_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0} + \\
&\quad + c_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0-1}] \sin n\theta, \quad (23) \\
u^{\prime e} &= \frac{\sigma_s}{E} [d_I(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0-1} + d_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0} + \\
&\quad + d_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0-1}] \cos n\theta, \\
v^{\prime e} &= \frac{\sigma_s}{E} [e_I(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0} + e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)a_{n_0-1} + e_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0} + \\
&\quad + e_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho)b_{n_0-1}] \sin n\theta,
\end{aligned}$$

на основании непрерывности радиального и тангенциального усилий действующие на внешнем контуре $\rho = \rho_{n_0-1}$ следующей кольцевой секции $\rho_{n_0-2} < \rho < \rho_{n_0-1}$ периодические нагрузки получаем в виде

$$\sigma_{\rho\rho}^{\prime e} = \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} \cos n\theta, \quad \sigma_{\rho\theta}^{\prime e} = \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} \sin n\theta. \quad (24)$$

Принимая

$$\sigma_{\rho\rho}^{\prime e} = a_{n_0-2} \cos n\theta, \quad \sigma_{\rho\theta}^{\prime e} = b_{n_0-2} \sin n\theta$$

на внутреннем контуре $\rho = \rho_{n_0-2}$ этой секции, напряженное и деформированное состояния определяем в ней согласно (22), (23):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{\prime e} &= \left[a_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + a_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + \right. \\
&\quad \left. + a_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + a_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \cos n\theta, \\
\sigma_{\theta\theta}^{\prime e} &= \left[b_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + b_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + \right. \\
&\quad \left. + b_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + b_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \cos n\theta, \\
\sigma_{\rho\theta}^{\prime e} &= \left[c_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + c_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + \right. \\
&\quad \left. + c_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + c_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \sin n\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'^e &= \rho_{n_0-1} \frac{\sigma_s}{E} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + \right. \\
&+ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + \\
&\left. + d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \cos n\theta, \\
v'^e &= \rho_{n_0-1} \frac{\sigma_s}{E} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + \right. \\
&+ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) a_{n_0-2} + e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + \\
&\left. + e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}} \right) b_{n_0-2} \right] \sin n\theta. \tag{25}
\end{aligned}$$

Для того чтобы выразить неизвестные амплитуды a_{n_0-2} и b_{n_0-2} через неопределенные коэффициенты a_{n_0} , a_{n_0-1} , b_{n_0} , b_{n_0-1} , воспользуемся непрерывностью u'^e и v'^e на окружности $\rho = \rho_{n_0-1}$. Приравнявая правые части выражений для смещений (23) и (25) при $\rho = \rho_{n_0-1}$, получаем линейную систему двух уравнений:

$$\begin{aligned}
d_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1})a_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1})a_{n_0-1} + d_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1})b_{n_0} + \\
+ d_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1})b_{n_0-1} = \rho_{n_0-1} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + \right. \\
+ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) a_{n_0-2} + d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + \\
\left. + d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) b_{n_0-2} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1})a_{n_0} + e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1})a_{n_0-1} + e_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1})b_{n_0} + \\
+ e_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1})b_{n_0-1} = \rho_{n_0-1} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} a_{n_0-1} + \right. \\
+ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) a_{n_0-2} + e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} b_{n_0-1} + \\
\left. + e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) b_{n_0-2} \right]
\end{aligned}$$

относительно a_{n_0-2} и b_{n_0-2} с отличным от нуля определителем

$$\begin{aligned} \Delta_{n_0-2} = \rho_{n_0-1}^2 \left[d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \right. \\ \left. - d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} a_{n_0-2} = q_{1,n_0-2} a_{n_0} + q_{2,n_0-2} a_{n_0-1} + q_{3,n_0-2} b_{n_0} + q_{4,n_0-2} b_{n_0-1}, \\ b_{n_0-2} = q_{5,n_0-2} a_{n_0} + q_{6,n_0-2} a_{n_0-1} + q_{7,n_0-2} b_{n_0} + q_{8,n_0-2} b_{n_0-1}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} q_{1,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[d_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - e_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\ q_{2,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} \times \right. \\ &\quad \times e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \left\{ e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} \times \\ &\quad \left. \times d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\ q_{3,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[d_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - e_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\ q_{4,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ d_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} \times \right. \\ &\quad \times e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \left\{ e_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} \times \\ &\quad \left. \times d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \\ q_{5,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[e_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - d_I(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{6,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} \times \right. \\
&\times d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \left. \left\{ d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \left. \times e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right] , \\
q_{7,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[e_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \right. \\
&\quad \left. - d_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right] , \\
q_{8,n_0-2} &= \frac{\rho_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}} \left[\left\{ e_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} \times \right. \\
&\times d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) - \left. \left\{ d_{IV}(\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0-1}) - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \rho_{n_0-1} \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \left. \times e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, 1 \right) \right] .
\end{aligned}$$

