

УДК 531.534

И.В. Балабанов, Т.В. Балабанова, Ю.И. Бондарь

Национальный технический ун-т Украины "КПИ" , Киев

E-mail: tvbalabanova@gmail.com

Метод конечно-элементной аппроксимации для исследования дивергенции крыла самолета

Пропонується метод скінченно-елементної апроксимації (МК–ЕА), призначений для дослідження схильних до аеродинамічного впливу конструкцій та, зокрема, для визначення величини швидкості літальних апаратів, при якій настає явище дивергенції, нестійкого відносного руху конструктивних елементів.

Згідно МК–ЕА реальна конструкція замінюється набором еквівалентних скінченних елементів, що містять пружну і аеродинамічну частини. При цьому показано, що аналогічні властивості еквівалентного скінченного елемента має базовий фрагмент МК–ЕА, що складається з пружного і антипружного елементів, на основі якого будується розрахункова схема. Обчислювальним ядром МК–ЕА служить метод вузлової конденсації, в якому крім традиційних пружних елементів, що обумовлюють виникнення пружних відновлювальних сил, вводяться антипружні елементи, що характеризують дію перекидальних аеродинамічних моментів.

Наведено приклад застосування розробленого методу для розрахунку швидкості дивергенції прямого крила літака. Порівняння результатів розрахунку з точним рішенням показало високу ефективність МК–ЕА.

Введение. Метод конечно-элементной аппроксимации (МК-ЭА) предназначен для численного и аналитического расчета конструкций, подверженных аэродинамическому воздействию.

Целью МК-ЭА является исследование действия аэродинамических сил на конструктивные элементы изделия и, в частности, определение величины скорости летательных аппаратов, при которой наступает явление дивергенции, неустойчивого относительного движения элементов конструкции.

Основой МК-ЭА служит метод узловой конденсации (МУК) [1], в котором помимо традиционных упругих элементов, обуславливающих возникновение упругих восстанавливающих сил, вводятся антиупругие элементы, характеризующие действие опрокидывающих аэродинамических моментов. При этом реальная конструкция (например, крыло самолета) фактически заменяется набором эквивалентных конечных элементов, содержащих упругую и аэродинамическую части (рис.1).

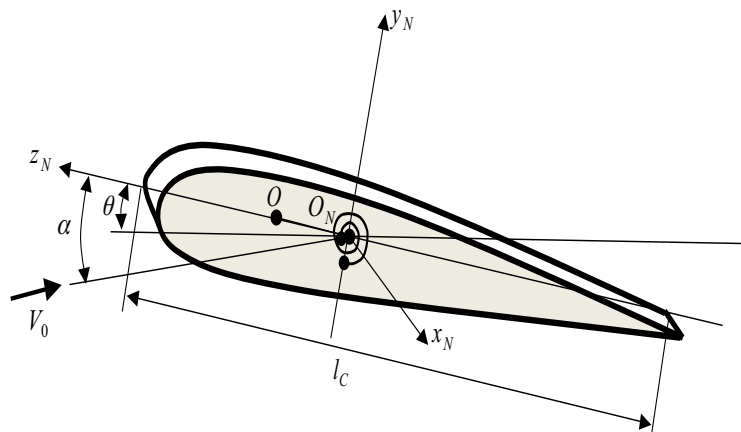


Рис. 1: Эквивалентный конечный элемент крыла самолета.

Рассмотрим свойства эквивалентного конечного элемента

крыла самолета, разделенного на n участков.

Каждый из участков характеризуется своим углом атаки $\alpha_i (i = \overline{1, n})$ и углом упругого закручивания $\theta_i (i = \overline{1, n})$, которые измеряются на конце участка (рис.1).

При этом является очевидным, что $\alpha_i = \sum_{l=1}^i \theta_l$.

Проведем анализ действующих на рассматриваемый конечный элемент обобщенных сил. При этом в соответствии с поставленной задачей ограничимся исследованием взаимодействия только упругих и аэродинамических сил.

Таким образом, в конце i -го участка действует система следующих обобщенных сил:

- упругий восстанавливающий момент $M_{Ci} = c_{[i-1, i]4, 4} \theta_i$;
- аэродинамический опрокидывающий момент $M_{Ai} = a_{[0, i]4, 4} \alpha_i$.

