Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 8–17

УДК 531/534

И.В. Балабанов, Т.В. Балабанова

Национальный технический ун-т Украины "КПИ" , Киев
E-mail: balabanova@gmail.com

Разработка упругого подвеса заданной жесткости

В окремих випадках пружних систем, зокрема, в системах пасивного віброзахисту, потрібні строго регламентовані жорсткістні характеристики їх просторових пружних підвісів.
В дослідженні, що пропонується представлена методика визначення характеристик нових додаткових зв'язків, що забезпечують необхідні жорсткістні характеристики всьому пружному підвісу. Отримано аналітичні формули, що встановлюють однозначну залежність між матрицями жорсткості всього пружного підвісу і його окремими елементами. Розглянуто приклад аналітичного розрахунку пружного підвісу із заданими характеристиками.

Введение. В качестве объекта исследования рассматривается упругая пространственная конструкция, в соответствие которой ставится упорядоченная система из n узлов с упругими связями между ними. Причем 1–ый узел жестко связан с полюсом, а n-ый узел — с основанием. К тому же в рассматриваемой конструкции, с помощью дополнительно вводимой между узлами i и j новой упругой связи, существует возможность изменения жесткости между полюсом и основанием.

Целью представленных исследований является определение жесткостных характеристик новой упругой связи $\left(C^{(H)}_{[i,j]}\right)$, дополнительно вводимой в рассматриваемую конструкцию для получения заданной жесткости $\left(C^{(H)}_{[1,n](\forall k,\ k=\overline{2,n-1})}\right)$.

Решение задачи. Поставленная задача будет решаться с помощью метода узловой конденсации (МУК) [1]. Абсолютно очевидно, что в результате соответствующих эквивалентных преобразований МУК, которые состоят в последовательном исключении узлов $(\forall k,\ k=\overline{2,n-1}, k\neq i,j)$ исходной системы, в общем случае получается система стандартного вида (рис.1), содержащая четыре узла $(1,i,j,n)$ и шесть межузловых упругих связей, характеризуемых соответствующими матрицами жесткости,

$$\begin{aligned} &C_{[1,i]}=C^T_{[i,1]};\ C_{[1,j]}=C^T_{[j,1]};\ C_{[1,n]}=C^T_{[n,1]};\\ &C_{[i,j]}=C^T_{[j,i]};\ C_{[i,n]}=C^T_{[n,i]};\ C_{[j,n]}=C^T_{[n,j]}. \end{aligned} \tag{1}$$

Причем жесткость $C_{[1,n](i,j)}$ преобразованной согласно МУК эквивалентной системы в точности соответствует жесткости $C^{(0)}_{[1,n]\forall k,\ k=\overline{2,n-1}}$ исходной системы:

$$C_{[1,n](i,j)}\equiv C^{(0)}_{[1,n]\forall k,\ k=\overline{2,n-1}}. \tag{2}$$

Определим зависимость жесткостных характеристик результирующей матрицы жесткости $C^{(H)}_{[1,n](i,j)}$ упругой системы от новой (дополнительной) упругой связи $C^{(H)}_{(i,j)}$.

Расчет методом узловой конденсации результирующей матрицы жесткости $C^{(H)}_{[1,n](i,j)}$ исследуемой упругой системы, при существовании между узлами i и j новой (дополнительной) упругой связи $C^{(H)}_{(i,j)}$, позволяет получить следующие матрицы жесткости при последовательном исключении узлов i и j в преобразованных системах (рис.2):

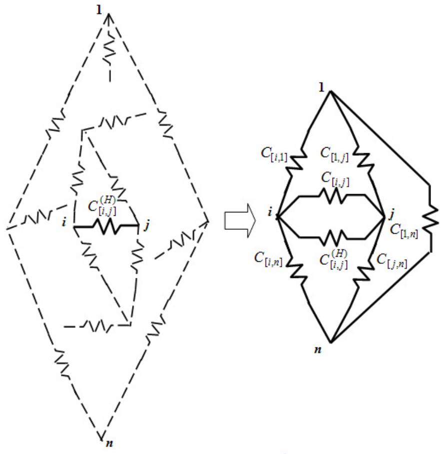

Рис. 1: Преобразование исходной системы в систему стандартного вида.

