Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 425–437

УДК 519.2:518.5:518.61

Напівмарковські моделі стратегій пошуку з розпізнаванням шуканих інформативних повідомлень

Л.М. Шлепаков

Інститут математики НАН України, Київ

We study the problem on the strategy design for searching the messages in a multi-channel communication system. Searching device (SD) consecutively checks the channels to detect and identify the desired message. The communication channels may host the informative messages of different types. After successful recognition SD remains in the same channel for a random amount of time which depends on the type of the message and on the fact whether the detected message has been sought for. The device leaves the channel immediately if the detected message has no operational interest.

Исследуются задачи построения стратегий поиска информативных сообщений в многоканальной системе связи. Поисковое устройство (ПУ) поочередно просматривает каналы с целью обнаружения и распознавания некоторого искомого сообщения. По каналам связи передаются информативные сообщения различных типов. Распознав находящийся в канале сигнал, ПУ или остается в этом канале еще на случайный отрезок времени, зависящий от типа сигнала, если это искомый сигнал, или мгновенно покидает этот канал, если по нему передается сигнал, не представляющий оперативного интереса.

1. Постановка задачі

Нехай система зв'язку має N каналів. У кожному з каналів у деякий момент часу з'являється одне з повідомлень $e_1, \ldots, e_n$. Час t перебування повідомлення e_m, $m = \overline{1, M}$, в n-му каналі підпорядковано довільному абсолютно неперервному закону розподілу

$$G^{(n)}_{\tau,\, m}(t) = \int_0^t g^{(n)}_{\tau,\, m}(s) ds,$$

який залежить від моменту τ потрапляння m-го повідомлення у канал. Ймовірність того, що після потрапляння m-го повідомлення в n-й канал у момент τ там з'явиться k-те повідомлення, становить $P^{(n)}_{\tau,\,m,\,k}$, $\tau \geq 0$, $m,\, k = \overline{1,M}$. У початковий момент часу t_0 в n-му каналі, $n = \overline{1,N}$, перебуває повідомлення $d_0^{(n)} \in \{e_1, \ldots, e_M\} \stackrel{def}{=} E$.

Усі канали відстежуються пошуковим пристроєм (ПП) з метою виявлення деякого шуканого повідомлення $e_f \in E$. Після перегляду каналу ПП подає інформацію про тип повідомлення, яке там перебуває в момент підключення ПП. Ймовірність правильного розпізнавання типу повідомлення залежить від часу перебування ПП в каналі (час контролю) і такого періоду часу контролю, який збігається з терміном перебування повідомлення у каналі (час розпізнавання). Задано ймовірності $P(n)(\Delta t_1,\, \Delta t_2,\, e_f/e_m)$, $m = \overline{1,M}$, того, що за час розпізнавання Δt_1 і час контролю Δt_2 $(\Delta t_1 \leq \Delta t_2)$ у n-му каналі буде виявлено шукане повідомлення e_f за умови, що саме в момент підключення ПП у ньому перебувало повідомлення e_m.

Рух ПП каналами зв'язку може мати випадковий або невипадковий характер, тобто ПП підключається до одного з каналів, перебуває там певний час (випадковий або детермінований) та згідно з деяким законом (випадковим або спеціально заданим) переходить в інший канал.

На рух ПП каналами зв'язку накладаються певні обмеження. Так, часовий термін контролю n-го каналу має бути більшим за наперед задане значення $\Delta t_m^{(n)}$, а сумарний час пошуку з переглядом всіх каналів не може перевищувати $T_0 > 0$. Можна вводити ще й інші обмеження. В рамках заданих обмежень необхідно визначити стратегію руху ПП таким чином, щоб обраний критерій ефективності пошуку набував максимального значення. Крім того, ймовірність правильного розпізнавання ПП шуканих повідомлень залежить не тільки від терміну контролю, а й від терміну роботи пристрою розпізнавання, що дає можливість враховувати випадки, коли час перебування повідомлення в каналі не збігається з часом контролю ПП [1–3].

2. Математична модель

Функціонування кожного з каналів описується неоднорідним за часом напівмарковським процесом [5–7].