Здесь коэффициенты $c_{[i-1, i]4, 4}$ и $a_{[i-1, i]4, 4}$ представляют собой соответствующие элементы матриц жесткости $C_{[i-1, i]}$ и антижесткости $A_{[i-1, i]}$, описывающие угловые упругую жесткость и аэродинамическую антижесткость эквивалентного конечного элемента относительно оси Ox_N системы нормальных координат $Ox_N y_N z_N$ (рис.1).

Является очевидным, что отмеченными свойствами эквивалентного конечного элемента будет обладать базовый фрагмент расчетной схемы МК-ЭА, состоящий из упругого и антиупругого элементов, соединяющих базовый узел (i) соответственно с предыдущим ($i - 1$)-ым узлом и с основанием (рис.2).

Описание расчетной схемы объекта исследования. Рассмотрим методику построения расчетной схемы МК-ЭА, в которую преобразуется подлежащая расчету пространственная упругая конструкция, подверженная аэродинамическому воздействию.

Построение расчетной схемы, соответствующей исследуемой конструкции, проводится следующим образом:

- в расчетной схеме каждый из упругих и антиупругих элементов исследуемой конструкции заменяется упругой и антиупругой

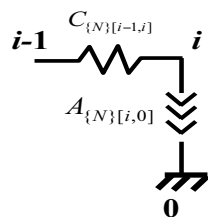


Рис. 2: Базовый фрагмент расчетной схемы.

гой межузловыми связями, ограниченными с двух концов узлами и характеризующимися соответствующими матрицами жесткости и антижесткости;

- в расчетной схеме инерционные абсолютно жесткие элементы исследуемой конструкции отображаются узлами;
- в расчетной схеме группа узлов, соединяемых в исследуемой конструкции с помощью абсолютно жестких связей (включая жесткую связь через основание), объединяется в один общий узел;
- каждый из узлов расчетной схемы нумеруется, соответствующие номера присваиваются межузловым упругим и антиупругим связям.

Таким образом, рассматриваемая расчетная схема (рис.3) представляет собой упорядоченную систему, состоящую из узлов, соединенных между собой с помощью упругих и антиупругих связей.

Жесткостные характеристики каждой упругой связи расчетной схемы описываются матрицами жесткости. В частности, матрица жесткости r -ой упругой связи, проходящей от узла k к узлу m , описывается следующим выражением:

$$C_{\{d\}[k,m]}^{(r)} = \left[c_{\{d\}[k,m]i,j}^{(r)} \right], \quad (i, j = \overline{1,6}). \quad (1)$$

Здесь введены обозначения:

- в верхнем индексе (r) матрицы жесткости записан номер

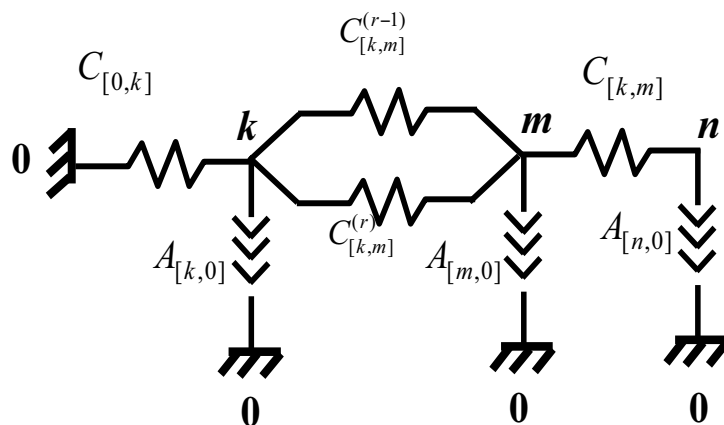


Рис. 3: Расчетная схема исследуемой конструкции.

упругой связи;

— в нижних индексах $\{d\}$ и $[k, m]$ указан номер базовой координатной системы $O_d x_d y_d z_d$, в которой данная матрица жесткости определена, и номера узлов, между которыми находится рассматриваемая упругая связь;

— $c_{\{d\}[k,m]i,j}^{(r)}$ ($i, j = \overline{1,6}$) — элементы матрицы жесткости, представляющие собой соответствующие коэффициенты пропорциональности между обобщенными силами и перемещениями в уравнениях равновесия, записанных в координатной форме.