— исключенный i–ый узел,

$$C^{(H)}_{[1,n](i)} = C_{[1,n]} + C_{[1,i]}\left(C_{[i,1]} + C_{[i,n]} + C_{[i,j]} + C^{(H)}_{[i,j]}\right)^{-1} C_{[i,n]};$$

$$C^{(H)}_{[n,1](i)} = \left(C^{(H)}_{[1,n](i)}\right)^{T};$$

$$C^{(H)}_{[1,j](i)} = C_{[1,j]} + C_{[1,i]}\left(C_{[i,1]} + C_{[i,n]} + C_{[i,j]} + C^{(H)}_{[i,j]}\right)^{-1} \times$$

$$\times\left(C_{[i,j]} + C^{(H)}_{[i,j]}\right); \quad C^{(H)}_{[j,1](i)} = (C^{(H)}_{[1,j](i)})^{T};$$

$$C^{(H)}_{[j,n](i)} = C_{[j,n]} + \left(C_{[j,i]} + C^{(H)}_{[j,i]}\right) \times$$

$$\times\left(C_{[i,1]} + C_{[i,n]} + C_{[i,j]} + C^{(H)}_{[i,j]}\right)^{-1} C_{[i,n]}; C^{(H)}_{[n,j](i)} = \left(C^{(H)}_{[j,n](i)}\right)^{T}, \tag{3}$$

— исключенные i–ый и j–ый узлы,

$$\begin{gathered}C^{(H)}_{[1,n](i,j)} = C^{(H)}_{[1,n](i)} + C^{(H)}_{[1,j](i)} \left(C^{(H)}_{[j,1](i)} + C^{(H)}_{[j,n](i)}\right)^{-1} C^{(H)}_{[j,n](i)};\\ C^{(H)}_{[n,1](i,j)} = \left(C^{(H)}_{[1,n](i,j)}\right)^{T}.\end{gathered} \tag{4}$$

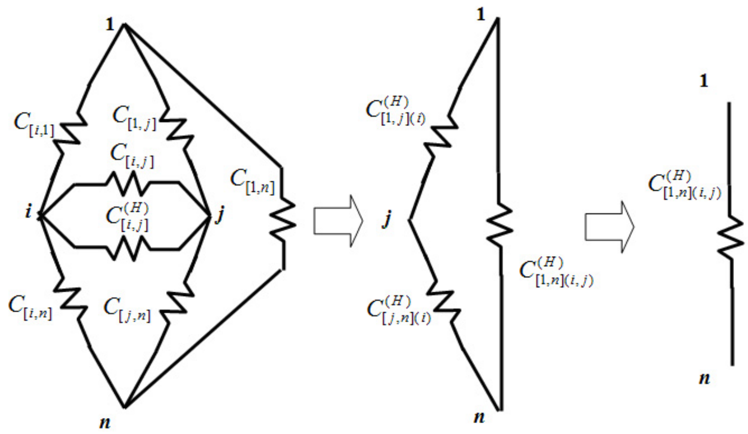

Рис. 2: Преобразование методом узловой конденсации системы стандартного вида.

В соответствии с выражениями (3) и (4) результирующая матрица жесткости $C^{(H)}_{[1,n](i,j)}$, при введении между узлами i и j новой упругой связи $C^{(H)}_{[i,j]}$, будет описываться следующим выражением:

$$\begin{gathered}C^{(H)}_{[1,n](i,j)} = C_{[1,n]} + \left(C_{[1,i]} + C_{[1,j]}\right) C_{\Sigma}^{-1} \left(C_{[i,n]} + C_{[j,n]}\right) -\\ -[C_{[1,i]} C_{\Sigma}^{-1} \left(C_{[1,j]} + C_{[n,j]}\right) - C_{[1,j]} C_{\Sigma}^{-1} \left(C_{[1,i]} + C_{[n,i]}\right)] \times\\ \times C_{H}^{-1} [\left(C_{[i,1]} + C_{[i,n]}\right) C_{\Sigma}^{-1} C_{[j,n]} - \left(C_{[j,1]} + C_{[j,n]}\right) C_{\Sigma}^{-1} C_{[i,n]}],\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$C_{\Sigma} = C_{[i,1]} + C_{[i,n]} + C_{[j,1]} + C_{[j,n]},$$
$$C_H = C^{(H)}_{[i,j]} + C_{[i,j]} + \left(C_{[i,1]} + C_{[i,n]}\right) C_{\Sigma}^{-1} \left(C_{[1,j]} + C_{[n,j]}\right). \tag{6}$$

