Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 1, 178–184

УДК 517.98

В. І. Рабанович

(Інститут математики НАН України, Київ)

Про зв'язок між нормою суми ортопроекторів на підпростори і нормою добутку ортопроекторів на відповідні ортогональні доповнення

slavik@imath.kiev.ua

We show that if $\epsilon I \leq P_1+P_2+\cdots+P_k$, where I is the identity operator and $P_1,\ldots,P_k$ — are orthoprojections that project onto linearly independent subspaces, then the norm $\|P_1+P_2+\cdots+P_k\| \leq k-(k-1)\epsilon$. It was found that without the linearly independent condition there exit orthoprojections such that $\|(I-P_k)(I-P_{k-1})\ldots(I-P_1)\| \geq 1-17\epsilon/k^2$.

В роботі показано, що при умові $\epsilon I \leq P_1+P_2+\cdots+P_k$, де I одиничний оператор і $P_1,\ldots,P_k$ — ортопроектори, які проектують на лінійно-незалежні підпростори, норма $\|P_1+P_2+\cdots+P_k\| \leq k-(k-1)\epsilon$. Без виконання умови лінійної незалежності знайдено опртопроектори, для яких $\|(I-P_k)(I-P_{k-1})\ldots(I-P_1)\| \geq 1-17\epsilon/k^2$.

1. Оцінка норми суми операторів

Класичним методом розв'язання ряду крайових і варіаційних задач є альтернуючий метод Шварца, який після дискретизації задачі приводить до систем лінійних алгебраїчних рівнянь з великою кількістю невідомих. Матриці, що виникають при цьому, є сильно розрідженими. Проте спеціальні декомпозиції областей і відповідних матриць приводять до блочно-ітераційних алгоритмів розв'язання систем рівнянь. Ми виділимо окремо два таких алгоритма: алгебраїчні адитивний і мультиплікативний методи Шварца (див., наприклад, [1, 2]). Збіжність згаданих методів базується на оцінці відношення максимального і мінімального значення матриці A, що є сумою ортопроекторів $P_1, \dots, P_k$ і на оцінці норми добутку ортопроекторів $T = (I - P_k)(I - P_{k-1}) \dots (I - P_1)$. В цій роботі ми припускаємо, що

$$\epsilon I \leq P_1 + P_2 + \ldots + P_k \tag{1}$$

і знайдемо верхню границю $\|A\|$, якщо $P_1, \dots, P_k$ проектують на лінійно незалежні підпростори і оцінемо нижню границю $\|T\|$ для конкретного набору ортопроекторів з 2×2 матриць. Тривіальна верхня границя для A є число k і без додаткових обмежень на ортопроектори норма A може бути рівна k. Проте умова лнійної незалежності підпросторів, на які проектують простір ортопроектори дозволяє більш точно оцінити верхню границю.

Нехай $H_1, H_2, \dots H_k$ лінийно-незілежні підпростори в H, $\operatorname{Im} P_i = H_i$ і $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = H$, тобто кожен вектор $h \in H$ представляється єдиним чином у вигляді $h = h_1 + h_2 + \ldots + h_k$, $h_i \in H_i$, $i = 1, \dots, k$. Тоді A є оборотним оператором (див., наприклад, [3], Теорема 4.1) і, більш того, $H_i + H_j$ є замкненим підпростором та при виконанні умови (1) сума $P_i + P_j \geq \epsilon P_{H_i + H_j}$. В силу лінійної незалежності ми отримаємо, що

$$P_i + P_j \leq (2 - \epsilon) P_{H_i + H_j}. \tag{2}$$

Цей факт доведений в [4] і є прямим наслідком спектральної теорії для сум ортопроекторів [5]. Крім того, в [4] було сформульване питання, чи існує нетривіальна оцінка на норму суми ортопроекторів, яка, можливо, не залежить від k. Залежності від k, насправді, позбутися не можна, оскільки $k \times k$ матриця $\operatorname{diag}(\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon, k - (k-1)\epsilon)$ має слід k и тому є сумою k лінійно незалежних ортопроекторів [6]. Як показує наступна теорема $k - (k-1)\epsilon$ є універсальною верхньою границею.

