

# ІСТОРИЧНІ НАРИСИ

---

---

## Про дослідження з теорії інерціальної навігації і суміжних питань в Інституті математики НАН України

Огляд присвячений питанню участі учених Інституту математики НАН України у розробках, що стосуються розвитку теорії інерціальної навігації та її застосувань. Автори намагалися ретроспективним поглядом охопити період, починаючи з 30–40 років минулого століття, коли знані учені з світовими іменами академік М. О. Лаврентьев та О. Ю. Ішлінський почали залучати учених Інституту до виконання досліджень, пов'язаних з обороною, а згодом і з ракетно-космічною тематиками. Наводиться перелік основних робіт у цьому напрямку і дається побіжний аналіз досліджень.

Стрімкий розвиток авіації, морського флоту і, особливо, ракетно-космічної техніки в післявоєнні роки привели до необхідності корінного удосконалення засобів навігації і керування рухомими об'єктами. Поряд з іншими принципами навігації особлива увага приділялася інерціальним системам навігації, в яких поточне місцеположення рухомого об'єкта визначається шляхом інтегрування прискорень, що вимірюються на його борту. Інерціальні системи навігації мають перед іншими способами навігації такі важливі переваги, як повна автономність, універсальність, захищеність від зовнішніх перешкод.

**1. Розробка теорії керування балістичними ракетами.** Початок досліджень у галузі інерціальної навігації і теорії гіроскопічних систем в Інституті математики НАНУ пов'язаний з іменем академіка НАНУ і АН СРСР О. Ю. Ішлінського, який був директором Інституту в 1948–1955 рр. Проте слід відзначити, що передумовою виникнення цих досліджень були розробки з оборонної тематики, які проводились в Інституті під керівництвом М. О. Лаврентьева (директор Інституту в 1939–1941, 1945–1948 рр.). Цілком очевидно, що ці дослідження диктувалися вимогами суворого часу, але і не в останню чергу широтою наукових інтересів М. О. Лаврентьева. Адже він, будучи уже на той час ученим зі світовим ім'ям в галузі теорії функцій

комплексного змінного, завжди велику увагу приділяв і прикладним задачам, зокрема застосуванням теорії функцій у задачах аеродинаміки і гідродинаміки.

Важливою галуззю механіки, якій М. О. Лаврентьєв приділяв багато уваги, було вивчення стійкості руху твердих тіл з порожнинами, заповненими рідиною. На той час ці дослідження проводились стосовно завдань артилерії, але згодом результати досліджень знайшли своє застосування і в ракетній техніці. У цій надскладній задачі механіки М. О. Лаврентьєв заклав вихідні положення і залучив до її виконання ряд своїх учнів. Попутно з розробкою теорії (спільно із співробітником Інституту математики С. Г. Крейном) ним були поставлені експериментальні дослідження, засновані на ідеї ученого-експериментатора з Інституту будівельної механіки АН УРСР С. В. Малашенка про так званий струнний підвіс тіл, що швидко обертаються. У цей же час була створена спрощена модель явища, при використанні якої вивчення властивостей снаряда, наповненого рідиною, замінювалося вивченням механічної системи, що складається з основного тіла і твердого сферичного вкладиша, відокремленого від тіла тонким шаром в'язкої рідини.



М. О. Лаврентьєв (1900 – 1980).

Особливо значущими з точки зору застосувань виявилися розробки М. О. Лаврентьєва з проблеми кумуляції. Військові спеціалісти не тільки колишнього СРСР, а й інших країн світу високо цінували дослідження М. О. Лаврентьєва, що стосувалися кумулятивних вибухів.

Припустивши, що при високих температурах матеріали поведуться подібно до в'язких рідин, він розробив гідродинамічну теорію кумуляції. Основна його ідея у цьому напрямку полягала у тому, що при таких високих температурі і тиску, які виникають при вибухах, можна з досить високою вірогідністю розглядати метал як ідеальну нестисливу рідину.

Для досліджень кумуляції у 1946 році при Інституті математики АН УРСР була створена лабораторія, кістяк якої закладався ще під час евакуації Академії наук у воєнні роки в російське місто Уфу. До її складу увійшли спеціалісти різних напрямків науки. Одним з найважливіших прикладних напрямів, що народилися з робіт М. О. Лаврентьєва, присвячених кумуляції, стало створення гідроімпульсної техніки і теорії високошвидкісного удару, зокрема вивчення явища удару компактного тіла об перешкоду при космічних швидкостях, а саме ці питання являються ключовими при дослідженні проблем надійності космічних апаратів при зіткненні з частками з швидкостями від 12-ти до 15 км/с.

Показовим є той факт, що у 1947 році саме М. А. Лаврентьєв, будучи віце-президентом Академії наук УРСР, запрошує на роботу в Інститут математики АН УРСР одного з своїх учнів О. Ю. Ішлінського, якого у наступному році обирають академіком АН УРСР і призначають директором цього інституту. На той час О. Ю. Ішлінський був відомим ученим у галузі теорії тертя, пружності і пластичності, теорії гіроскопічних систем.



О. Ю. Ішлінський (1913 – 2003).