При наличии абсолютно жесткой новой связи между узлами i и j, получаем следующую формулу для результирующей жесткости $C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)}$:

$$C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)} = C_{[1,n]} + \left(C_{[1,i]} + C_{[1,j]}\right) C_{\Sigma}^{-1} \left(C_{[i,n]} + C_{[j,n]}\right). \tag{7}$$

Если новая упругая связь между узлами i и j отсутствует, то получим результирующую матрицу жесткости $C^{(0)}_{[1,n](i,j)}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} C^{(0)}_{[1,n](i,j)} &= C_{[1,n]} + \left(C_{[1,i]} + C_{[1,j]}\right) C_{\Sigma}^{-1} \left(C_{[i,n]} + C_{[j,n]}\right) - \\ &-[C_{[1,i]} C_{\Sigma}^{-1} \left(C_{[1,j]} + C_{[n,j]}\right) - \\ &-C_{[1,j]} C_{\Sigma}^{-1} \left(C_{[1,i]} + C_{[n,i]}\right)] C_0^{-1} [\left(C_{[i,1]} + C_{[i,n]}\right) C_{\Sigma}^{-1} C_{[j,n]} - \\ &- \left(C_{[j,1]} + C_{[j,n]}\right) C_{\Sigma}^{-1} C_{[i,n]}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$C_0 = C_{[i,j]} + \left(C_{[i,1]} + C_{[i,n]}\right) C_{\Sigma}^{-1} \left(C_{[1,j]} + C_{[n,j]}\right). \tag{9}$$

Несложно доказать [2], что все три результирующие матрицы $C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)}, C^{(H)}_{[1,n](i,j)}$ и $C^{(0)}_{[1,n](i,j)}$ являются положительно определенными. При этом матрицы жесткости C_{Σ} и C_0 также будут положительно определенными, являясь результирующими матрицами определенным образом видоизмененной исходной схемы. В свою очередь матрица жесткости $C^{(H)}_{[i,j]}$, описывающая новую упругую связь между узлами i и j, будет положительно определенной, как отдельный упругий элемент, не подвергаемый соответствующим МУК преобразованиям.

Проведем исследование формул (8) и (5), описывающих результирующие матрицы жесткости $C^{(0)}_{[1,n](i,j)}$ и $C^{(H)}_{[1,nj](i,j)}$,

$$C^{(0)}_{[1,n](i,j)} = C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)} - C_L^T C_0^{-1} C_L;\; C^{(H)}_{[1,n](i,j)} = C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)} - C_L^T C_H^{-1} C_L, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} &C_H = C^{(H)}_{[i,j]} + C_0; \\ &C_L = (C_{[i,1]} + C_{[i,n]}) C_\Sigma^{-1} C_{[j,n]} - (C_{[j,1]} + C_{[j,n]}) C_\Sigma^{-1} C_{[i,n]}. \end{aligned} \tag{11}$$

На основании формул (10) получим

$$C^{(H)}_{[1,n](i,j)} - C^{(0)}_{[1,n](i,j)} = C_L^T (C_0^{-1} - C_H^{-1}) C_L. \tag{12}$$

С целью упорядочивания проведем сравнение положительно определенных матриц жесткости $C^{(0)}_{[1,n](i,j)}, C^{(H)}_{[1,n](i,j)}$ и $C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)}$.