Теорема 1. *Нехай підпростори $H_1, H_2, \dots H_k$ лінійно незалежні і $P_1, P_2, \dots P_k$ є ортопроектори на ці підпростори. Тоді з нерівності (1) слідує нерівність*

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k \leq (k - (k-1)\epsilon) I$$

Доведення. Нехай $A = P_1 + P_2 + \ldots + P_k$. Ми використаємо теорему Дж. Дункана и П. Тейлора (див., наприклад, [7, 8]), яка стверджує, що $\|P + Q\| = 1 + \|PQ\|$ для довільних ортопектороів P і Q. В силу нерівності (1) маємо $\|P_i P_j\| \leq 1 - \epsilon$ для всіх $i \neq j$. Розглянемо добуток

$$(A - I)^s A = \sum_{i_1 \neq i_2} \sum_{i_2 \neq i_3} \cdots \sum_{i_s \neq i_{s+1}} \sum_{i_s = 1}^{k} P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_s} P_{i_{s+1}}. \tag{3}$$

Зауважимо, що

$$\|P_{i_1}P_{i_2}\dots P_{i_{s+1}}\| = \|(P_{i_1}P_{i_2})(P_{i_2}P_{i_3})\dots(P_{i_{s-1}}P_{i_s})(P_{i_s}P_{i_{s+1}})\| \le (1-\epsilon)^s,$$

а число доданків в правій частині (3) є $(k-1)^s k$. Отже, для кожного $s \ge 2$

$$\|A-I\|^s \le k(k-1)^s(1-\epsilon)^s\|A^{-1}\| \le \epsilon k(k-1)^s(1-\epsilon)^s. \qquad (4)$$

Добуваємо корінь степені s з обох частин в нерівності (4) і переходимо до границі при $s \to \infty$. Це приводить до нерівності $\|A-I\| \le (k-1)(1-\epsilon)$ або $A - I \le (k-1)(1-\epsilon)I \le (k-1-(k-1)\epsilon))I$. Звідки прямо слідує твердження теореми.

Зауваження 1. *Теорема 1 була анонсована автором в 2006р. [9]. На данний час доведено більш загальне твердження про норму додатної лінійної комбінації ортопроекторів (див. [3]), частним випадком якого є твердження теореми 1. Проте оригінальне доведення можна використати і для оцінки норми сум ортопроекторів з додатковими умовами ортогональності.*

Розглянемо простий граф G з k вершин і множиною ребер Г. Припустимо, що підпростори $H_1, \dots, H_k$ задовольняють умовам $H_i \perp H_j$, якщо ребро $(i,j) \notin$ Г. Позначимо через A_G матрицю суміжності графа G і через λ_G її максимальне власне значення. Тоді справедлива більш точна оцінка на норму суми.

Теорема 2. *Нехай підпростори $H_1, H_2, \dots H_k$ лінійно незалежні і $P_1, P_2, \dots P_k$ є ортопроектори на ці підпростори. Якщо $H_1, \dots, H_k$ задовольняють додатковим умовам ортогональності і G граф, що їм відповідає, то з нерівності (1) слідує нерівність*

$$P_1 + P_2 + \dots + P_k \le (1 + \lambda_G(1-\epsilon))I$$

Доведення теореми цілком повторює доведення теореми 1. Просто необхідно порахувати кількість ненульових доданків в правій частині формули (3). Зауважимо, що послідовність $i_1, \dots, i_{s+1}$ можна собі уявляти як шлях довжини s по вершинах i_1, $i_2, \dots$, i_{s+1}. При цьоміу, добуток $P_{i_1}P_{i_2}\dots P_{i_s}P_{i_{s+1}}$ буде дорівнювати нулеві, якщо такий шлях не є шляхом в графі G. Звідки, кількість формально ненульових доданків в (3) є кількістю шляхів довжини s в G. Вона рівна сумі елементів матриці A_G^s, яку ми позначемо через $f(s)$. Тепер, щоб оцінити $f(s)$