Характеристики антиупругих связей расчетной схемы описываются матрицами антижесткости $A_{\{d\}[0,m]}^{(r)}$, индексы, в обозначениях которых имеют смысл аналогичный обозначениям, введенным для матриц жесткости $C_{\{d\}[0,m]}^{(r)}$.

Причем, элементами матриц антижесткости являются коэффициенты пропорциональности из соответствующих уравнений равновесия. Так, например, матрица антижесткости конечного элемента (рис.1) в своей системе нормальных координат

$Ox_N y_N z_N$ будет иметь диагональный вид

$$A_{\{N\}[0,m]}^{(r)} = \text{diag} \left(0 \ 0 \ 0 \ a_{[0,m]4,4}^{(r)} \ 0 \ 0 \right),$$

где коэффициент $a_{[0,m]4,4}^{(r)}$ описывает угловую аэродинамическую антижесткость относительно оси Ox_N .

Решение задачи методом конечно-элементной аппроксимации. В рамках общей постановки задачи может рассматриваться два типа решений.

— Первый тип содержит численное решение в виде матриц жесткости межузловых связей, эквивалентных всей рассматриваемой системе, либо отдельным ее частям. В рамках данного решения матрицы антижесткости $A_{\{d\}[k,m]}^{(r)}$ задаются в численном виде, причем рассмотрению подлежат только докритические скорости самолета, уступающие скорости дивергенции.

— Второй тип решений заключается в определении величины скорости дивергенции. В рамках данного решения матрицы антижесткости $A_{\{d\}[k,m]}^{(r)}$ задаются в аналитическом виде, как функции от искомой скорости дивергенции, причем матричные операции, предусмотренные МК-ЭА, должны выполняться в символьном виде.

Методика решения МК-ЭА основана на соответствующих методиках МУК [1].

Прежде всего, необходимо задаться единой глобальной системой координат $Ox_0 y_0 z_0$ и определить относительно нее положение локальных координатных систем, применяемых в качестве базовых систем координат для получения матриц жесткости или антижесткости межузловых связей в рассматриваемой расчетной схеме. Так, в частности, смещение начала координат O_w локальной системы координат $O_w x_w y_w z_w$ относительно глобальной координатной системы $Ox_0 y_0 z_0$ будет характеризоваться вектором-столбцом $R_{0w} = \left[r_{x0}^{(w)} \ r_{y0}^{(w)} \ r_{z0}^{(w)} \right]^T$ и построенной

на его основе кососимметричной матрицей

$$\check{R}_{0w} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{z0}^{(w)} & r_{y0}^{(w)} \\ r_{z0}^{(w)} & 0 & -r_{x0}^{(w)} \\ -r_{y0}^{(w)} & r_{x0}^{(w)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $r_{x0}^{(w)}$, $r_{y0}^{(w)}$ и $r_{z0}^{(w)}$ соответствующие координаты точки O_w в системе координат $Ox_0y_0z_0$.

В свою очередь, угловое положение осей локальной координатной системы $O_wx_wy_wz_w$ относительно глобальной системы координат $Ox_0y_0z_0$ будет характеризоваться матрицей направляющих косинусов

$$D_{0w} = \begin{bmatrix} \cos(x_0 \hat{ } x_w) & \cos(x_0 \hat{ } y_w) & \cos(x_0 \hat{ } z_w) \\ \cos(y_0 \hat{ } x_w) & \cos(y_0 \hat{ } y_w) & \cos(y_0 \hat{ } z_w) \\ \cos(z_0 \hat{ } x_w) & \cos(z_0 \hat{ } y_w) & \cos(z_0 \hat{ } z_w) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где в качестве элементов матрицы выступают косинусы углов между соответствующими осями локальной ($O_wx_wy_wz_w$) и глобальной ($Ox_0y_0z_0$) координатных систем.

Кососимметричная матрица \check{R}_{0w} и матрица направляющих косинусов D_{0w} формируют матрицу преобразования координат Λ_{0w} , позволяющую осуществлять переход из локальной ($O_wx_wy_wz_w$) в глобальную ($Ox_0y_0z_0$) базовые координатные системы и имеющую следующий вид:

$$\Lambda_{0w} = \begin{bmatrix} D_{0w} & O \\ \check{R}_{0w}D_{0w} & \pm D_{0w} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ — нулевая матрица третьего порядка;

отрицательный знак в формуле (4) ставится перед матрицей D_{0w} в случае, если локальная координатная система $O_wx_wy_wz_w$, в отличие от глобальной системы координат $Ox_0y_0z_0$, представляет собой левую координатную систему.