Формальним початком державної програми в області створення балістичних ракет далекої дії стала постанова Ради Міністрів СРСР № 1017-419сс "Питання реактивного озброєння" від 13 травня 1946 р. Цією постановою оголошувалось створення реактивного озброєння "найважливішим завданням" і зобов'язувало проведення комплексу заходів щодо організації промислової кооперації для розробки ракетної техніки і створення військових структур для випробувань, приймання і експлуатації ракетного озброєння. Зокрема, було створено спеціальний військовий науково-дослідний інститут із розробки проблем воєнного застосування ракет Міністерства оборони СРСР (НДІ-4) і головний науково-дослідний, проектно-конструкторський і виробничо-технологічний інститут із ракетного озброєння СРСР (НДІ-88, а з 1967 р. — ЦНДІ машинобудування). Суміжниками до НДІ-88 створювалися НДІ і конструкторські бюро у різних відомствах, серед них НДІ-10 Міністерства суднобудівної промисловості СРСР (згодом його назва мінялася на НДІ-944, НДІ прикладної механіки, тепер це — науково-виробниче об'єднання «Ротор» ім. В. І. Кузнецова у Москві). В Україні були створені Особливе КБ-586 Міністерства оборонної промисловості СРСР у м. Дніпропетровську (тепер КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля), ОКБ-692 Державного Комітету радіоелектроніки у м. Харкові (тепер науково-виробниче об'єднання «Хартрон»). До виконання складних комплексних проблем, пов'язаних з розвитком ракетобудування, було залучено і Академію наук УРСР, а в її складі Інститут математики, де розпочалися перші роботи по математичному забезпеченню проектування ракетної техніки на замовлення НДІ-88. Будучи директором Інституту, О. Ю. Ішлінський залучає до виконання ракетної тематики ряд співробітників Інституту, зокрема, М. О. Красносельського, І. М. Рапопорта, С. Г. Крейна, Ю. М. Березанського.

Особисто О. Ю. Ішлінський ракетною тематикою почав займатися ще у 1943–1944 рр. Ракета зацікавила його як об'єкт, рух якого керованим гіроскопами, що розташовані на її борту. Зокрема, в цей час О. Ю. Ішлінським було проаналізовано точність орієнтації об'єкта, що починає рух з похилої основи, розв'язана задача про відхилення польоту самокерованої ракети від заданого напрямку, а також запропоновано математичний апарат розв'язку задачі про те, якою повинна бути витрата палива ракети, щоб дальність її прямолінійного польоту була максимальною.

За час роботи в Інституті математики О. Ю. Ішлінський заклав

основи строгої теорії керування польотом балістичних ракет без використання будь-якої зовнішньої інформації (типу радіосигналів, випромінювання зірок і т. п.). Вихідними даними для подібного керування являються покази приладів, розташованих на борту самої ракети. Функціонування таких приладів базується на використанні явища інерції, тому цей спосіб керування польотом було названо інерціальним. Результати цих досліджень були підсумовані у монографії О. Ю. Ішлінського «Некоторые вопросы теории автономного управления баллистическими ракетами», яка була надрукована у 1960 р. обмеженим тиражем під грифом «секретно», а у 1968 р. вийшла у світ відкритим друком під зміненою назвою «Инерциальное управление баллистическими ракетами. Некоторые теоретические вопросы» [1].

При побудові теорії інерційного управління польотом ракети О. Ю. Ішлінський вважав, що на борту ракети можлива стабілізація (зокрема, гіроскопічна) напрямів осей чутливості вимірювачів «уявних» прискорень, тобто ньютонometrів або приладів, що безпосередньо вимірюють інтеграл за часом від біжучих значень «уявного» прискорення. Під «уявним» прискоренням тут мається на увазі різниця між дійсним прискоренням ракети і гравітаційним прискоренням. Схема роботи найпростішого ньютонметра (його, на думку О. Ю. Ішлінського, не цілком правильно називають іноді акселерометром) показана на рис. 1. Чутливим елементом являється кулька з масою  $m$ , яка практично без тертя переміщується всередині циліндричної порожнини корпусу приладу.

Корпус зв'язаний з кулькою пружиною з заданою жорсткістю  $c$ . Величина  $\delta$  переміщення кульки вздовж осі чутливості  $v$  виявляється пропорційною до проекції «уявного» прискорення на цю вісь  $a_v$ . Існує багато різноманітних конструкцій ньютонметрів (акселерометрів). Деякі з них вимірюють не саме уявне прискорення  $a_v$ , а його інтеграл за часом — уявну швидкість  $V_v = \int_0^t a_v dt$ .

До числа таких приладів можна віднести гіроскопічний інтегратор уявних прискорень (рис. 2). Якщо його корпус розташувати на стабілізованій платформі, то кутова швидкість прецесії гіроскопа  $d\alpha/dt$  буде пропорційною до проекції  $a_v$  на вісь зовнішнього кільця карданового підвісу уявного прискорення центра мас невідновленої системи «кожух – ротор» гіроскопа. При цьому сам кут  $\alpha$  виявляється пропорційним інтегралу від згаданої проекції.

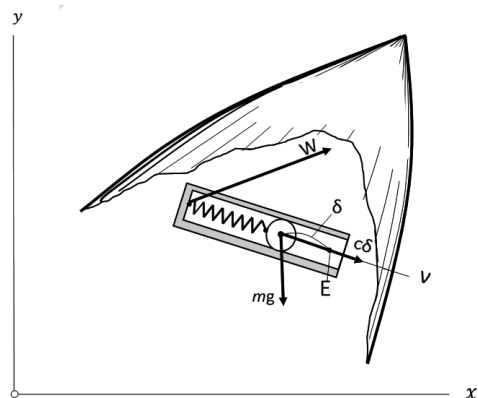


Рис 1. Схема роботи найпростішого ньютонметра.

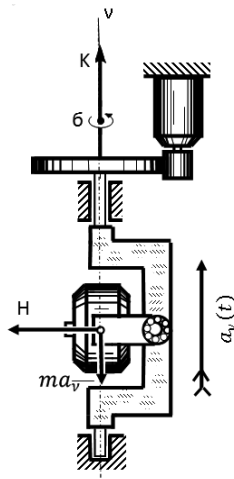


Рис 2. Гіроскопічний інтегратор уявних прискорень.