Нехай $\{\xi_n,\, \tau_n; n \geq 0\}$ — однорідний двовимірний ланцюг Маркова із значеннями у вимірному просторі $\{X \times [0, \infty), \, B \otimes \mathcal{B}_{[0, \infty)}\}$, імовірність переходу якого задається напівмарковським ядром ($\mathcal{B}$ – σ-алгебра борелівських множин на X):

$$Q(\tau, t, x, B) = \mathcal{P}\{\xi_{n+1} \in B, \, \tau_{n+1} \leq t \, / \, \xi_n = x, \, \tau_n = \tau\},$$

$$t > \tau, \, x \in X, \, B \in \mathcal{B}.$$

Припустимо, що функція $Q(\tau, t, x, B)$ абсолютно неперервна по t, тобто

$$Q(\tau, t, x, B) = \int_{\tau}^{t} q(\tau, s, x, B) ds.$$

Введемо такі випадкові процеси:

$$\nu_{x, \tau}(t) = \sup\{n \, : \, \tau_n \leq t \, / \, \xi_0 = x, \, \tau_0 = \tau\}, \; t \geq \tau,$$

$$\nu_{x, \tau, B(t)} = \sum_{i=0}^{\nu_{x, \tau}(t)} \chi_B(\xi_i), \; t \geq \tau, \; x \in X, \, B \in \mathcal{B},$$

де $\chi_B(x)$ — характеристична функція множини B,
$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \in B, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \notin B. \end{cases}$

Процес $\xi(t) = \xi_{x, \tau}(t)$ є неоднорідним стосовно часу і напівмарковським. Якщо $Q(\tau, t, x, B) = \tilde{Q}(t - \tau, x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}$, $t \geq \tau$, то процес $\xi(t)$ є напівмарковським, регулярним, тобто для кожного $t \geq \tau$ $\mathcal{P}\{\tau_\infty > t\} = 1$. Функція $H(\tau, t, x, B) = M\nu_{x, \tau, B}(t)$ є функцією марковського відновлення:

$$H(\tau, t, x, B) = \chi_B(x) + \int_{\tau}^{t} h(\tau, s, x, B) ds,$$

де $h(\tau, t, x, B)$, $t \geq \tau$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}$ — щільність функції марковського відновлення, якщо $Q(t, \, t + \Delta, \, x, \, B) \to 0$ рівномірно за змінною x, то $h(\tau, t, x, B)dt$ — ймовірність того, що у нескінченно малому проміжку часу $(t, \, t + dt)$ відбудеться не менше одного потрапляння процесу $\xi(t)$ у множину B для початкової умови $\xi_0 = x$, $\tau_0 = \tau$.

Розглянемо функціонування n-го каналу, $n = \overline{1, N}$. Неоднорідний у часі напівмарковський процес $\xi^{(n)}(t)$ з фазовим простором $\{E^{(n)}, \, B^{(n)}\}$, де $E^{(n)} = \{e_1, \ldots, e_M\}$ визначається напівмарковським ядром

$$Q^{(n)}(\tau, t, e_i, e_j) = G^{(n)}_{\tau, i}(t - \tau) \, \mathcal{P}^{(n)}_{\tau, i, j} \,, \;\; i, j = \overline{1, M}, \; \tau \leq t,$$

та початковим станом $d_0^{(n)} \in E$, в якому процес перебуває у початковий момент $t_0^{(n)} \geq 0$. Процес $\xi^{(n)}(t)$ перебуває у стані e_i, $i = \overline{1, M}$, якщо в n-му каналі перебуває інформативне повідомлення e_i.

Для щільності функції марковського відновлення процесу $\xi^{(n)}(t)$ справджується система інтегральних рівнянь Вольтерра

$$h^{(n)}(\tau_0, t, e_i, e_j) = q^{(n)}(\tau_0, t, e_i, e_j) +$$

$$+ \int_{\tau_0}^{t} ds \sum_{k \in E} h^{(n)}(\tau_0, s, e_i, e_k)\, q^{(n)}(s, t, e_k, e_j), \tag{1}$$

де $q^{(n)}(\tau, t, e_k, e_j)$ – щільність напівмарковського ядра $Q^{(n)}(\tau, t, e_k, e_j)$, причому $q^{(n)}(\tau, t, e_k, e_j) = g_{\tau,k}^{(n)}(t-\tau)\, P_{\tau,k,j}^{(n)}$.