достатньо привести A_G унітарними перетвореннями до діагонального виду: $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = U^* A_G U$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ і піднести отриманий вираз до степеня s. Припустимо, що G зв'язаний. Тоді найбільше власне значення має кратність 1 і йому відповідає власний вектор $(x_1, \dots, x_k)$ з додатними координатами, який є першим рядком матриці U^*. Звідки маємо

$$\lim_{s\to\infty} (\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)/\lambda_1)^s = \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0) = \lim_{s\to\infty} U^*(G/\lambda_1)^s U$$

і, таким чином, $f(s)/\lambda_1^s \xrightarrow[s\to\infty]{} (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2$. Якщо G не є зв'язаним, то матриця A_G розкладна і можна провести аналогічні міркування на кожній компоненті зв'язаності і отримати $f(s)/\lambda_1^s \xrightarrow[s\to\infty]{} (x_1 + x_2 + \dots + x_{j_1})^2 + (x_{j_1+1} + x_{j_1+2} + \dots + x_{j_2})^2 + \dots + (x_{j_{r-1}+1} + x_{j_{r-1}+2} + \dots + x_k)^2$, де r це кратність власного значення λ_1 матриці A_G. Отже в позначеннях теореми 1

$$\|A - I\| = \sqrt[s]{\|A - I\|^s} \leq \lim_{s\to\infty} \sqrt[s]{f(s)(1-\epsilon)^s \|A^{-1}\|} \leq$$
$$\lim_{s\to\infty} \sqrt[s]{\lambda_1^s k(1-\epsilon)^s/\epsilon} = \lambda_1(1-\epsilon).$$

Звідки $\|A\| \leq (1 + \lambda_1(1-\epsilon)) = (1 + \lambda_G(1-\epsilon))$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай валентність кожної вершини графа G не перевищує $m - 1$. Тоді $P_1 + P_2 + \dots + P_k \leq (m - (m-1)\epsilon)I$.*

2. Оцінка норми добутку операторів

Перейдемо до другої задачі про оцінення норми добутку ортопроекторів

$$T = (I - P_k)(I - P_{k-1}) \dots (I - P_1)$$

при виконанні умови (1). Як було показано в [10] (див., також, [1, 2]),

$$\|T\|^2 \leq 1 - \frac{\epsilon}{2 + k(k-1)}. \tag{5}$$

При реалізації мультиплікативного методу Шварца на практиці часто збіжніть до розв'язку була значно швидше, ніж випливає з цієї нерівності. Тому природньо виникає питаня про те, чи можна значно покращити цю оцінку без додаткових припущень на проектори. Як показує наступний приклад, квадратичної залежності від k в знаменнику правої частини нерівності (5) позбутися не можна.

Нехай $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ортонормований базис в $\mathbb{R}^2$ і $\alpha > 0$. Розглянемо нормований набір векторів $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_k$, утворений відкладанням кутів $0, \alpha, 2\alpha, \ldots, (k-1)\alpha$ від $\vec{e}_1$ проти годиникової стрілки: $\vec{h}_1 = \vec{e}_1$, і скалярний добуток $(\vec{h}_1, \vec{h}_i) = \cos(i-1)\alpha$. Нехай $P_{h_1}, P_{h_2}, \ldots, P_{h_{k-1}}$ — ортопроектори на відповідні вектори. Тоді

$$\|(I - P_{h_{k-1}}) \ldots (I - P_{h_1})\| = \|(I - P_{h_{k-1}}) \ldots (I - P_{h_1})\vec{e}_1\| = \cos^{k-1}\alpha.$$

З іншого боку, якщо $A = P_1 + \ldots + P_k$ і

$$\vec{h} = \begin{cases} \vec{h}_{(k+1)/2} & \text{при } k \text{ непарному,} \\ (\vec{h}_{k/2} + \vec{h}_{k/2+1})/\|\vec{h}_{k/2} + \vec{h}_{k/2+1}\| & \text{при } k \text{ парному,} \end{cases}$$

то $\vec{h}$ є власним числом матриці A і $\|A\| = \|A\vec{h}\|$. Звідки, при k непарном

$$\|A\| = 1 + 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \ldots + 2\cos\frac{(k-1)\alpha}{2} = 1 + 2\frac{\sin\frac{k-1}{4}\alpha\cos\frac{k+1}{4}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