Рассматривая кольцевую секцию $\rho_{n_0-3} < \rho < \rho_{n_0-2}$ с контурными нагрузками

$$\sigma_{\rho\rho}^{\prime e} = \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} a_{n_0-2} \cos n\theta, \quad \sigma_{\rho\theta}^{\prime e} = \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} b_{n_0-2} \sin n\theta \quad \text{при } \rho = \rho_{n_0-2}$$

(см. (27)),

$$\sigma_{\rho\rho}^{\prime e} = a_{n_0-3} \cos n\theta, \quad \sigma_{\rho\theta}^{\prime e} = b_{n_0-3} \sin n\theta \quad \text{при } \rho = \rho_{n_0-3},$$

напряженное и деформированное состояние получаем в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{\prime e} &= \left[a_I \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} a_{n_0-2} + a_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) a_{n_0-3} + \right. \\
&+ a_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} b_{n_0-2} + a_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) b_{n_0-3} \left. \right] \cos n\theta, \\
\sigma_{\theta\theta}^{\prime e} &= \left[b_I \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} a_{n_0-2} + b_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) a_{n_0-3} + \right. \\
&+ b_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} b_{n_0-2} + b_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) b_{n_0-3} \left. \right] \cos n\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\theta}^e &= \left[c_I \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} a_{n_0-2} + c_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) a_{n_0-3} + \right. \\
&+ c_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} b_{n_0-2} + c_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) b_{n_0-3} \left. \right] \sin n\theta, \\
u^e &= \rho_{n_0-2} \frac{\sigma_s}{E} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} a_{n_0-2} + \right. \\
&+ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) a_{n_0-3} + d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} b_{n_0-2} + \\
&+ d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) b_{n_0-3} \left. \right] \cos n\theta, \\
v^e &= \rho_{n_0-2} \frac{\sigma_s}{E} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} a_{n_0-2} + \right. \\
&+ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) a_{n_0-3} + e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} b_{n_0-2} + \\
&+ e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-2}} \right) b_{n_0-3} \left. \right] \sin n\theta, \tag{28}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{n_0-3} &= q_{1,n_0-3} a_{n_0} + q_{2,n_0-3} a_{n_0-1} + q_{3,n_0-3} b_{n_0} + q_{4,n_0-3} b_{n_0-1}, \tag{29} \\
b_{n_0-3} &= q_{5,n_0-3} a_{n_0} + q_{6,n_0-3} a_{n_0-1} + q_{7,n_0-3} b_{n_0} + q_{8,n_0-3} b_{n_0-1}, \\
q_{1,n_0-3} &= \gamma_{2,n_0-3} q_{1,n_0-2} + \gamma_{4,n_0-3} q_{5,n_0-2}, \\
q_{2,n_0-3} &= \gamma_{1,n_0-3} + \gamma_{2,n_0-3} q_{2,n_0-2} + \gamma_{4,n_0-3} q_{6,n_0-2}, \\
q_{3,n_0-3} &= \gamma_{2,n_0-3} q_{3,n_0-2} + \gamma_{4,n_0-3} q_{7,n_0-2}, \\
q_{4,n_0-3} &= \gamma_{3,n_0-3} + \gamma_{2,n_0-3} q_{4,n_0-2} + \gamma_{4,n_0-3} q_{8,n_0-2}, \\
q_{5,n_0-3} &= \gamma_{6,n_0-3} q_{1,n_0-2} + \gamma_{8,n_0-3} q_{5,n_0-2}, \\
q_{6,n_0-3} &= \gamma_{5,n_0-3} + \gamma_{6,n_0-3} q_{2,n_0-2} + \gamma_{8,n_0-3} q_{6,n_0-2}, \\
q_{7,n_0-3} &= \gamma_{6,n_0-3} q_{3,n_0-2} + \gamma_{8,n_0-3} q_{7,n_0-2}, \\
q_{8,n_0-3} &= \gamma_{7,n_0-3} + \gamma_{6,n_0-3} q_{4,n_0-2} + \gamma_{8,n_0-3} q_{8,n_0-2}, \\
\gamma_{1,n_0-3} &= \frac{\rho_{n_0-1} \rho_{n_0-2}}{\Delta_{n_0-3}} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} - \right. \\
&- e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \left. \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2,n_0-3} = & \frac{\rho_{n_0-2}^2}{\Delta_{n_0-3}} \left[\left\{ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{\rho_{n_0-1}}{\rho_{n_0-2}} - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} \right\} e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) - \left\{ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{\rho_{n_0-1}}{\rho_{n_0-2}} - \right. \\ & \left. \left. - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} \right\} d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{3,n_0-3} = & \frac{\rho_{n_0-1}\rho_{n_0-2}}{\Delta_{n_0-3}} \left[d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} - \right. \\ & \left. - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{4,n_0-3} = & \frac{\rho_{n_0-2}^2}{\Delta_{n_0-3}} \left[\left\{ d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{\rho_{n_0-1}}{\rho_{n_0-2}} - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} \right\} e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) - \left\{ e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{\rho_{n_0-1}}{\rho_{n_0-2}} - \right. \\ & \left. \left. - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} \right\} d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{5,n_0-3} = & \frac{\rho_{n_0-1}\rho_{n_0-2}}{\Delta_{n_0-3}} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} - \right. \\ & \left. - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{6,n_0-3} = & \frac{\rho_{n_0-2}^2}{\Delta_{n_0-3}} \left[\left\{ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{\rho_{n_0-1}}{\rho_{n_0-2}} - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} \right\} d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) - \left\{ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{\rho_{n_0-1}}{\rho_{n_0-2}} - \right. \\ & \left. \left. - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{7,n_0-3} = & \frac{\rho_{n_0-1}\rho_{n_0-2}}{\Delta_{n_0-3}} \left[e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} - \right. \\ & \left. - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{8,n_0-3} &= \frac{\rho_{n_0-2}^2}{\Delta_{n_0-3}} \left[\left\{ e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{\rho_{n_0-1}}{\rho_{n_0-2}} - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} \right\} d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) - \left\{ d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}} \right) \frac{\rho_{n_0-1}}{\rho_{n_0-2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}} \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \right], \\ \Delta_{n_0-3} &= \rho_{n_0-2}^2 \left[d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-3}}{\rho_{n_0-2}}, 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Методом математической индукции можно доказать, что и при любом $k \in \{4, \dots, n_0 - (j - 1)\}$ состояние секции $(\rho_{n_0-k}, \rho_{n_0-(k-1)})$ описывается функциями