Для розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра можна скористатись одним з чисельних методів. Варто зауважити, що при чисельному розв'язуванні реальних задач пошуку з розпізнаванням шуканих інформативних повідомлень виникають проблеми, пов'язані з великою розмірністю систем рівнянь, кількість яких може сягати десятків тисяч [4].

3. Обчислення характеристик пошукового пристрою для конкретних випадків

Проілюструємо розв'язок системи (1) для випадку, коли $m = 5$, шукане повідомлення $e_f = e_1$, час t задано в інтервалі $[0; 1]$, канали рівноцінні, час перебування у станах підпорядкований нормальним законам розподілу, параметри яких не залежать від моменту потрапляння у відповідний стан:

$$G_{\tau,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{(-(t-\tau-a(m))^2)/(2\sigma^2)},$$

де $\sigma = 0,1,\ a(m) = 1 + \dfrac{1}{m}$,

$$P_{\tau,m,k} = \frac{m+k}{C_m},\ m = \overline{1, M},\ K = \overline{2, M},$$

$$P_{\tau,m,1} = \frac{1}{(m+100)C_m},\ m = \overline{1, M},$$

$$C_m = \frac{2m+2+M}{2}(M-1) + \frac{1}{(m+100)},\ m = \overline{1, M}.$$

Результати наближеного обчислення функцій $h(0, t, e_m, e_1)$ у точках $t_i = (i-1)h,\ i = \overline{1, 11},\ h = 0,1$, наведено у табл. 1, причому $h(0, t_i, e_1, e_1) = 0$ для $1 \le i \le 11$.

Таблиця 1

i	$h(0, t_i, e_2, e_1)$	$h(0, t_i, e_3, e_1)$	$h(0, t_i, e_4, e_1)$	$h(0, t_i, e_5, e_1)$
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0.000011	0.00015
9	0	0.000026	0.0016	0.013
10	0.0000006	0.0033	0.087	0.0044
11	0.0001	0.015	0.18	0.54

Розглянемо випадок, коли час перебування у станах підпорядкований ерлангівським законам розподілу, параметри яких не залежать від моменту потрапляння у відповідний стан. Нехай $M = 8$, шукане повідомлення $e_f = e_1$, досліджуваний часовий інтервал дорівнює $[0, 1]$, канали рівноцінні,

$$G_{\tau, m}(t-\tau) = 1 - \lambda_m t e^{-\lambda_m t} - e^{-\lambda_m t},$$

$$P_{\tau, m, k} = \frac{m+k}{C_m},\ m = \overline{1, M},\ k = \overline{2, M},$$

$$P_{\tau, m, 1} = \frac{1}{(m+100)C_m},\ m = \overline{1, M},$$

$$C_m = \frac{2m+2+M}{2}(M-1) + \frac{1}{(m+100)},\ m = \overline{1, M},$$

$$\lambda_m = 0,7 + \frac{m}{40},\ m = \overline{1, M}.$$

Таблиця 2

i	h_{11}	h_{21}	h_{31}	h_{41}	h_{51}	h_{61}	h_{71}	h_{81}
1	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.997	0.005	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004
3	0.990	0.021	0.019	0.017	0.016	0.016	0.014	0.014
4	0.979	0.043	0.040	0.037	0.035	0.033	0.032	0.031
5	0.965	0.073	0.067	0.063	0.059	0.056	0.054	0.052
6	0.948	0.109	0.100	0.094	0.088	0.083	0.080	0.077
7	0.928	0.150	0.138	0.012	0.021	0.114	0.109	0.105
8	0.907	0.194	0.178	0.166	0.156	0.147	0.141	0.137
9	0.884	0.242	0.222	0.204	0.194	0.184	0.175	0.168
10	0.860	0.292	0.267	0.248	0.233	0.221	0.211	0.202
11	0.835	0.344	0.315	0.292	0.274	0.259	0.247	0.237

Результати наближеного обчислення функцій $h(0,t,e_m,e_1), m=\overline{1,M}$, у точках $t_i=(i-1)h$, $i=\overline{1,11}$, $h=0,\ 1$, подано в табл. 2, де $h_{j1}=h(0,t_i,e_j,e_1),\ j=\overline{1,8}$.