Из формул (11) следует

$$C_H \geq C_0, \quad C_H^{-1} \leq C_0^{-1}. \tag{13}$$

Значит, на основании выражений (10), а также (12) и (13) можем записать

$$C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)} \geq C^{(H)}_{[1,n](i,j)}; \quad C^{(H)}_{[1,n](i,j)} \geq C^{(0)}_{[1,n](i,j)}. \tag{14}$$

Полученные выражения (14) подтверждают тот факт, что включение в состав исследуемой системы новой (дополнительной) упругой связи не может снизить результирующую жесткость этой упругой системы.

Отметим, что неравенства (14) эквивалентны следующим условиям [2]:

$$\rho[C^{(H)}_{[1,n](i,j)} \left(C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)} \right)^{-1}] \leq 1; \quad \rho[C^{(0)}_{[1,n](i,j)} \left(C^{(H)}_{[1,n](i,j)} \right)^{-1}] \leq 1, \tag{15}$$

где $\rho[\cdot]$ — спектральный радиус соответствующей матрицы.

Рассматривая выражения (9), (10) и (11), видим однозначную зависимость результирующей матрицы жесткости $C^{(H)}_{[1,n](i,j)}$ от матрицы жесткости $C^{(H)}_{[i,n]}$, описывающей дополнительную упругую связь между узлами i и j,

$$C^{(H)}_{[1,n](i,j)} = C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)} - C_L^T \left(C_0 + C^{(H)}_{[i,j]} \right)^{-1} C_L. \qquad (16)$$

Решая задачу, обратную выражению (16), получим формулу для определения матрицы жесткости $C^{(H)}_{[i,n]}$ новой упругой связи, расположенной между узлами i и j, обусловливающей величину $C^{(H)}_{[1,n](i,j)}$ результирующей матрицы жесткости:

$$C^{(H)}_{[i,j]} = -C_0 + C_L \left(C^{(Ж)}_{[1,n](i,j)} - C^{(H)}_{[1,n](i,j)} \right)^{-1} C_L^T. \qquad (17)$$

На основании проведенных исследований можем представить методику определения характеристик новых (дополнительных) связей, требуемых для получения в упругом подвесе необходимых жесткостных характеристик.

Методика определения характеристик новых (дополнительных) упругих связей. Определение жесткостных характеристик новых (дополнительных) связей осуществляется в следующем порядке.

1. Задается желаемая величина результирующей матрицы жесткости исходной упругой системы:
— выбирается численное значение положительно определенной матрицы жесткости $C^{(H)}_{[1,n](\forall k,\ k=\overline{2,n-1})}$.

2. Посредством исключения узлов осуществляется (согласно МУК) приведение к стандартному виду (рис.2) исходной упругой системы: — определяются численные значения матриц жесткости упругих межузловых связей $C_{[1,n]}$; $C_{[1,i]}$; $C_{[1,j]}$; $C_{[i,n]}$; $C_{[j,n]}$; $C_{[i,j]}$, а также $C_{[n,1]} = C^T_{[1,n]}$;

$C_{[i,1]} = C^T_{[1,i]}$; $C_{[j,1]} = C^T_{[1,j]}$; $C_{[n,i]} = C^T_{[i,n]}$; $C_{[n,j]} = C^T_{[j,n]}$; $C_{[j,i]} = C^T_{[i,j]}$.

3. Производится проверка принципиальной возможности достижения (посредством введения новой дополнительной связи) требуемой величины результирующей матрицы жесткости исходной упругой системы:
— по формулам (5)–(9) рассчитываются численные значения положительно определенных матриц жесткости $C^{(\text{Ж})}_{[1,n](i,j)}$ и $C^{(0)}_{[1,n](i,j)}$, а также $C^{(H)}_{[1,n](i,j)} = C^{(H)}_{[1,n](\forall k,\ k=\overline{2,n-1})}$;
— определяются собственные числа $\lambda^{(\text{Ж})}_k$, $(k = \overline{1,6})$ и $\lambda^{(0)}_k$, $(k = \overline{1,6})$ матриц жесткости $C^{(H)}_{[1,n](i,j)}(C^{(\text{Ж})}{}_{[1,n](i,j)})^{-1}$ и $C^{(0)}_{[1,n](i,j)}(C^H{}_{[1,n](i,j)})^{-1}$;
— проверяется выполнение неравенств $\rho[C^{(H)}{}_{[1,n](i,j)}(C^{\text{Ж}}{}_{[1,n](i,j)})^{-1}] \leq 1$ и $\rho[C^{(0)}_{[1,n](i,j)}(C^H{}_{[1,n](i,j)})^{-1}] \leq 1$, где $\rho[\cdot] \equiv \max\{|\lambda_k|\}; \lambda_k, (k = \overline{1,6})$ — спектральный радиус соответствующей матрицы.