Приймалося, що досягання ракетою заданої дальності польоту забезпечується своєчасним виключанням її двигуна за сигналом, що надходить від рахунково-вирішального пристрою. На вхід останнього якраз і подаються біжучі показання чутливих елементів системи інерціального управління, що вимірюють «уявне» прискорення ракети або інтеграли за часом від «уявного» прискорення. Управління польотом має бути таким, щоб відхилення фактичного руху ракети від розрахункового не впливало б на дальність її польоту. Слід зауважити, що під терміном «рух ракети» мається на увазі рух матеріальної точки, з якою в кожний момент часу співпадає центр мас ракети.

О.Ю. Ішлінський звернув увагу на одну важливу обставину, а саме: незалежно від способу управління при його проектуванні слід виходити з того, що в одну і ту ж саму ціль — кінець пасивної ділянки — балістична ракета може попасти, рухаючись не обов'язково по програмній траєкторії, а по нескінченній множині сусідніх траєкторій. А тому для точного попадання ракети у ціль зовсім не треба, щоб у момент закінчення активної ділянки польоту ракети її координати і складові швидкості у деякій системі координат точно співпадали з розрахунковими, передбаченими програмою. Достатньо пе-

первати активну ділянку польоту ракети саме у ту мить, коли сукупність відхилень її біжучих координат і проєкцій швидкості від відповідних розрахункових значень забезпечить подальший рух по одній з траєкторій, що приводить до мети. Визначення співвідношень, яких повинні задовольняти щойно згадувані відхилення, і було головною задачею побудови теорії інерціального управління польотом балістичних ракет. Іншими словами, задача полягала у пошуку досить простої функції параметрів, що вимірюються на борту ракети за допомогою інерціальних чутливих елементів. Ця функція називається балістичною і будується на борту ракети за допомогою лічильно-розв'язувального пристрою, на який подаються біжучі покази інтеграторів прискорень. Величина її повинна бути безпосередньо пов'язаною з похибкою у дальності польоту ракети, яка б виникла у разі, якщо б вимикання двигуна сталося у цю мить. Система інерціального управління у свою чергу повинна видавати сигнал на припинення роботи двигуна у мить, коли балістична функція досягне значення, відповідного до перетворення у нуль тільки що згаданої похибки у дальності.

О. Ю. Ішлінський проаналізував задачу про інерціальне управління балістичними ракетами у спрощеній постановці, коли Земля вважалася плоскою і такою, що не обертається, не враховувався також вплив атмосфери, а сила тяжіння вважалася постійною за величиною і напрямом. При таких спрощеннях рух ракети на пасивній ділянці польоту повністю описується відомими рівняннями теоретичної механіки про рух матеріальної точки у пустоті в однорідному полі сили тяжіння. Ці рівняння можуть бути розв'язані у квадратурах, що спрощує розв'язок задачі управління рухом ракети. Було встановлено, яке співвідношення повинні задовольняти малі зміни параметрів кінця активної ділянки, тобто координат ракети і проєкцій її швидкості, в момент вимкнення двигуна, щоб ракета попала у задану ціль з похибкою не більше другого порядку малості. Це співвідношення являється основою для створення деякої змінної величини, названої балістичною функцією. Значення цієї функції у будь-який фіксований момент часу являє собою наближений вираз для похибки у дальності польоту ракети, яка буде мати місце, якщо її двигун вимкнута саме у цей момент. Очевидно, що для попадання ракети у ціль двигун треба вимкнути у момент проходження біжучих значень цієї функції через нуль.

Використовуючи як базову так звану стартову систему координат,



незмінно зв'язану з нерухомою Землею, О. Ю. Ішлінський показав, що у даному спрощеному варіанті руху ракети балістичну функцію можна побудувати на борту ракети, використовуючи єдиний інтегратор прискорення з наступним інтегруванням його показань за допомогою лічильно-розв'язувального пристрою. Було також показано, що дальність польоту ракети зміниться на величину другого порядку малості, якщо вектор її фактичної швидкості виявиться рівним розрахунковому, а положення самої ракети дещо зміститься у певному напрямку або, навпаки, при незмінному положенні ракети різниця між дійсним і уявним векторами її швидкості виявиться направленою певним чином. У даному випадку згадані напрями співпадають один з одним і паралельні вектору швидкості ракети у момент попадання її у ціль. У більш загальному випадку, якщо враховується криволінійність форми Землі, вплив атмосфери і неоднорідність поля тяжіння, такі напрямки теж існують, але вони не паралельні.

Для загального випадку польоту ракети без попередніх спрощень неможливо виразити величину дальності польоту ракети у вигляді формули, яка б містила у собі параметри кінця активної ділянки у стартовій системі координат. До того ж інерціальне управління вимагає неперервного визначення за допомогою лічильно-розв'язувальних пристроїв біжучих координат ракети і проєкцій її швидкості за показами ньютонометрів або інтеграторів «уявних» прискорень. Стартова система виявилась мало придатною для цієї мети через необхідність враховувати переносні прискорення і прискорення Коріоліса. Тому в цьому випадку задачу про автономне управління рухом ракети доцільніше розглядати у нерухомій системі координат  $\xi\eta\zeta$  з початком у центрі Землі. Вважалося, що осі чутливості двох розташованих на борту ракети ньютонометрів направлені паралельно до нерухомих осей  $\xi, \eta$  і вимірюють відповідні проєкції уявного прискорення  $a_\xi(t), a_\eta(t)$ . Виявилось, що і у цьому випадку з точністю до малих величин другого порядку малості відносно різниць між біжучими параметрами руху і їх розрахунковими значеннями у кінці активної ділянки вдалось визначити похибку в дальності, яка б мала місце при вимкненні двигуна у поточний момент часу. Вираз для такої умовної похибки у дальності і було прийнято за балістичну функцію. При цьому балістичне рівняння було приведене О. Ю. Ішлінським до на-