Розглянемо тепер двовимірну послідовність $\{\eta_n,\tau_n;n\geq 0\}$ із значеннями у $\{0,1,...,N\}\times[0,\infty)$, де τ_n — момент n-го підключення ПП до певного каналу системи зв'язку, η_n — номер каналу, в який потрапляє ПП у момент n-го підключення ($\eta_n=j$, якщо ПП потрапив до j-го каналу). Очевидно, що послідовність $\{\eta_n,\tau_n;n\geq 0\}$ може бути як випадковою двовимірною, якщо рух ПП має випадковий характер, так і невипадковою, якщо рух ПП детермінований.

Для двовимірної випадкової послідовності $\{\zeta_n,\tau_n;n\geq 1\}$ із значеннями у $\{0,1,...,M\}\times[0,\infty)$, де τ_n — момент n-го підключення ПП до каналів зв'язку, ζ_n — номер розпізнаного на попередньому кроці повідомлення, який ПП фіксує в момент τ_n (після перегляду чергового каналу, що збігається з моментом підключення до наступного каналу), тобто $\tau_n=i$, якщо ПП зафіксував факт виявлення повідомлення i-го типу на попередньому перегляді.

Введемо наступні випадкові процеси :

$$\nu_{a,\,\tau}(t)=\sup\{n:\tau_n\leq t\,|\,\eta_0=a,\tau_0=\tau\},$$

де $\nu_{a,\,\tau}(t)$ — кількість стрибків процесу $\eta(t)$ упродовж часового інтервалу $[\tau, t]$ для початкової умови $\eta_0 = a$, $\tau_0 = \tau$;

$$\nu^{+}_{a,\,\tau,\,e}(t) = \sum_{i=0}^{\nu_{a,\tau}(t)} \delta_{e_f}^{\zeta_{i+1}} \delta_{e_f \xi^{n_i}(\tau_i)}, \quad \delta_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = y, \\ 0, & \text{якщо } x \neq y, \end{cases}$$

де $\nu^{+}_{a,\,\tau,\,e}(t)$ — кількість правильно розпізнаних шуканих повідомлень на інтервалі $[\tau, t]$ для початкових умов $\tau_0 = \tau,\ \eta_0 = a$,
$\xi^{(n)}(t_0^{(n)}) = d_0^{(n)},\ t_0^{(n)} \le \tau_0,\ n = \overline{1, N},\ e = (d_0^{(n)}, t_0^{(n)})_{n=\overline{1,N}}$ — вектор розмірності $2N$.

Знайдемо $M_{a,\,e}(\tau, t) = M\nu^{+}_{a,\,\tau,\,e}(t)$ — математичне сподівання кількості правильних розпізнавань шуканого повідомлення на інтервалі $[\tau, t]$.

Нехай на рух ПП накладено такі обмеження: $\tau_{n+1} - \tau_n \ge \tau^{(\eta_n)}_{min}$. Визначимо деякі характеристики пошуку:

1. $R^{+(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_f) = P\{\zeta_{k+1} = e_f,\ \ \xi^{\eta_k}(\tau_k) = e_f/\tau_k = t,$
   $\tau_{k+1} = t + \Delta t,\ \ \eta_k = n,\ \xi_0^{(n)} = d_0^{(n)},\ \ \gamma^{(n)}(t) > \Delta t, \}$
   де $\gamma^{(n)}(t)$ — перестрибування процесу $\xi^{(n)}(t)$ у момент t:
   $\gamma^{(n)}(t) = \inf\{\Delta t : \xi^{(n)}(t + \Delta t) \neq \xi^{(n)}(t)\}$,
   тобто $R^{+(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_f),\ t \ge \tau_0,\ \Delta t \ge 0,\ n = \overline{1, N}$, — ймовірність того, що ПП, підключений до n-го каналу в момент t упродовж проміжку часу Δt, виявить шукане повідомлення, яке справді перебувало у даному каналі в момент t та не залишило цей канал до закінчення проміжку часу $t + \Delta t$;