Для получения матриц жесткости упругих связей МК–ЭА прежде всего необходимо матрицы жесткости и антижесткости всех межузловых связей расчетной схемы перевести из локальных координатных систем в единую глобальную систему координат $Ox_0y_0z_0$. В частности, расположенная между k -ым и m -ым узлами расчетной схемы r -я упругая связь, характеризуемая матрицей жесткости $C_{\{d\}[k,m]}^{(r)}$, определяемой в локальной системе координат $O_d x_d y_d z_d$, будет описываться матрицей жесткости $C_{\{0\}[k,m]}^{(r)}$, определяемой в глобальной системе координат $Ox_0y_0z_0$,

$$C_{\{0\}[k,m]}^{(r)} = \Lambda_{0d} C_{\{d\}[k,m]}^{(r)} \Lambda_{0d}^T,$$

где Λ_{0d} — матрица преобразования координат, описываемая выражениями (2)–(4) и позволяющая осуществлять переход из локальной базовой системы координат $O_d x_d y_d z_d$ в глобальную базовую координатную систему $Ox_0y_0z_0$.

Аналогичным образом проводится расчет матриц антижесткости при переходе из локальной базовой системы координат $O_d x_d y_d z_d$ в глобальную базовую координатную систему $Ox_0y_0z_0$:

$$A_{\{0\}[km]}^{(r)} = \Lambda_{0d} A_{\{d\}[km]}^{(r)} \Lambda_{0d}^T.$$

При этом, учитывая "параллельность" соединения связей, описываемых матрицами жесткости $C_{\{0\}[k,m]}^{(r)}$ и антижесткости $A_{\{0\}[k,m]}^{(r)}$, матрица жесткости $C_{\{0\}[k,m]}$ межузловой упругой связи, лежащей между k -ым и m -ым узлами системы, может определяться по формуле

$$C_{\{0\}[k,m]} = \sum_{(\forall r)} \left(C_{\{0\}[k,m]}^{(r)} + A_{\{0\}[k,m]}^{(r)} \right).$$

Таким образом, в результате преобразований, проведенных в расчетной схеме, получена упорядоченная система МК–ЭА, состоящая из узлов, связанных между собой соответствующими связями. При этом в качестве характеристик межузловых упругих связей выступают матрицы жесткости $C_{\{0\}[k,l]} \in M_6(k, l =$

$= \overline{1, n}$; $k \neq l$), а в качестве характеристик межузловых антиупругих связей используются матрицы антижесткости $A_{\{0\}[k,l]} \in M_6(k, l = \overline{1, n}; k \neq l)$, определенные в глобальной базовой системе координат $Ox_0y_0z_0$.

Алгоритм, рекуррентные формулы и основные виды решений в методе конечно-элементной аппроксимации. Сущность МК–ЭА состоит в последовательном преобразовании исходной системы в эквивалентные системы с меньшим количеством узлов.

На каждой итерации МК–ЭА исключается только один узел, а преобразованию подлежат только связи, находящиеся между теми узлами, которые имели непосредственную связь с исключенным узлом.

На рис.4 показано проводимое в соответствии с МК–ЭА преобразование исходной системы, состоящее в исключении l -го узла. Здесь при обозначении матриц жесткости в преобразованной системе (например, $C_{\{0\}[k,m](l)}$) в нижних индексах после фигурных и квадратных скобок, содержащих соответствующие данные, вводится индекс в круглых скобках с указанием номеров всех узлов, исключенных в рассматриваемой преобразованной системе.

Рекуррентная формула МК–ЭА представляет собой формулу для расчета матриц жесткости межузловых связей, получаемых при эквивалентных преобразованиях исходной системы. Например, при преобразовании, состоящем в исключении l -го узла (рис.4), матрицы жесткости $C_{\{0\}[k,m](l)}$ определяется по следующей рекуррентной формуле:

$$C_{\{0\}[k,m](l)} = C_{\{0\}[k,m]} + (C_{\{0\}[k,l]} + A_{\{0\}[k,l]}) (C_{\{0\}[l]})^{-1} (C_{\{0\}[l,m]} + A_{\{0\}[l,m]}), \quad (5)$$

где $C_{\{0\}[l]} \equiv \sum_{(\forall s)} (C_{\{0\}[l,s]} + A_{\{0\}[l,s]})$ — сумма матриц жесткости всех межузловых связей, непосредственно примыкающих к l -му узлу.