ступного вигляду:

$$\begin{aligned} & \left[ S_{\xi}(t) - S_{\xi}^*(t) \right] \frac{\partial l}{\partial \xi} + \left[ S_{\eta}(t) - S_{\eta}^*(t) \right] \frac{\partial l}{\partial \eta} + V_{\xi}(t) \frac{\partial l}{\partial u_{\xi}} + \\ & + V_{\eta}(t) \frac{\partial l}{\partial u_{\eta}} = V_{\xi}^*(\sigma^*) \frac{\partial l}{\partial u_{\xi}} + V_{\eta}^*(\sigma^*) \frac{\partial l}{\partial u_{\eta}}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де  $S_{\xi}(t)$ ,  $S_{\eta}(t)$  і  $V_{\xi}(t)$ ,  $V_{\eta}(t)$  — проєкції відповідно «уявних» шляху і швидкості ракети, які визначаються за допомогою інтегрування «уявного» прискорення  $a_{\xi}(t)$ ,  $a_{\eta}(t)$

$$\begin{aligned} V_{\xi}(t) &= \int_0^t a_{\xi}(t) dt; \quad S_{\xi}(t) = \int_0^t V_{\xi}(t) dt, \\ V_{\eta}(t) &= \int_0^t a_{\eta}(t) dt; \quad S_{\eta}(t) = \int_0^t V_{\eta}(t) dt. \end{aligned} \quad (1.2)$$

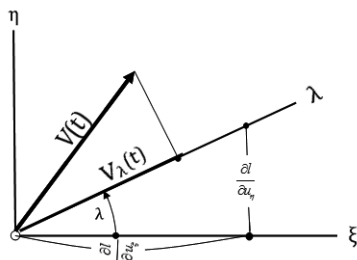
$S_{\xi}^*(t)$ ,  $S_{\eta}^*(t)$  і  $V_{\xi}^*(t)$ ,  $V_{\eta}^*(t)$  — розрахункові значення відповідних параметрів,  $\sigma^*$  — розрахункова тривалість польоту в часі; частинні похідні  $\frac{\partial l}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial l}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial l}{\partial u_{\xi}}$ ,  $\frac{\partial l}{\partial u_{\eta}}$ , які називаються балістичними коефіцієнтами, слід брати при значеннях своїх аргументів, відповідно рівних  $\xi^*$ ,  $\eta^*$  і, отже, для заданого польоту вони являються постійними величинами.

Для побудови лівої частини основного балістичного рівняння необхідна наявність на борту ракети двох інтеграторів прискорень, осі яких протягом всієї активної ділянки польоту повинні зберігати напрями, паралельні відповідним осям відповідно рівних  $\xi$  і  $\eta$ . Крім того, необхідний лічильно-розв'язувальний пристрій, який має два додаткових елементи для інтегрування у часі біжучих показань самих інтеграторів прискорень і спеціальний елемент для відтворення розрахункових біжучих значень проєкцій «уявного» шляху.

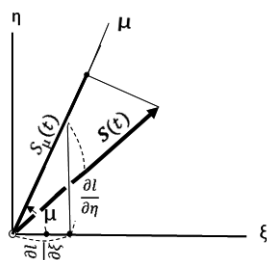
Як показав далі О.Ю. Ішлінський, можна спростити лічильно-розв'язувальний пристрій, виконуючи замість двох послідовних операцій інтегрування всього одну, якщо осі чутливості інтеграторів прискорень розмістити паралельно до деяких незмінних у кожному конкретному випадку польоту ракети напрямів (так званих  $\lambda$ - і  $\mu$ -напрямів). У тому, що кути  $\lambda$  і  $\mu$  постійні, можна переконатися із рис. 3 і 4, враховуючи зроблене вище зауваження про постійність частинних похідних для кожного конкретного випадку.

Балістичне рівняння у цьому випадку приводиться до вигляду

$$V_{\lambda}(t) + p[S_{\mu}(t) - S_{\mu}^*(t)] = V_{\lambda}^*(\sigma^*). \quad (1.3)$$



**Рис 3.** Побудова  $\lambda$ -напрямку осі чутливості інтеграторів уявного прискорення.



**Рис 4.** Побудова  $\mu$ -напрямку осі чутливості одного інтегратора уявного прискорення.

Для побудови на борту ракети лівої частини цього балістичного рівняння необхідне додаткове інтегрування тільки одного інтегратора прискорень з віссю чутливості, орієнтованою вздовж  $\mu$  напрямку.

Також О. Ю. Ішлінським було виявлено можливість наближено розв'язати задачу побудови балістичного рівняння і при допомозі одного вимірювача прискорень, але при цьому потрібно міняти орієнтації його осі за заздалегідь заданим законом. У лічильно-розв'язувальному пристрої у цьому випадку повинно бути передбаченим інтегрування поточних показань цього вимірювача, попередньо помножених на коефіцієнт, який також змінюється з часом. Якщо ж вважати відхилення сили тяги двигуна від поздовжньої осі ракети незначним, то для розв'язку задачі про управління дальністю можна використати поточні показання інтегратора, корпус якого закріплений безпосередньо на борту ракети, а вісь чутливості паралельна до її поздовжньої осі (так званий поздовжній інтегратор).

При розв'язуванні питань, пов'язаних з керуванням бічним рухом ракети, О. Ю. Ішлінський виходив з того, що тривалість активної ділянки руху при польоті на одну і ту ж дальність залежить для ракет однієї і тої ж конструкції від ряду випадкових обставин, а, значить, сама є випадковою величиною, математичне сподівання якої близьке до величини тривалості активної ділянки розрахункового руху. Тому достатньо, щоб регулювання бічним рухом ракети було особливо точним тільки протягом відрізка часу, в якому може статися вимкнення двигуна. Було показано, що у першому наближенні бічне відхилення ракети виявляється рівним проекції її уявного шляху на нормаль

до програмної площини польоту, а значення швидкості цього відхилення — відповідне проєкції на ту ж нормаль уявної швидкості. Це дало можливість побудувати так звану функцію бічного відхилення, використовуючи ті ж інтегратори прискорень і елементи повторного інтегрування, що й при розв'язку задачі про інерціальне управління дальністю польоту.