2. $R^{-(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_f) = P\{\zeta_{k+1} = e_f,\ \ \xi^{\eta_k}(\tau_k) = e_f/\tau_k = t,$
   $\tau_{k+1} = t + \Delta t,\ \ \eta_k = n,\ \ \xi_0^{(n)} = d_0^{(n)},\ \ \gamma^{(n)}(t) < \Delta t\}$,
   тобто $R^{-(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_f),\quad t \ge \tau_0,\quad \Delta t > 0,\quad n = \overline{1, N}$, — ймовірність того, що ПП, підключений до n-го каналу в момент t впродовж проміжку часу Δt, виявить шукане повідомлення, яке справді перебувало в даному каналі в момент t, та залишило цей канал до закінчення моменту часу $t + \Delta t$;

3. $R^{(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_m) = P\{\zeta_{k+1} = e_f,$
   $\xi^{\eta_k}(\tau_{k+1}) = e_f/\tau_k = t + \Delta t,\ \ \eta_k = n,\ \ \xi_0^{(n)} = d_0^{(n)}\},\ \ m \neq f,$
   тобто $R^{(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_m),\ \ m \neq f,\ \ t \ge \tau_0,\ \ \Delta t \ge 0,$

$n = \overline{1, N}$, — ймовірність того, що ПП, підключений до n-го каналу в момент t упродовж проміжку часу Δt, виявить шукане повідомлення e_f саме в той проміжок часу, коли там у момент t перебувало не шукане повідомлення e_m.

Функції

$$R^{+(n)}_{d_0^{(n)}, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_f), \quad R^{-(n)}_{d_0^{(n)}, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_f),$$

$$R^{(n)}_{d_0^{(n)}, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_f), \quad m \neq f,$$

знайдемо відповідно до формули повної ймовірності за кінцевим стрибком неоднорідного за часом напівмарковського процесу $\xi^{(n)}(t)$, використовуючи ймовірнісну інтерпретацію функції щільності марковського відновлення.

Функція $R^{+(n)}_{d_0^{(n)}, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_f)$ — подія, яка відбувається тоді, коли ПП, підключений до n-го каналу в момент t упродовж проміжку часу Δt, виявить шукане повідомлення, яке справді перебувало в цьому каналі в момент t і не залишило його до моменту $t + \Delta t$.

У цій ситуації можуть відбуватися такі події:

а) у випадку, коли $d_0^{(n)} = e_f$, якщо шукане повідомлення не залишило канал до моменту $t + \Delta t$ (ймовірність цієї події $\overline{Q}^{(n)}(t_0, t + \Delta t, e_f, E)$) і якщо за час контролю Δt та час розпізнавання Δt ПП правильно розпізнав шуканий об'єкт, то ймовірність цієї події буде $P^{(n)}(\Delta t, \Delta t, e_f/e_f)$.

б) у випадку, коли $d_0^{(n)} \neq e_f$, ця подія можлива за умови, що шукане повідомлення з'явилося в каналі у деякий момент s ($t_0^{(n)} < s < t$) і не залишило його до моменту $t + \Delta t$. Тоді ймовірність правильного розпізнавання ПП шуканого повідомлення буде $P^{(n)}(\Delta t, \Delta t, e_f/e_f)$. Тепер момент s появи шуканого повідомлення в каналі, тобто момент останнього до моменту t стрибка неоднорідного за часом напівмарковського процесу $\xi^{(n)}(t)$, — випадкова величина, щільність розподілу якої буде $h^{(n)}(t_0^{(n)}, s, d_0^{(n)}, e_f)\, Q^{(n)}(s, t + \Delta t, e_f, E)$.