і при k парном

$$\|A\| = 2\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{3\alpha}{2} + \ldots + 2\cos\frac{(k-1)\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Зауважимо, що $\operatorname{tr} A = k$ і тому друге власне число a_* матриці A дорівнює $k - \|A\|$. Тому ми отримуємо оцінку знизу $A \geq a_* I$. Оцінемо відношення $a_*/(\cos^{k-1}\alpha)$ знизу використовуючи нерівності $t - t^3/6 \leq \sin t \leq t$ і $1 - t^2/2 \leq \cos t \leq 1 - t^2/2 + t^4/24$. Для k непарного маємо

$$k - \|A\| \geq k - 1 - \frac{2\sin(\frac{k-1}{4}\alpha)\cos(\frac{k+1}{4}\alpha)}{\alpha/2 - \alpha^3/48} \geq \frac{(k-1)(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}) - \frac{k-1}{2}\alpha\cos(\frac{k+1}{4}\alpha)}{\alpha/2 - \alpha^3/48} \geq$$

$$\frac{k-1}{1-\alpha^2/24}\left(\frac{(k+1)^2\alpha^2}{32} - \frac{\alpha^2}{24} - \frac{(k+1)^4\alpha^4}{6144}\right) \geq \frac{(k-1)k^2\alpha^2}{34} \text{ при } (k+1)\alpha < 1.$$

Для k парного —

$$k - \|A\| = k - \frac{\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \geq \frac{k(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}) - (\frac{k\alpha}{2} - \frac{k^3\alpha^3}{48} + \frac{k^5\alpha^5}{3840})}{\alpha/2 - \alpha^3/48} =$$

$$\frac{k\left(\frac{(k^2-1)\alpha^3}{48} - \frac{k^4\alpha^5}{3840}\right)}{\alpha/2} \geq (k-1)k^2\alpha^2/25.$$

Тепер, оскільки $1 - \cos^{k-1}\alpha \leq (k-1)(1-\cos\alpha) \leq (k-1)\alpha^2/2$, то ми отримуємо, що $(k - \|A\|)/(1-\cos^{k-1}\alpha) \geq k^2/17$ при $(k+1)\alpha < 1$. Отже, справедливе наступне твердження.

Твердження 1. *Існують набори з k ортопроекторів $P_1, \ldots, P_k$ такі, що виконується (1) та для яких $\|(I-P_k)(I-P_{k-1})\ldots(I-P_1)\| \geq 1 - 17\epsilon/k^2$ при $\epsilon \leq 1/34$.*

Таким чином, позбутися квадратичної залежності від k в (5) без додаткових умов на ортопроектори $P_1, \ldots, P_k$ не можна.

Література

[1] *Toselli A., Widlund O. B.* Domain Decomposition Methods — Algorithms and Theory // Springer Series in Computational Math. – 2005. – **34**. – 450p.

[2] *Holst M.* Algebraic Schwarz theory. // Technical Report CRPC-TR**994-10**, — 1994. – P. 1–46.

[3] *Фещенко И. С.* О замкнутости суммы n подпространств гильбертового пространства // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 10. – С. 1381–1425.

[4] *Björstad P. E., Mandel J.* On The Spectra Of Sums Of Orthogonal Projections With Applications To Parallel Computing // BIT Numerical Mathematics – 1991. – **31**, № 1. – P. 76–88.

[5] *Böttcher A., Spitkovsky I.M.* A gentle guide to the basics of two projections theory // Linear Algebra Its Appl. – 2010. – **432**. – P. 1412–1459.

[6] *Fillmore P. A.* On sums of projections // J. Funct. Anal. – 1969. – **4**. – P. 146–152.

[7] *Duncan J., Taylor P.J.* Norm inequalities for C^*-algebras // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A – 1975/1976.– **75**. – P. 119–129.

[8] *Vidav I.* The norm of the sum of two projections // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – **65**. – P. 297–298.

[9] *Rabanovich V.I.* On the spectra of sums and the norms of products of orthogonal projections. // Book of Abstracts of 17-th International Conference on Domain Decomposition Methods (Austria 2006). – P. 69.

[10] *Bramble J. H., Pasciak J. E., Wang J. P. and Xu J.* Convergence estimates for product iterative methods with applications to domain decomposition // Math. Comp. – 1991. – **57**. – P. 1–21.