Запропоновані і обґрунтовані О. Ю. Ішлінським методи інерціального наведення балістичних ракет були використані при створенні комплексів командних приладів ракет Р-1, Р-2, Р-5, Р-7 та ін.

**2. Розвиток теорії інерціальної навігації в Інституті математики.** Післявоєнні 50-ті, 60-ті роки минулого століття були роками бурхливого розвитку як молоді тоді ракетно-космічної галузі, так і традиційних галузей народного господарства, якими були літакобудування і суднобудування. Це спонукало учених і розробників до необхідності докорінного і термінового вдосконалення засобів навігації і управління рухомими об'єктами. Поряд з розвитком інших принципів навігації особливо інтенсивно у цей час проводились роботи по створенню інерціальних систем навігації, в яких місцезнаходження рухомого об'єкта визначається з допомогою інтегрування прискорень, що вимірюються на його борту. Проте, незважаючи на удавану зовнішню простоту теорії інерціальної навігації, процес розвитку цієї теорії виявився досить складним. Тривалий час серед спеціалістів побувала думка, що точний розв'язок задачі про автономне визначення координат рухомого об'єкта за допомогою системи інерціальної навігації взагалі неможливий через так званий «сферичний тупик», викликаний наявністю переносних та коріолісівських прискорень, коли об'єкт переміщується, зокрема, по поверхні земної сфери чи навколоземною орбітою. Із цього робили висновок, що крім інструментальних похибок, викликаних неідеальною роботою гіроскопів, ньютонетрів, інтегруючих пристроїв, будуть виникати ще і методичні похибки, що викликані самою принциповою схемою системи і не можуть бути усунуті ніякими конструктивними удосконаленнями. При цьому розрахунки показували, що ці методичні похибки можуть досягати досить значних величин.

Помітною віхою на шляху розвитку загальної теорії інерціальної навігації та її застосувань, зокрема у ракетно-космічній галузі, стало опублікування виконаної у стінах Інституту математики АН УРСР роботи О. Ю. Ішлінського «Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и изме-

рителей ускорений» [2], в якій уперше доведена можливість строгого розв'язку основної задачі автономного визначення місцезнаходження рухомого об'єкта за допомогою гіроскопів, ньютонometrів та інтегруючих пристроїв. Якраз з виходом цієї роботи і розвіявся міф про неможливість точного розв'язку задач визначення місцезнаходження рухомого об'єкта за допомогою систем інерціальної навігації.

У своїй роботі О.Ю. Іншлінський розглянув одну з найпростіших схем інерціальної навігації (рис. 5), яка може бути використана при навігації морських суден, літаків або штучних супутників, що рухаються по навколоремних орбітах. До складу системи входять два високоточних гіроскопи  $I$  і  $II$ . Вісь зовнішнього кільця гіроскопа  $I$  паралельна до стабілізованої платформи, розташованої на рухомому об'єкті, а вісь зовнішнього кільця гіроскопа  $II$  перпендикулярна до цієї платформи. Спеціальна відслідковуюча система безперервно приводить платформу в положення, в якому вона, у свою чергу, перпендикулярна вектору власного кінетичного моменту  $H'$  гіроскопа  $I$ . Коригуючий момент  $K$ , який прикладений до осі зовнішнього кільця гіроскопа  $II$ , змушує власний кінетичний момент  $H''$  цього гіроскопа постійно бути паралельним до площини платформи.

Крім гіроскопів, на стабілізованій платформі розташовані два одновісних ньютонometri, осі чутливості яких  $x$  і  $y$  взаємно перпендикулярні і лежать у площині платформи.

Проекції абсолютної кутової швидкості платформи на осі зв'язаної з нею системи координат  $xyz$  будуть наступними:

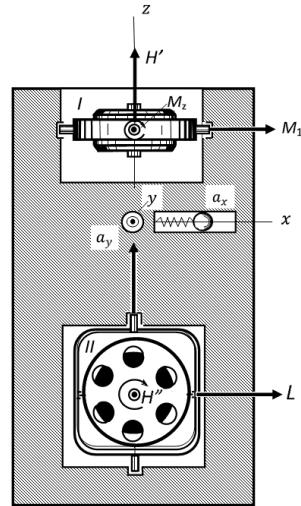
$$\omega_x = -\frac{M_2}{H'}, \quad \omega_y = -\frac{M_1}{H'}, \quad \omega_z = -\frac{L}{H''}, \quad (2.1)$$

де  $M_1$ ,  $M_2$  і  $L$  — величини моментів, прикладених до осей підвісів гіроскопів.

Було показано, що для незбуреності горизонтованої у початковий момент часу платформи шойно згадані моменти необхідно формувати згідно з формулами

$$M_1 = \frac{H'}{R} \left( \int_0^t a_x dt + v_x(0) \right), \quad M_2 = -\frac{H'}{R} \left( \int_0^t a_y dt + v_y(0) \right), \quad L = 0, \quad (2.2)$$

де, як і вище,  $a_x$ ,  $a_y$  — показання ньютонometrів,  $R$  — радіус Землі,  $v_x(0)$ ,  $v_y(0)$  — початкові значення абсолютної лінійної швидкості об'єкта на відповідній осі.



**Рис 5.** Схема інерціальної навігації. I, II — гіроскопи з власними кінетичними моментами відповідно  $H'$  і  $H''$ ;  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $L$  — коригуючі моменти;  $a_x$ ,  $a_y$  — покази ньютонometrів.

Третя із наведених рівностей означає, що протягом усього руху проекція абсолютної кутової швидкості платформи на вісь  $z$  повинна бути рівна нулеві, тобто платформа повинна бути вільною в азимуті.