4. Определяется величина матрицы жесткости новой дополнительной связи:
— по формулам (6), (7), (9), (11) и (17) выполняется расчет численного значения положительно определенной матрицы жесткости $C^{(H)}_{i,j}$.

Пример расчета. Рассмотрим, для примера, наиболее простой случай упругого подвеса (рис.3).

В рассматриваемом упругом подвесе, по сравнению с общим случаем упругого подвеса (рис.2), отсутствуют некоторые упругие связи:

$$\begin{gathered} C_{[1,j]} = C^T_{[j,1]} = 0;\ C_{[n,i]} = C^T_{[i,n]} = 0; \\ C_{[1,n]} = C^T_{[n,1]} = 0;\ C_{[i,j]} = C^T_{[j,i]} = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

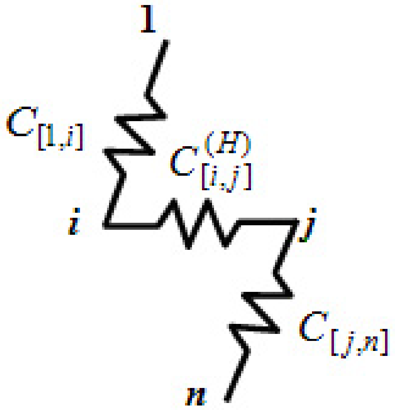

Рис. 3: Схема упругого подвеса, рассматриваемого в качестве примера.

При этом является очевидным, что присутствующие упругие связи в силу … будут описываться положительно определенными матрицами жесткости, для которых, из-за их симметричности, справедливы следующие равенства:

$$C_{[i,j]} = C_{[j,i]},\ C_{[i,1]} = C_{[1,i]},\ C_{[n,j]} = C_{[j,n]}. \tag{19}$$

Тогда, в соответствии с выражениями (6)–(11) и (19), имеем

$$\begin{aligned} &C_\Sigma = C_{[i,1]} + C_{[j,n]},\quad C^{(0)}_{[1,n](i,j)} = 0,\\ &C_H = C_0 = C_L = C^{\text{Ж}}{}_{[1,n](i,j)} = \left(C^{-1}_{[i,1]} + C^{-1}_{[n,j]}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Согласно формулам (14) и (20), если выполняется выражение

$$0 \le C^{(H)}_{[1,n](i,j)} \le \left(C^{-1}_{[i,1]} + C^{-1}_{[n,j]}\right)^{-1},$$

то, в соответствии с выражениями (17) и (20), матрица жесткости $C^{(H)}{}_{[i,j]}$ новой упругой связи, расположенной между узлами

i и j, обусловливающая величину $C^{(H)}{}_{[1,n](i,j)}$ результирующей матрицы жесткости, будет описываться следующей формулой:

$$C^{(H)}{}_{[i,j]} = \left[\left(C^{(H)}_{[1,n](i,j)} \right)^{-1} - C^{-1}_{[i,1]} - C^{-1}_{[n,j]} \right]^{-1}.$$

Заключение. Таким образом, приведенная методика позволяет разрабатывать конструкцию упругого подвеса с заданными жесткостными характеристиками, предназначенную, например, для системы пассивной виброзащиты.

Литература

[1] *Балабанов И.В., Балабанова Т.В.* Метод узловой конденсации для расчета упругих пространственных систем //Аналітична механіка та її застосування: Збірник праць інституту математики НАН України, — К.:Ін–т математики НАН України, 2012. — Т.9. — №1. — С.11–37.

[2] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер.с англ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.