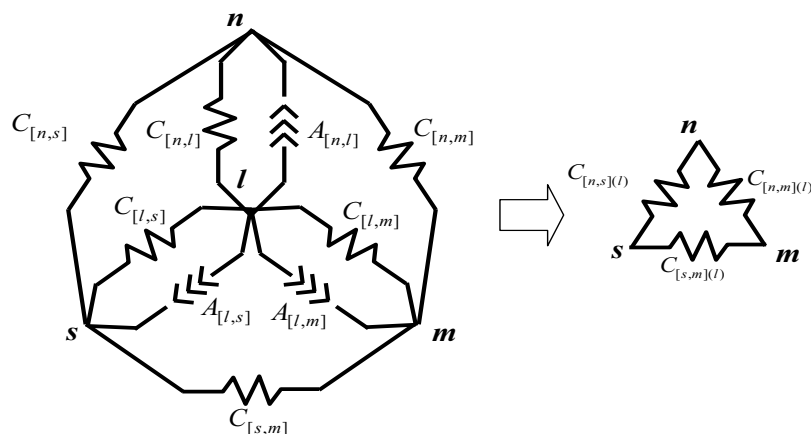


Рис. 4: Преобразование упругой системы в соответствии с МК-ЭА.

Необходимо отметить ряд замечаний:

- обязательным условием работы алгоритма МК-ЭА является положительная определенность матрицы жесткости $C_{\{0\}[l]}$, свидетельствующая об устойчивости исследуемой конструкции;
- получающиеся в результате преобразований МК-ЭА матрицы могут терять или, наоборот, приобретать свойства антижесткости, становясь обычными матрицами жесткости $C_{\{0\}[k,m](l)}$ или антижесткости $A_{\{0\}[k,m](l)}$.

Рассмотрим методику получения с помощью МК-ЭА решений основных типов рассматриваемых задач.

— Пусть требуется определить жесткостные характеристики эквивалентной межузловой связи, которая наряду с прямыми связями учитывает также не прямые связи, связывающие обозначенную пару узлов через другие узлы исследуемой системы.

Для решения поставленной задачи необходимо в соответствии с МК-ЭА выполнить преобразования исходной системы и найти решение в виде матрицы жесткости соответствующей ме-

жесткости эквивалентной связи, расположенной между узлами k и m , то необходимо исключить в соответствии с МК–ЭА все узлы упругой системы, кроме узлов k и m , между которыми и будет находиться эквивалентная упругая связь с искомой матрицей жесткости $C_{\{0\}[k,m](\forall l=\overline{1,n}; l \neq k,m)}$.

— Предположим теперь, что требуется найти решение МК–ЭА в виде скорости дивергенции, которая способствует снижению до нуля результирующей жесткости системы и, как следствие, приводит к бесконечному возрастанию относительных перемещений узлов системы, например, узлов k и m .

В ходе решения этой задачи исключаются в соответствии с МУК все узлы рассматриваемой системы, кроме узлов k и m . При этом определяется матрица жесткости эквивалентной междуузловой связи, расположенной между узлами k и m , $C_{\{0\}[k,m](\forall l=\overline{1,n}; l \neq k,m)}(V_{\partial u \partial})$, как функция от искомой скорости дивергенции $V_{\partial u \partial}$, которая находится из уравнения

$$\det \left(C_{\{0\}[k,m](\forall l=\overline{1,n}; l \neq k,m)}(V_{\partial u \partial}) \right) = 0. \quad (6)$$

Пример определения скорости дивергенции методом конечно-элементной аппроксимации. Продемонстрируем МК–ЭА на примере определения скорости дивергенции прямого крыла самолета.

Отметим, что, полученное в соответствии с теорией несущей полосы [2], точное значение скорости дивергенции идеализированного прямого крыла самолета $V_{\partial u \partial}$ описывается формулой

$$V_{\partial u \partial} = \frac{\pi}{2l_s l_c} \sqrt{\frac{2G J_{kp}}{\rho k_a k_e}}. \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

ρ — плотность газа;

J_{kp} и G — момент инерции поперечного сечения и модуль упругости материала при кручении крыла;

l_s и l_c — длина крыла и хорды крыла;

k_a и k_e — коэффициенты пропорциональности, характеризующие наклон кривой подъемной силы и эксцентриситет аэродинамического центра.