При відомих початкових значеннях широта  $\varphi$ , довгота  $\lambda$  об'єкта і кут  $\chi$  між віссю  $x$  платформи і дотичною до паралелі можуть бути визначені із системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\omega_x(t) \cos \chi + \omega_y(t) \sin \chi, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -U + \frac{\omega_x(t) \sin \chi + \omega_y(t) \cos \chi}{\cos \varphi}, \\ \frac{d\chi}{dt} &= -\omega_z(t) - [\omega_x(t) \sin \chi + \omega_y(t) \cos \chi] \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Цю систему рівнянь О. Ю. Ішлінський назвав вихідними рівняннями основної задачі інерціальної навігації. Їх треба розглядати як сукупність трьох нелінійних диференціальних рівнянь відносно трьох

невідомих функцій часу  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\lambda = \lambda(t)$ ,  $\chi = \chi(t)$  при заданих функціях  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$ .

Поряд з проблемою «методичних помилок», яку було успішно вирішено за допомогою праць О. Ю. Ішлінського і інших дослідників, перед розробниками ракетно-космічної техніки постала не менш гостра проблема інструментальних похибок інерціальних систем навігації. Останні виникають через недосконалість окремих елементів і вузлів системи: гіроскопів, ньютонometrів, інтеграторів, рахунково-обчислювальних пристроїв та ін. і обумовлені конструктивними недоліками цих елементів, відхиленнями їх статичних і динамічних характеристик від номінальних значень і т. д. І саме на зниження інструментальних похибок окремих елементів і вдосконалення тактико-технічних характеристик систем управління у цілому була спрямована робота ракетно-космічного комплексу в даний період. При цьому роботи інженерно-конструкторських колективів велись у тісній співпраці з ученими академічних інститутів.

Про характерний епізод такої співпраці згадує академік РАН Б. Є. Черток, який на той час був керівником відділу систем управління НДІ-88, Особливого конструкторського бюро № 1 (ОКБ-1), головним конструктором якого був С. П. Корольов: «Кроме ориентации двух осей по углам тангажа и крена, которые обеспечивались ионной системой ориентации спутников по инфракрасной вертикали, требовалось остановить свободное вращение спутника вокруг вертикальной оси, направленной на Землю, то есть научиться ориентировать его относительно плоскости курса, как мы говорили по ракетному, по углу рыскания. Для этой цели Токар<sup>1</sup> предложил гироскопический ориентирующий прибор, позднее названный "гироорбитант". Он применялся практически на всех отечественных автоматических и пилотируемых космических кораблях, нуждавшихся в орбитальной ориентации. Теория гироскопического прибора явилась основой кандидатской диссертации Токаря, которую он защитил в 1959 году. Изготовить гироскопический прибор своими силами мы не могли. Требовалось высокоточное специализированное производство. Естественно, что обратились к тогдашнему монополисту в ракетной гироскопии — Виктору Кузнецову<sup>2</sup>. Первая реакция была резко отрицательной. Кузнецов не поже-

<sup>1</sup>С. М. Токар — один з учасників групи Раушенбаха, яка була створена в НДІ для розробки систем стабілізації і орієнтації ШСЗ (штучних супутників Землі).

<sup>2</sup>В. І. Кузнецов — головний конструктор НДІ гіроскопічної стабілізації (НДІ-944, пізніше НДІ прикладної механіки).

лал виготовляти у себе прибор, ідея якого родилась где-то на стороні. Крім того, Кузнецов усомнився в самій ідеї гіроорбітанта, який представляв собою, як він мені висказав, "принцип морського гірокомпаса, іспорчений для космоса". Не відмахнутися від нас в ті часи Кузнецов не міг. Це грозило серйозним об'ясненням з Королевим, а той, чого доброго, міг сказати: "Ну, Вітя, якщо ти відмовляєшся мені допомогти, я пошуку інших". "Вітя" попросив Александра Ішлинського провести детальну перевірку теорії в математичному Інституті в Києві, директором якого той був обраний ще в 1948 році. Незалежну експериментальну перевірку принципу за порученням Кузнецова виконав один з його провідних спеціалістів Оскар Райхман. Не будучи великим теоретиком, але являючись хорошим організатором і гіроскопістом-практиком, той швидко спорудив стенд, на якому підтвердив робоспроможність приладу. Велика заслуга Ішлинського і Райхмана полягала в тому, що вони незалежно один від одного переконували Кузнецова. Він повірив і дав зелений світ виготовленню першої серії. Прилади Кузнецова за індексом КИ-008, КИ-009 і т. д. були встановлені на перші космічні кораблі: "Востоки" "Зеніти" наступні розвідники, чолемевські "Алмази"» [3].

Саме багатолітні творчі зв'язки О. Ю. Ішлинського з провідними організаціями ракетно-космічного комплексу та суднобудівної промисловості визначили в основному тематику створеного ним в Інституті математики НАНУ відділу загальної механіки. Основу цього відділу склали випускники механіко-математичного факультету Київського університету М. Є. Темченко, В. М. Калинович, О. П. Бойчук. Згодом до них приєдналися В. О. Стороженко, В. П. Василенко, С. М. Онищенко. При відділі була створена експериментальна лабораторія, якою керував В. Г. Нікіташенко.

О. Ю. Ішлинський продовжував керувати відділом на громадських засадах і після від'їзду до Москви у 1955 році. У 1963 році переїхав з Москви до Києва та став працювати в Інституті математики знань спеціалістом у галузі теорії гіроскопічних систем В. М. Кошляков, у 1965 році саме він очолював відділ, який почав називатися відділом механіки та процесів керування.