Інтегруванням відносно цієї щільності одержуємо співвідношення

$$R^{+(n)}_{d_0^{(n)}, t_0^{(n)}}(t, \Delta t, e_f/e_f) = \Big[\delta_{d_0^{n}, e_f}\, Q^{(n)}(t_0^{(n)}, t + \Delta t, e_f, E) +$$

$$+\int\limits_{t_0^{(n)}}^{t} ds\, h^{(n)}(t_0^{(n)},\, s,\, d_0^{(n)},\, e_f)\, Q^{(n)}(s,\, t+\Delta t,\, e_f,\, E)\Big]\, P^{(n)}(\Delta t,\, \Delta t,\, e_f). \tag{2}$$

Функція $R^{-(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t,\, \Delta t,\, e_f/e_f)$ — подія, яка відбувається тоді, коли ПП, підключений до n-го каналу в момент t упродовж проміжку часу Δt, виявить шукане повідомлення, яке справді перебувало в цьому каналі в момент t і залишило його до моменту $t+\Delta t$.

У цій ситуації можуть відбуватися такі події:

в) у випадку, коли $d_0^{(n)} = e_f$, якщо шукане повідомлення вперше вийшло з каналу в момент $T,\ t < T < t+\Delta t$, ймовірність цієї події буде $P^{(n)}(T-t,\, \Delta t,\, e_f/e_f)$. Момент T виходу даного повідомлення з каналу, тобто момент першого стрибка ймовірнісного процесу $\xi^{(n)}(t)$ — випадкова величина із щільністю розподілу $q^{(n)}(t_0^{(n)},\, T,\, d_0^{(n)},\, E)$.

г) у випадку, коли $d_0^{(n)} \neq e_f$, ця подія можлива за умови, що шукане повідомлення з'явилося в каналі в деякий момент $s,\ t_0^{(n)} < s < t$, і залишило канал у момент $t < T < t+\Delta t$. Ймовірність цієї події буде $P^{(n)}(T-t,\, \Delta t,\, e_f/e_f)$. Звідси, моменти $s,\ t$ потрапляння до каналу та виходу з нього відповідно, тобто моменти передостаннього та останнього стрибків процесу $\xi^{(n)}(t)$, є двовимірною випадковою величиною із щільністю розподілу

$$h^{(n)}(t_0^{(n)}, s, d_0^{(n)}, e_f)\, q(s, T, e_f, E).$$

Інтегруванням відносно цих щільностей одержуємо співвідношення

$$R^{-(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t,\, \Delta t,\, e_f/e_f) = \delta_{d_0^{(n)},\, e_f} \int\limits_{t}^{t+\Delta t} dT\, q^{(n)}(t_0^{(n)},\, T,\, d_0^{(n)},\, e_f)\times$$
$$\times P^{(n)}(T-t,\, \Delta t,\, e_f/e_f) + \int\limits_{t_0^{(n)}}^{t} ds\, h^{(n)}(t_0^{(n)},\, s,\, d_0^{(n)},\, e_f)\times$$
$$\times \int\limits_{t}^{t+\Delta t} dT\, q^{(n)}(s,\, T,\, e_f,\, E)\, P^{(n)}(T-t,\, \Delta t,\, e_f/e_f). \tag{3}$$

Функція $R^{(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t,\, \Delta t,\, e_f/e_m),\ m \neq f,$ — подія, яка відбувається тоді, коли ПП, підключений до n-го каналу у момент t упродовж проміжку часу Δt, виявить у каналі шукане повідомлення e_f, яке насправді є повідомленням типу e_m.

У цій ситуації можуть відбуватися такі події:

д) у випадку, коли $d_0^{(n)} = e_f$, якщо повідомлення e_m залишило канал у момент $T,\ t < T < t + \Delta t$, або після моменту $t + \Delta t$. Для першої умови ймовірність події буде $P^{(n)}(T - t,\, \Delta t,\, e_f/e_m)$, для другої — $P^{(n)}(\Delta t,\, \Delta t,\, e_f/e_m)$. Момент T виходу повідомлення e_m з каналу, тобто момент першого стрибка процесу $\xi^{(n)}$ — випадкова величина із щільністю розподілу $q^{(n)}(t_0^{(n)},\, T,\, e_m, E)$;

є) у випадку, коли $d_0^{(n)} \neq e_f$, за умови, що повідомлення e_m у черговий раз потрапило до каналу в момент $s,\ \tau_0 < s < t$, і вийшло з нього або у момент $T,\ t < T < t+\Delta t$, або після моменту $t+\Delta t$. Ймовірність таких подій буде $P^{(n)}(T-t,\, \Delta t,\, e_f/e_m)$ або $P^{(n)}(\Delta t,\, \Delta t,\, e_f/e_m)$.