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho\rho} &= \left[a_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\ &+ a_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + a_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \times \\ &\quad \left. \times \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + a_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \cos n\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{\theta\theta} &= \left[b_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\ &+ b_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + b_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \times \\ &\quad \left. \times \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + b_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \cos n\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho\theta} &= \left[c_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\ &+ c_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + c_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \times \\ &\quad \left. \times \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + c_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \sin n\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^ie &= \rho_{n_0-(k-1)} \frac{\sigma_s}{E} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\
&+ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \times \\
&\times \left. \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \cos n\theta, \\
v^ie &= \rho_{n_0-(k-1)} \frac{\sigma_s}{E} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} a_{n_0-(k-1)} + \right. \\
&+ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) a_{n_0-k} + e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) \times \\
&\times \left. \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} b_{n_0-(k-1)} + e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}} \right) b_{n_0-k} \right] \sin n\theta,
\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{n_0-k} &= q_{1,n_0-k} a_{n_0} + q_{2,n_0-k} a_{n_0-1} + q_{3,n_0-k} b_{n_0} + q_{4,n_0-k} b_{n_0-1}, \\
b_{n_0-k} &= q_{5,n_0-k} a_{n_0} + q_{6,n_0-k} a_{n_0-1} + q_{7,n_0-k} b_{n_0} + q_{8,n_0-k} b_{n_0-1}, \\
q_{1,n_0-k} &= \gamma_{2,n_0-k} q_{1,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k} q_{5,n_0-(k-1)}, \\
q_{2,n_0-k} &= \gamma_{1,n_0-k} + \gamma_{2,n_0-k} q_{2,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k} q_{6,n_0-(k-1)}, \\
q_{3,n_0-k} &= \gamma_{2,n_0-k} q_{3,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k} q_{7,n_0-(k-1)}, \\
q_{4,n_0-k} &= \gamma_{3,n_0-k} + \gamma_{2,n_0-k} q_{4,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k} q_{8,n_0-(k-1)}, \\
q_{5,n_0-k} &= \gamma_{6,n_0-k} q_{1,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k} q_{5,n_0-(k-1)}, \\
q_{6,n_0-k} &= \gamma_{5,n_0-k} + \gamma_{6,n_0-k} q_{2,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k} q_{6,n_0-(k-1)}, \\
q_{7,n_0-k} &= \gamma_{6,n_0-k} q_{3,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k} q_{7,n_0-(k-1)}, \\
q_{8,n_0-k} &= \gamma_{7,n_0-k} + \gamma_{6,n_0-k} q_{4,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k} q_{8,n_0-(k-1)}, \\
\gamma_{1,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-2)} \rho_{n_0-(k-1)}}{\Delta_{n_0-k}} \left[d_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \times \right. \\
&\times e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} - \\
&\left. - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{2,n_0-k} = & \frac{\rho_{n_0-(k-1)}^2}{\Delta_{n_0-k}} \left[\left\{ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \right. \\ & - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \left. \right\} e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \\ & - \left\{ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \\ & \left. \left. - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{3,n_0-k} = & \frac{\rho_{n_0-(k-2)}\rho_{n_0-(k-1)}}{\Delta_{n_0-k}} \left[d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \times \right. \\ & \times e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} - \\ & \left. - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{4,n_0-k} = & \frac{\rho_{n_0-(k-1)}^2}{\Delta_{n_0-k}} \left[\left\{ d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \right. \\ & - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \left. \right\} e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \\ & - \left\{ e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \\ & \left. - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{5,n_0-k} = & \frac{\rho_{n_0-(k-2)}\rho_{n_0-(k-1)}}{\Delta_{n_0-k}} \left[e_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \times \right. \\ & \times d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} - \\ & \left. - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{6,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-1)}^2}{\Delta_{n_0-k}} \left[\left\{ e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left\{ d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - d_I \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right], \\
\gamma_{7,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-2)}\rho_{n_0-(k-1)}}{\Delta_{n_0-k}} \left[e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} - \right. \\
&\quad \left. - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-3)}}{h_{n_0-(k-2)}} \right], \\
\gamma_{8,n_0-k} &= \frac{\rho_{n_0-(k-1)}^2}{\Delta_{n_0-k}} \left[\left\{ e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left\{ d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}} \right) \frac{\rho_{n_0-(k-2)}}{\rho_{n_0-(k-1)}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - d_{III} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}} \right\} e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right], \\
\Delta_{n_0-k} &= \rho_{n_0-(k-1)}^2 \left[d_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) e_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) - \right. \\
&\quad \left. - d_{IV} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) e_{II} \left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Отметим, что при $k = n_0 - (j - 1)$ по определению $\rho_{n_0-k} := \beta_0$.