Учнями і послідовниками О. Ю. Ішлинського в Інституті математики НАНУ були проведені численні дослідження, присвячені різним аспектам теорії гіроскопічних приладів і систем інерціальної навігації. Як правило, ці дослідження проводилися у тісному творчому кон-



такті з ученими і розробниками провідних конструкторських організацій, а саме виникнення цих досліджень було продиктоване нагальними потребами цих організацій. Прикладом може бути багаторічне співробітництво Інституту математики з провідним підприємством морського приладобудування Ленінградським ЦНДІ «Електроприбор» (до 1966 р. — НИИ-303). У відрядженнях на цьому підприємстві разом із співробітниками Інституту математики активну участь приймав і О.Ю. Ішлінський. В обговореннях тематики співпраці брали участь такі відомі учені-конструктори, як С.Ф. Фармаковський, який обіймав посаду заступника директора по науковій частині ЦНДІ «Електроприбор», академік РАН В.Г. Пешехонов — нинішній директор підприємства та відомий учений в галузі гіроскопічних систем С.С. Ривкін. Вироблялися технічні завдання, результати виконання яких відображались у чисельних науково-технічних звітах Інституту математики, що містили не лише конкретні практичні рекомендації, але нерідко могли представляти і загальнотеоретичний інтерес.

Зокрема, О.П. Бойчук розробив метод еквівалентних скінчених поворотів, який базується на класичних результатах теорії скінчених поворотів. Цей метод дозволяє одержати точний розвиток деяких нелінійних задач автономного визначення і стабілізації. Ним же досліджено помилки і стійкість роботи інерціальної системи з врахуванням похибок ньютонometrів, викликаних наявністю сухого тертя. У подальших його роботах запропонований загальний підхід до проблеми незбурюваності гіромаятникових платформ; побудований клас інерціальних систем, що використовують незбурювані гіромаятникові і гіроакселерометричні платформи; вирішено ряд задач оптимального демпфування інерціальних систем; з використанням процедур Калмана і Вінера-Хопфа знайдені закони оптимального управління у задачах демпфування коливань інерціальної системи за наявності «білого шуму» в самій системі і у вимірювачах [4–6].

В.М. Калинович представив ряд модифікацій запропонованої О.Ю. Ішлінським інерціальної системи, побудованої на основі гірогоризонткомпаса. У цій системі координати рухомого об'єкта широта  $\varphi$ , довгота  $\lambda$  і кут  $\vartheta$ , що характеризує орієнтацію чутливого елемента компаса у географічній системі координат, визначаються з наступної системи рівнянь:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\nu(t)}{R} \sin \vartheta, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -U + \frac{\nu(t) \cos \vartheta}{R \cos \varphi}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\nu(t)}{R} \cos \vartheta \operatorname{tg} \varphi + \frac{d\theta}{dt}, \quad (2.4)$$

де  $\nu(t)$  — біжуче значення абсолютної швидкості об'єкта, що визначається з рівності  $ml\nu = 2B \cos \sigma$ ;  $2\sigma$  — кут розведення гіроскопів компаса,  $B$  — кінетичний момент кожного з гіроскопів,  $\vartheta$  — біжуче значення кута між віссю  $x$ , зв'язаною з чутливим елементом гірогоризонткомпаса та нормаллю до площини зовнішнього кільця гіроскопа напрямку. Для цього різновиду системи інерціальної навігації В. М. Калиновичем розглянуто вплив сухого (кулонового) тертя у підшипниках осей кожухів гіроскопів гірогоризонткомпаса на точність автономного визначення координат місцеположення об'єкта [7,8].

В. М. Кошляков першим звернув увагу на зручність застосування до розв'язку рівнянь основної задачі інерціальної навігації (2.3) параметрів Родріга–Гамільтона [9]. Дійсно, покладаючи  $\psi = Ut + \lambda + \frac{\pi}{2}$  і  $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  та здійснюючи у цих рівняннях заміну змінних

$$\begin{aligned} r_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \chi}{2}; & r_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \chi}{2}; \\ r_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \chi}{2}; & r_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \chi}{2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_0^2 \equiv 1)$$

прийдемо до системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_x r_2 - \omega_y r_3 + \omega_z r_0); & \frac{dr_2}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_z r_0 - \omega_x r_2 + \omega_y r_1); \\ \frac{dr_3}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_y r_0 - \omega_z r_1 + \omega_x r_2); & \frac{dr_0}{dt} &= \frac{1}{2}(-\omega_x r_1 - \omega_y r_2 - \omega_z r_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

У роботах В. О. Стороженка і М. Є. Темченко [10-11] аналізуються переваги системи рівнянь основної задачі інерціальної навігації у параметрах Родріга–Гамільтона (2.6) перед системою в географічних координатах (2.3). Лінійна структура системи (2.6), що, на відміну від системи вихідних рівнянь основної задачі інерціальної навігації (2.3), не містить особливостей на полюсах  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  і тригонометричних функцій, значно спрощує її аналітичне дослідження і чисельне інтегрування. Тим не менше при навігації поблизу полюсів Землі ( $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ;  $\theta = 0, \pi$ ) параметри  $r_1$ ,  $r_2$  набувають малих значень, а тому при обчисленні  $\lambda$  і кута  $\chi$  доводиться оперу-

вати дуже малими величинами, і найменша помилка у визначенні цих параметрів приводить до великих похибок у визначенні величин  $\lambda$  і  $\chi$ . Щоб цього уникнути, було запропоновано видозмінену схему лічильно-розв'язувального пристрою з використанням параметрів Кейлі-Клейна і замість географічної введено нову координатну систему, яка являється стереографічним відображенням Декартової системи координат на сферу. Щойно згадані параметри Кейлі-Клейна являють собою комплексно значні комбінації параметрів Родріга-Гамільтона  $\mu_1 = r_1 + ir_2$ ;  $\mu_2 = r_0 + ir_3$  ( $|\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 \equiv 1$ ).