Сначала разделим исследуемое идеализированное крыло на n ($n \geq 2$) одинаковых участков. Затем, согласно требований МК-ЭА, составим расчетную схему (рис.5), где матрица жесткости $C_{[k-1,k]}^{(n)}$ обуславливается действием упругих восстанавливающих сил, а матрица антижесткости $A_{[k-1,k]}^{(n)}$ характеризует влияние опрокидывающих аэродинамических сил на k -ом участке крыла. Теперь, проведем "конденсацию" всех промежуточных узлов и определим результирующую матрицу $C_{[0,n](1,n-1)}^{(n)}$ ($n \geq 2$). При этом искомая скорость дивергенции находится из уравнения

$$\det \left(C_{[0,n](1,n-1)}^{(n)} \right) = 0, \quad (n \geq 2). \quad (8)$$

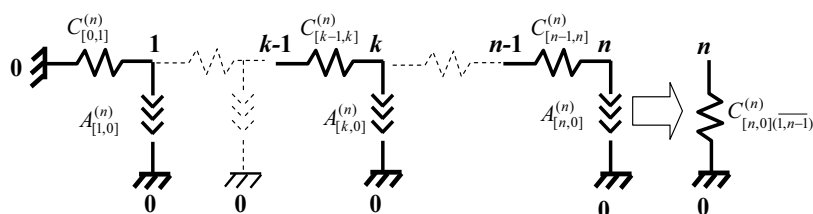


Рис. 5: Расчетная схема МК-ЭА идеализированного прямого крыла.

Отметим, что в связи с симметричностью идеализированного крыла [3] матричные операции, предусмотренные МК-ЭА, заменяются на математические действия между скалярными величинами, соответствующими однокомпонентному случаю. В этом случае, матрице жесткости $C_{[k-1,k]}^{(n)}$ ставится в соответствие

угловая жесткость $c_{\partial}^{(n)}$ k -го участка крыла, а матрице антижесткости $A_{[k-1,k]}^{(n)}$ будет соответствовать коэффициент $c_{\partial}^{(n)}$ опрокидывающего аэродинамического момента на k -ом участке крыла. К тому же при определении искомой скорости дивергенции $V_{\text{див}}^{(n)}$ вместо уравнения (8), где проводится расчет общего определителя результирующей матрицы жесткости, относительно $V_{\text{див}}^{(n)}$ решается полиномиальное уравнение

$$c_{[0,n](1,n-1)l,l}^{(n)} \left(V_{\text{див}}^{(n)} \right) = 0, \quad = 0, \quad (n \geq 2). \quad (9)$$

Здесь нижний индекс l, l диагонального элемента $c_{[0,n](1,n-1)l,l}^{(n)}$ результирующей матрицы должен соответствовать угловой координате, характеризующей кручение крыла.

При этом согласно введенным обозначениям величина жесткости $c_{\partial}^{(1)}$ и антижесткости $c_{\partial}^{(1)}$ крыла, представленного в конечно-элементном виде, состоящим из одного участка, будут описываться выражениями [2]

$$c_{\partial}^{(1)} = \frac{GJ_{kp}}{l_s}; \quad a_{\partial}^{(1)} = -\frac{\rho V_0^2}{2} k_a k_e l_c l_s, \quad 0 \leq V_0 \leq V_{\text{див}}. \quad (10)$$

В свою очередь должно быть очевидным, что величины жесткости $c_{\partial}^{(n)}$ и антижесткости $a_{\partial}^{(n)}$ каждого из n ($n \geq 2$) участков крыла могут записываться в виде

$$c_{\partial}^{(n)} = n c_{\partial}^{(1)}; \quad a_{\partial}^{(n)} = \frac{a_{\partial}^{(1)}}{n}. \quad (11)$$

Согласно МК-ЭА и формулам (9)–(11) проведем расчет приближенных величин скоростей дивергенции идеализированного прямого крыла в зависимости от количества участков разбивки n и соответствующему ему числу конечных элементов.