5. Характеристическое уравнение

Функции (23), (25), (28), (30) должны удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{\rho\rho}^{Ie} + A_1 u^{Ie} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (31)$$

$$\sigma'_{\rho\theta} - A_2 \frac{du'^e}{d\theta} = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad (32)$$

где

$$A_1 = \frac{d\sigma_{\rho\rho}^{0e}(1)}{d\rho}, \quad A_2 = \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{\rho\rho}^{0e}(1),$$

и условиям сопряжения

$$\sigma'_{\rho\theta} = 0 \quad \text{при } \rho = \beta_0, \quad (33)$$

$$\sigma'_{\rho\rho} = 0 \quad \text{при } \rho = \beta_0. \quad (34)$$

Чтобы получить A_1 и A_2 в (31) и (32), последовательно воспользуемся соотношениями (20), (21), (15), (17) и (18):

$$\begin{aligned} A_1 &= -2\tilde{C}_{2,n_0} - 2\alpha' = t_{n_0} - s_{n_0} - 2\alpha' = t_{n_0} - \frac{p_e}{\sigma_s} - 3\alpha' = \\ &= A_{n_0}^* s_j^- - B_{n_0}^* t_j^- + C_{n_0}^* - \frac{p_e}{\sigma_s} - 3\alpha' = (A_{n_0}^* Q - B_{n_0}^* Q^* - 3) \alpha' + \end{aligned} \quad (35)$$