Таким чином, моменти s та T появи та виходу повідомлення e_m з каналу, тобто моменти передостаннього та останнього стрибків процесу $\xi^{(n)}(t)$, є двовимірною випадковою величиною із щільністю розподілу

$$h^{(n)}(t_0^{(n)},\, s,\, d_0^{(n)},\, e_m)\, q^{(n)}(s,\, T,\, e_m,\, E).$$

Інтегруванням відносно цих щільностей одержуємо співвідношення

$$\begin{aligned}
R^{(n)}_{d_0^{(n)},\, t_0^{(n)}}(t,\, \Delta t,\, e_f/e_m) = \delta_{d_0^{(n)},\, e_m}\Big[\int_t^{t+\Delta t} dT\, q^{(n)}(t_0^{(n)},\, T,\, e_m,\, E)\times \\
\times P^{(n)}(T-t,\, \Delta t,\, e_f/e_m) + \overline{Q}^{(n)}(t_0^{(n)},\, t+\Delta t,\, e_m,\, E)\, P^{(n)}(\Delta t,\, \Delta t,\, e_f/e_m)\Big] + \\
+ \int_{t_0^{(n)}}^{t} ds\, h^{(n)}(t_0^{(n)},\, s,\, d_0^{(n)},\, e_m)\Big[\int_t^{t+\Delta t} dT\, q^{(n)}(s,\, T,\, e_m,\, E)\times \\
\times P^{(n)}(T - t,\, \Delta t,\, e_f/e_m) + \overline{Q}^{(n)}(s,\, t+\Delta t,\, e_m,\, E)\, P^{(n)}(\Delta t,\, \Delta t,\, e_f/e_m)\Big].
\end{aligned} \tag{4}$$

Оскільки ПП подає інформацію про тип повідомлення тільки поза часом контролю, ймовірність виявлення більш ніж одного шуканого повідомлення впродовж часового проміжку контролю дорівнює нулю. З цього випливає, що математичне сподівання кількості правильних розпізнавань повідомлень шуканого типу на інтервалі $(t,\, t + \Delta t)$

в n-му каналі буде

$$M_{a,\,e}(t,\,t+\Delta t)=R^{+(n)}_{d_0^{(n)},\,t_0^{(n)}}(t,\,\Delta t,\,e_f/e_f)+$$

$$+R^{-(n)}_{d_0^{(n)},\,t_0^{(n)}}(t,\,\Delta t,\,e_f/e_f)\overset{def}{=}R^{(n)}_{d_0^{(n)},\,t_0^{(n)}}(t,\,\Delta t). \tag{5}$$

У подальшому можна застосовувати позначення

$$R_c^{(n)}(\Delta t)\overset{def}{=}\lim_{t\to\infty}R^{(n)}_{d_0,\,t_0}(t,\Delta t), \tag{6}$$

якщо така границя існує і не залежить від $d_0^{(n)},\,t_0^{(n)}$.

Скориставшись властивістю математичного сподівання суми випадкових величин, отримаємо

$$M_{a,\,e}(\tau,\,t)=\sum_{k=0}^{\nu_{a,\tau}(t)}M_{a,\,e}(\tau_k,\,\tau_{k+1})=\sum_{k=0}^{\nu_{a,\tau}(t)}R_{d_0^{(\eta_k)},\,t_0^{(\eta_k)}}(\eta_k,\tau_{k+1}-\tau_k), \tag{7}$$

де $\tau_{a,\,\tau}(t)+1\overset{def}{=}t$.

4. Циклічний пошук заданого об'єкту

Проілюструємо викладене вище на модельному прикладі циклічного пошуку заданого інформативного повідомлення у багатоканальній системі зв'язку.

Щоб знайти оптимальну траєкторію руху ПП по каналах зв'язку, задамо певні вимоги щодо переміщення одного ПП у системі зв'язку з N каналами. Нехай ПП невипадковим чином, циклічно переглядає кожен з N каналів по одному разу на кожному циклі. Час контролю кожного з каналів дорівнює Δt.