Рассмотрим сначала случай, когда крыло состоит из одного участка разбивки ($n = 1$). Согласно расчетной схеме (рис.5) результирующая матрица $C_{[1,0]}$ равна

$$C_{[1,0]} = C_{[0,1]}^{(1)} + A_{[0,1]}^{(1)}. \quad (12)$$

Проводя замену матриц в выражении (12) на соответствующие скалярные величины, получим следующее уравнение:

$$c_{\partial}^{(1)} + a_{\partial}^{(1)} \left(V_{\partial u \partial}^{(1)} \right) = 0. \quad (13)$$

Подставляя в уравнение (13) значения из формул (10), получим приближенное выражение для скорости дивергенции

$$V_{\partial u \partial}^{(1)} = \frac{1}{l_s l_c} \sqrt{\frac{2G J_{kp}}{\rho k_a k_e}}. \quad (14)$$

При результирующая матрица, получаемая согласно расчетной схеме идеализированного прямого крыла (рис.5), примет следующий вид:

$$C_{[2,0](1)}^{(2)} = \left[\left(C_{[1,0]}^{(2)} + A_{[1,0]}^{(2)} \right)^{-1} + \left(C_{[1,2]}^{(2)} \right)^{-1} \right]^{-1} + A_{[2,0]}^{(2)}. \quad (15)$$

Заменяя матрицы в выражении (15) на соответствующие скалярные величины, получаем следующее уравнение:

$$\left[\left(c_{\partial}^{(2)} + a_{\partial}^{(2)} \right)^{-1} + \left(c_{\partial}^{(2)} \right)^{-1} \right]^{-1} + a_{\partial}^{(2)} = 0. \quad (16)$$

Решением уравнения (16) будет выражение

$$a_{\partial}^{(2)} \left(V_{\partial u \partial}^{(2)} \right) = -\frac{3 - \sqrt{5}}{2} c_{\partial}^{(2)}. \quad (17)$$

Подставляя в выражение (17) значения из формул (11) и (14), получим следующее приближенное выражение для скорости дивергенции

$$V_{\partial u \partial}^{(2)} = 1,236 \cdot V_{\partial u \partial}^{(1)} = \frac{1,236}{l_s l_c} \sqrt{\frac{2G J_{kp}}{\rho k_a k_e}}.$$

В свою очередь, рассматривая расчетную схему идеализированного прямого крыла (рис.5) при $n = 4$, получим следующую результирующую матрицу:

$$C_{[4,0](1,2,3)}^{(4)} = \left[\left(C_{[3,4]}^{(4)} \right)^{-1} + \left(C_{[3,0](1,2)}^{(4)} \right)^{-1} \right]^{-1} + A_{[4,0]}^{(4)}, \quad (18)$$

где

$$C_{[3,0](1,2)}^{(4)} = \left[\left(C_{[2,3]}^{(4)} \right)^{-1} + \left(C_{[2,0](1)}^{(4)} \right)^{-1} \right]^{-1} + A_{[3,0]}^{(4)}; \quad (19)$$

$$C_{[2,0](1)}^{(4)} = \left[\left(C_{[1,0]}^{(4)} + A_{[1,0]}^{(4)} \right)^{-1} + \left(C_{[1,2]}^{(4)} \right)^{-1} \right]^{-1} + A_{[2,0]}^{(4)}.$$

Заменяя матрицы в выражениях (18)–(19) на соответствующие скалярные величины, получаем следующее уравнение:

$$\left\{ \left[\left(c_{\partial}^{(4)} + a_{\partial}^{(4)} \right)^{-1} + \left(c_{\partial}^{(4)} \right)^{-1} \right]^{-1} + a_{\partial}^{(4)} \right\}^{-1} + \left\{ \left[\left(a_{\partial}^{(4)} \right)^{-1} + \left(c_{\partial}^{(4)} \right)^{-1} \right]^{-1} + a_{\partial}^{(4)} \right\}^{-1} + \left(c_{\partial}^{(4)} \right)^{-1} = 0. \quad (20)$$

Получая решение из уравнения (20) и подставляя в него величины из формул (11) и (14), получим следующее приближенное выражение для скорости дивергенции:

$$V_{\partial u \partial}^{(4)} = 1,391 \cdot V_{\partial u \partial}^{(1)} = \frac{1,391}{l_s l_c} \sqrt{\frac{2G J_{kp}}{\rho k_a k_e}}.$$