$$+ (A_{n_0}^* R - B_{n_0}^* R^*) \frac{p_i}{\sigma_s} - \frac{p_e}{\sigma_s} + (A_{n_0}^* S - B_{n_0}^* S^* + C_{n_0}^*),$$

$$A_2 = A_1 + 3\alpha' - \beta'. \quad (36)$$

Как следует из (35), (36), а также (17)–(19) и (7), дальнейшее определение A_1 и A_2 сводится к установлению зависимостей между контурными давлениями p_i и p_e и радиусом пластической зоны β_0 . Чтобы получить эти соотношения, конкретизируем вид каждого слагаемого p_{i0} , p_{e0} , \tilde{p}_i и \tilde{p}_e . Предположим, что

$$p_i^0 = \varepsilon_i \sigma_s, \quad p_e^0 = \varepsilon_e \sigma_s, \quad \tilde{p}_i = \varkappa_i \gamma \omega^2 \frac{b^3 - a^3}{a}, \quad \tilde{p}_e = \varkappa_e \bar{\gamma} \omega^2 \frac{f^3 - b^3}{b},$$

где $0 \leq \varepsilon_i < 1$, $0 \leq \varepsilon_e < 1$, $\varkappa_i \geq 0$, $\varkappa_e \geq 0$, $\bar{\gamma} > 0$, $f > b$. Тогда при $\varkappa_i \neq 0$

$$\frac{p_e}{\sigma_s} = \varepsilon_e + \mu \left(\frac{p_i}{\sigma_s} - \varepsilon_i \right), \quad (37)$$

где

$$\mu = \frac{\varkappa_e \bar{\gamma}}{\varkappa_i \gamma} \frac{\varphi^3 - 1}{\beta^{-1} - \beta^2}, \quad \varphi = \frac{f}{b}.$$

Поскольку

$$\frac{p_i}{\sigma_s} = \varepsilon_i + \varkappa_i (\beta^{-1} - \beta^2) \frac{\omega^2}{q^2},$$

связать контурное давление с величиной радиуса пластической зоны (см. (19)) можно в виде

$$\frac{p_i}{\sigma_s} = \xi(\beta_0) = \frac{\varepsilon_i \tau + \frac{8\kappa_i(\beta^{-1}-\beta^2)}{\nu+3} (\varepsilon_e - \mu\varepsilon_i - [SA_{n_0} - S^*B_{n_0}])}{\tau - \frac{8\kappa_i(\beta^{-1}-\beta^2)}{\nu+3} (\mu - [RA_{n_0} - R^*B_{n_0}])}, \quad (38)$$

где $\tau = QA_{n_0} - Q^*B_{n_0} + D_{n_0} - 1$. При $\kappa_e \neq 0$

$$\frac{p_i}{\sigma_s} = \varepsilon_i + \mu^{-1} \left(\frac{p_e}{\sigma_s} - \varepsilon_e \right), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_e}{\sigma_s} = \eta(\beta_0) = & \left\{ \varepsilon_e \tau - \frac{8\kappa_e(\varphi^3 - 1)}{\nu + 3} \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} [(\varepsilon_i - \mu^{-1}\varepsilon_e)(RA_{n_0} - \right. \\ & \left. - R^*B_{n_0}) + (SA_{n_0} - S^*B_{n_0})] \right\} \left\{ \tau - \frac{8\kappa_e(\varphi^3 - 1)}{\nu + 3} \frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \times \right. \\ & \left. \times [1 - \mu^{-1}(RA_{n_0} - R^*B_{n_0})] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Удовлетворяя функциями (23), (25), (28), (30) граничным условиям (31), (32) и условиям сопряжения (33), (34), приходим к системе линейных однородных уравнений относительно a_{n_0} , a_{n_0-1} , b_{n_0} и b_{n_0-1} :