Стратегія переміщення ПП на кожному циклі пошуку залежить від інформації, отриманої на попередньому проході всіх каналів.

Потрібно визначити таку невипадкову стратегію руху ПП на $(i+1)$-му циклі, щоб математичне сподівання кількості правильних розпізнавань шуканого повідомлення було максимальним.

Математичне сподівання кількості правильних розпізнавань шуканих повідомлень на $(i+1)$-му циклі пошуку відповідно до (7) має вигляд

$$M_{a,\,e}(iN\Delta t,\,(i+1)N\Delta t)=\sum_{k=0}^{N-1}R^{(\eta_k)}_{d^{(\eta_k)},\,t^{(\eta_k)}}(k\Delta t,\,\Delta t), \tag{8}$$

де $d^{(n)}$ — інформація, отримана від ПП про номер повідомлення, яке перебувало в n-му каналі в момент $t^{(n)}$ початку його перегляду на попередньому циклі.

Таким чином, ми одержали задачу, яка в теорії оптимізації відома як задача про призначення:

$$\sum_{i,j=1}^{N} C_{ij}X_{ij} \to \max, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, N}, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, N}, \tag{11}$$

$$X_{ij} \in \{0,\, 1\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \tag{12}$$

де $C_{ij} = R^{(j)}_{d^{(j)},\, t^{(j)}}((i-1)\Delta t,\, \Delta t), \quad i, j = \overline{1, N}$.

Умови (12) виводять задачу про призначення із класу задач лінійного програмування, бо вони є нелінійними. Однак на практиці задачу (9)–(12) можна розглядати як окремий випадок транспортної і, відповідно, лінійної задачі. Дійсно, якщо умови (12) замінити на умови

$$X_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \tag{13}$$

то система співвідношень (9)–(11), (13) зводиться до транспортної задачі, а умови (12) виконуються автоматично, якщо застосувати метод, яким отримують цілочисельний оптимальний розв'язок.

У частинному випадку, якщо

$$R^{(j)}_{d^{(j)},\, t^{(j)}}((i-1)\Delta t,\, \Delta t) = k(j)\Delta t(i-1) + d(j), \quad i = \overline{1, N},$$

де $k(j),\ d(j) -$ const, $k(j) > 0$, тобто математичне сподівання кількості правильних розпізнавань шуканого повідомлення у j-му каналі, $j = \overline{1, N}$, лінійно залежить від моменту його перегляду, оптимальним є перегляд каналів у порядку зростання коефіцієнтів $k(j)$. Таким чином, у першу чергу треба переглядати канали з меншою швидкістю зростання математичного сподівання правильних розпізнавань шуканого повідомлення без урахування величин $d(j)$.

В іншому тривіальному випадку, якщо

$$R^{(j)}_{d^{(j)},\,t^{(j)}}((i-1)\Delta t,\,\Delta t) = d(j),\;\; d(j)>0,\;\; i=\overline{1,N},$$

тобто математичне сподівання кількості правильних розпізнавань шуканого повідомлення у j-му каналі, $j=\overline{1,N}$, не залежить від моменту перегляду, то кількісний показник ефективності пошуку не залежить від черговості перегляду каналів.

[1] *Шлепаков Л.Н., Вовкодав Н.Г.* Оптимальный поиск движущихся объектов в дискретной области // Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **79**. — 144 с.

[2] *Шлепаков Л.Н., Вовкодав Н.Г.* Избирательный поиск и распознавание движущихся объектов // Препринт Ин-та математики НАН Украины, 81.11 — Киев, 1994. — 51 с.

[3] *Тонконогов Ю.М.* Об условных временных характеристиках последовательного анализа //Мат. статистика и ее применение. — 1980. — Вып. 6. — С. 84–88.

[4] *Шлепаков Л.Н.* Методы численного решения задач субоптимального поиска // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 1. — С. 381–397.

[5] *Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.М., Турбин А.Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 276 с.

[6] *Королюк В.С.* Стохастические модели систем. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.

[7] *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их применения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 234 с.