Проведя аналогичный расчет при $n = 8$ и $n = 16$, получим следующие приближенные выражения для скоростей дивергенции:

$$V_{\partial u \partial}^{(8)} = 1,475 \cdot V_{\partial u \partial}^{(1)} = \frac{1,475}{l_s l_c} \sqrt{\frac{2G J_{kp}}{\rho k_a k_e}};$$

$$V_{\partial u \partial}^{(16)} = 1,522 \cdot V_{\partial u \partial}^{(1)} = \frac{1,522}{l_s l_c} \sqrt{\frac{2G J_{kp}}{\rho k_a k_e}}.$$

Точное значение скорости дивергенции идеализированного прямого крыла V_{div} , используемое для расчета величин относительных погрешностей получаемых результатов, будет определяться в соответствии с формулой (7).

Результаты расчета приближенных значений скорости дивергенции идеализированного прямого крыла, обладающего упругой угловой жесткостью на кручение $c_{\partial}^{(1)}$ и антиупругой угловой жесткостью от действия аэродинамических сил $c_{\partial}^{(1)}$, в случае его представления в конечно-элементном виде с различным количеством участков разбивки приведены в таблице.

Как следует из результатов, приведенных в таблице, увеличение числа конечных элементов при представлении идеализированного прямого крыла в конечно-элементном виде существенным образом уменьшает погрешность определения скорости дивергенции. При этом абсолютно очевидно, что при бесконечном увеличении числа конечных элементов величина скорости дивергенции, получаемой в соответствии с МК-ЭА, будет приближаться к точному значению скорости дивергенции, определяемой согласно теории несущей пластины [2].

Заключение. Разработанный МК-ЭА характеризуется рядом достоинств:

- простота алгоритма, обусловленная хорошей наглядностью и понятной физической интерпретацией метода;
- возможность проверки промежуточных результатов, которая следует из их простой физической трактовки;
- возможность аналитического расчета, обусловленная простотой рекуррентных формул.

Таблица

Количество конечно-элементных участков n	Жесткость упругого конечного элемента $c_{\partial}^{(n)} = nc_{\partial}^{(1)}$	Жесткость антиупругого конечного элемента $a_{\partial}^{(n)} = \frac{a_{\partial}^{(1)}}{n}$	Приближенное значение скорости дивергенции $V_{\text{див}}^{(n)}$	Относительная погрешность при определении скорости дивергенции $\eta = \left \frac{V_{\text{див}} - V_{\text{див}}^{(n)}}{V_{\text{див}}} \right $ 100%
1	$c_{\partial}^{(1)}$	$a_{\partial}^{(1)}$	$V_{\text{див}}^{(1)} = \frac{2}{\pi} V_{\text{див}}$	36,35%
2	$2c_{\partial}^{(1)}$	$0,5 \cdot a_{\partial}^{(1)}$	$1,236 \cdot V_{\text{див}}^{(1)}$	21,3 %
4	$4c_{\partial}^{(1)}$	$0,25 \cdot a_{\partial}^{(1)}$	$1,391 \cdot V_{\text{див}}^{(1)}$	11,5 %
8	$8c_{\partial}^{(1)}$	$0,125 \cdot a_{\partial}^{(1)}$	$1,475 \cdot V_{\text{див}}^{(1)}$	6,1 %
16	$16c_{\partial}^{(1)}$	$0,0625 \cdot a_{\partial}^{(1)}$	$1,522 \cdot V_{\text{див}}^{(1)}$	3,1 %

Недостатками МК-ЭА являются:

- на каждой итерации необходимость проверки обрабатываемых матриц на положительную определенность, что связано с их возможной вырожденностью;
- при определении скорости дивергенции необходимость проведения матричных операций в символьном виде, а также получение корней полиномов высокого порядка.

Литература

- [1] Балабанов И.В., Балабанова Т.В. Метод узловой конденсации для расчета упругих пространственных систем // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2012. — 9, №1. — С. 11–37.

- [2] *Фын Я.Ц.* Введение в теорию аэроупругости / Я.Ц. Фын // Пер. с английского Смирнова А.И. М.: Физматгиз. — 1959. — 523 с.
- [3] *Балабанов И.В., Балабанова Т.В.* Анализ свойств межузловых связей в симметричных упругих системах // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2010. — 7, №3. — С. 30–45.