$$\begin{aligned} a_{n_0} + A_1 \frac{\sigma_s}{E} \{ d_I(\rho_{n_0-1}, 1)a_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, 1)a_{n_0-1} + \\ + d_{III}(\rho_{n_0-1}, 1)b_{n_0} + d_{IV}(\rho_{n_0-1}, 1)b_{n_0-1} \} = 0, \\ b_{n_0} + nA_2 \frac{\sigma_s}{E} \{ d_I(\rho_{n_0-1}, 1)a_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, 1)a_{n_0-1} + \\ + d_{III}(\rho_{n_0-1}, 1)b_{n_0} + d_{IV}(\rho_{n_0-1}, 1)b_{n_0-1} \} = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} q_{1, n_0 - (n_0 - [j-1])} a_{n_0} + q_{2, n_0 - (n_0 - [j-1])} a_{n_0-1} + \\ + q_{3, n_0 - (n_0 - [j-1])} b_{n_0} + q_{4, n_0 - (n_0 - [j-1])} b_{n_0-1} = 0, \\ q_{5, n_0 - (n_0 - [j-1])} a_{n_0} + q_{6, n_0 - (n_0 - [j-1])} a_{n_0-1} + \\ + q_{7, n_0 - (n_0 - [j-1])} b_{n_0} + q_{8, n_0 - (n_0 - [j-1])} b_{n_0-1} = 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\tilde{\Delta}(\beta_0) = 0, \quad (42)$$

где $\tilde{\Delta}(\beta_0)$ — определитель матрицы $(a_{ij})_{i,j=1}^4$ системы (41), в которой

$$a_{11} = 1 + A_1 d_I(\rho_{n_0-1}, 1) \frac{\sigma_s}{E}, \quad a_{12} = A_1 d_{II}(\rho_{n_0-1}, 1) \frac{\sigma_s}{E},$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= A_1 d_{III}(\rho_{n_0-1}, 1) \frac{\sigma_s}{E}, & a_{14} &= A_1 d_{IV}(\rho_{n_0-1}, 1) \frac{\sigma_s}{E}, \\
a_{21} &= n A_2 d_I(\rho_{n_0-1}, 1) \frac{\sigma_s}{E}, & a_{22} &= n A_2 d_{II}(\rho_{n_0-1}, 1) \frac{\sigma_s}{E}, \\
a_{23} &= 1 + n A_2 d_{III}(\rho_{n_0-1}, 1) \frac{\sigma_s}{E}, & a_{24} &= n A_2 d_{IV}(\rho_{n_0-1}, 1) \frac{\sigma_s}{E}, \\
a_{31} &= q_{1, n_0 - (n_0 - [j-1])}, & a_{32} &= q_{2, n_0 - (n_0 - [j-1])}, \\
a_{33} &= q_{3, n_0 - (n_0 - [j-1])}, & a_{34} &= q_{4, n_0 - (n_0 - [j-1])}, \\
a_{41} &= q_{5, n_0 - (n_0 - [j-1])}, & a_{42} &= q_{6, n_0 - (n_0 - [j-1])}, \\
a_{43} &= q_{7, n_0 - (n_0 - [j-1])}, & a_{44} &= q_{8, n_0 - (n_0 - [j-1])}.
\end{aligned}$$

Соответствующее критическому значению радиуса пластической области β_{0*} , $\beta_{0*} \in (\beta, 1)$ критическое значение квадрата угловой скорости в случае $\varkappa_i \neq 0$ получаем по формуле

$$\begin{aligned}
\omega_*^2 &= \frac{8q^2}{\nu + 3} \{ \varepsilon_e + \mu(\xi(\beta_{0*}) - \varepsilon_i) - (RA_{n_0} - R^*B_{n_0}) \xi(\beta_{0*}) - \\
&\quad - (SA_{n_0} - S^*B_{n_0}) \} \{ QA_{n_0} - Q^*B_{n_0} + D_{n_0} - 1 \}^{-1},
\end{aligned}$$

в случае $\varkappa_e \neq 0$ — по формуле

$$\begin{aligned}
\omega_*^2 &= \frac{8q^2}{\nu + 3} \{ \eta(\beta_{0*}) - (RA_{n_0} - R^*B_{n_0}) (\varepsilon_i + \mu^{-1}(\eta(\beta_{0*}) - \varepsilon_e)) - \\
&\quad - (SA_{n_0} - S^*B_{n_0}) \} \{ QA_{n_0} - Q^*B_{n_0} + D_{n_0} - 1 \}^{-1},
\end{aligned}$$

а в случае $\varkappa_i = \varkappa_e = 0$ — по формуле

$$\omega_*^2 = \frac{8q^2}{\nu + 3} \frac{\varepsilon_e - (RA_{n_0} - R^*B_{n_0}) \varepsilon_i - (SA_{n_0} - S^*B_{n_0})}{QA_{n_0} - Q^*B_{n_0} + D_{n_0} - 1}.$$

6. Обсуждение результатов

Полученное характеристическое уравнение (42) позволяет определять критический радиус и критическую угловую скорость вращения ступенчатого диска из заданного материала при известных радиусах и толщинах его кольцевых секций и параметрах нагружения. В табл. 1–3 приведены результаты решения задачи для трехступенчатого диска с секциями одинаковой ширины при различных n в зависимости от h_k , $k = \overline{1, 3}$. При этом $\beta = a/b = 0.2$, $\nu = 0.3$, $\sigma_s/E = 0.01$,

$\varepsilon_i = 0$, $\varepsilon_e = 0$, $\varkappa_i = 1/3$, $\varkappa_e = 0$. В случаях 1 и 3 диски отличаются только толщиной средней секции, а в случаях 2 и 3 — лишь направлением возрастания толщин секций. Нетрудно убедиться, что выбирая в каждом из предложенных случаев, а также в любых других случаях, параметры зависимости $h_k = h(k)$ так, чтобы $h_1 \approx \dots \approx h_{n_0}$, в результате получим решение, близкое к решению данной задачи для плоского диска (сравним с [10]).

После некоторых упрощений, базирующихся на учете условия равновесия нагрузок в системе с возникшей в центре диска сосредоточенной силой при эксцентричной форме потери устойчивости, можно получить аналогичный уравнению (42) результат.

Таблица 1. Значения критического радиуса и квадрата относительной критической скорости при $h_k = \frac{1}{10k}$

n	2	3	4	5	6
β_{0*}	0.7333	0.8978	0.9348	0.9539	0.9654
$(\omega_*/q)^2$	0.9897	1.0181	1.0209	1.0219	1.0223

Таблица 2. Значения критического радиуса и квадрата относительной критической скорости при $h_k = \frac{k}{30}$

n	2	3	4	5	6
β_{0*}	0.7826	0.8847	0.9254	0.9467	0.9596
$(\omega_*/q)^2$	1.2946	1.3526	1.3662	1.3710	1.3732

Таблица 3. Значения критического радиуса и квадрата относительной критической скорости при $h_k = \frac{4-k}{30}$

n	2	3	4	5	6
β_{0*}	0.7332	0.8954	0.9331	0.9526	0.9644
$(\omega_*/q)^2$	1.0471	1.0742	1.0771	1.0781	1.0785

-
- [1] Бицено К.Б., Граммель Р. Техническая динамика: В 2 т. — М.–Л.: Гостехтеориздат, 1950. — Т. 1. — 900 с.
- [2] Бицено К.Б., Граммель Р. Техническая динамика: В 2 т. — М.–Л.: Гостехтеориздат, 1952. — Т. 2. — 640 с.
- [3] Гузь А.Н., Немчи Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. — Киев: Выща шк., 1989. — 352 с.
- [4] Ершов Л.В., Ивлев Д.Д. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — № 1. — С. 124–125.
- [5] Ивлев Д.Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. ОТН. — 1957. — № 1. — С. 141–144.
- [6] Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
- [7] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел: В 2 т. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — Т. 1. — 648 с.
- [8] Соколовский В.В. Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969. — 608 с.
- [9] Lila D.M. Mechanism of the loss of stability of a rotating composite plane circular disk // J. Math. Sci. — 2013. — **194**, N 3. — P. 257–269.
- [10] Lila D.M., Martynyuk A.A. Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // Int. Appl. Mech. — 2012. — **48**, N 2. — P. 224–233.
- [11] Lila D.M., Martynyuk A.A. Analysis of dynamics of boundary shape perturbation of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous plane circular disk: analytical approach // Appl. Math. — 2012. — **3**, N 5. — P. 451–456.
- [12] Mazière M., Besson J., Forest S. et al. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks. Part I: Analytical and numerical stability analyses // Eur. J. Mech. A/Solid. — 2009. — **28**, N 1. — P. 36–44.
- [13] Mazière M., Besson J., Forest S. et al. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part II: Burst of a superalloy turbine disk // Eur. J. Mech. A/Solid. — 2009. — **28**, N 3. — P. 428–432.