При цьому значення параметрів Кейлі-Клейна визначаються шляхом розв'язання системи рівнянь

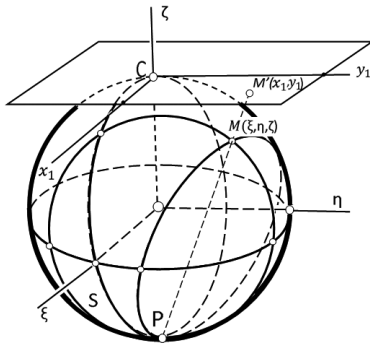
$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= -\frac{1}{2}(i\omega_z\mu_1 - (\omega_x + i\omega_y)\mu_2), \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= \frac{1}{2}(i\omega_z\mu_2 + (\omega_x - i\omega_y)\mu_1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Знайдені таким чином параметри Кейлі-Клейна можуть бути використані для знаходження місцеположення об'єкта у стереографічній системі координат, яка будується наступним чином. Проведемо площину  $z$ , дотичну до Земної сфери у точці  $C$ , що відповідає Північному полюсу Землі (рис. 6). У цій площині введемо систему координат  $x_1, y_1$  так, щоб осі цієї системи були паралельні відповідним осям  $\xi, \eta$ . Далі точки площини  $z$  стереографічно спроектуємо на сферу, взявши за полюс точку  $P$ , відповідну Південному полюсу земної сфери. Шляхом такого проектування будь-яка пряма на площині переходить у відповідне коло на сфері. Координатна сітка системи  $x_1, y_1$  переходить у сімейство кіл, що перетинаються під прямим кутом і утворюють сітку криволінійних координат на земній сфері.

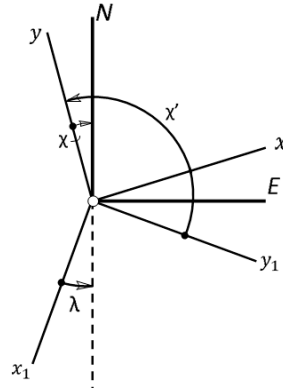
Згідно з наведеною побудовою, точці площини  $M$  земної сфери, в якій у даний момент знаходиться геометричний центр об'єкта, відповідає певна точка  $M'$  площини  $z$ , а тому положення центру об'єкта можна задати комплексним числом  $z^*$ , дійсна і уявна частини якого є відповідно координатами  $x_1$  і  $y_1$  точки  $M'$ . При цьому виявилось, що при відомих у даний момент часу значеннях параметрів Кейлі-Клейна комплексна координат  $z^*$  визначається за формулою

$$z^* = -2R \frac{\mu_1}{\mu_2} \exp \left[ \left( \frac{\pi}{2} - Ut \right) i \right]. \quad (2.8)$$

Отже, для автономного визначення координат рухомого об'єкта у запропонованій системі координат потрібно побудувати обчислюваль-



**Рис 6.** Стереографічна проекція Декартової системи координат на земну сферу.



**Рис 7.** Взаємне розташування в азимуті осей географічного тригранника і стереографічних координатних ліній.

но-розрахунковий пристрій, який розв'язував би систему рівнянь (2.7) і підставляв знайдені значення  $\mu_1$  і  $\bar{\mu}_2$  у формулу (2.8). Для повного визначення положення об'єкта на земній сфері необхідно, крім координат центру об'єкта, знати орієнтацію його в азимуті. На рис. 7 показано взаємне розташування осей географічного тригранника  $N$  і  $E$  осей  $x_1$  і  $y_1$ , орієнтованих вздовж дотичних до стереографічних координат, координат  $x$  і  $y$ , незмінно пов'язаних з стабілізованою платформою. Кут  $\chi'$ , що характеризує орієнтацію платформи відносно напрямків координатних ліній, визначається за формулою

$$\chi' = \arg \mu_2 - Ut. \quad (2.9)$$

Перехід від введеної системи координат  $x_1, y_1$  до географічної координатної системи здійснюється за допомогою таких співвідношень:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{|z^*|}{2R}, \quad \lambda = \arg z^*, \quad \chi = \arg \mu_2 - Ut - \frac{\pi}{2} - \lambda. \quad (2.10)$$

У подальших дослідженнях М. Є. Темченко узагальнила задачу визначення місцеположення об'єкта у стереографічній системі координат, врахувавши несферичність Землі і розглянувши випадок руху об'єкта по поверхні земного еліпсоїда обертання з півсями відповідно — великою  $a$  та малою  $c$  [12]. При цьому формула (2.8) для

визначення комплексної координати  $z^*$  набула вигляду

$$z^* = \frac{a}{c} z_1 \left[ 1 + \frac{e^2}{2} \frac{4c^2 - |z_1|^2}{4c^2 + |z_1|^2} \right]; \quad z_1 = -2c \frac{\mu_1}{\mu_2} \exp \left[ \left( \frac{\pi}{2} - Ut \right) i \right], \quad (2.11)$$

де  $e = [(a^2 - c^2)/a^2]^{1/2}$  — перший ексцентриситет земного еліпсоїду.

З погляду на розвиток загальної теорії інерціальної навігації доречно згадати про дослідження, які стосуються стійкості розв'язку основної задачі інерціальної навігації. Потрібно вказати на різноманітність підходів різних авторів до розв'язування цієї проблеми. Зокрема, О. Ю. Ішлінський привів геометричний спосіб доведення стійкості основної задачі інерціальної навігації, що базувався на встановленні ним факту сталості кінцевого повороту, що здійснює перехід супроводжуючого тригранника з незбуреного положення у збурене [13]. В. О. Стороженком у співавторстві з О. П. Бойчуком ця задача була розв'язана аналітично шляхом побудови функції Ляпунова для рівнянь у варіаціях географічних координат руху об'єкта [14]. Було знайдено чотири інтеграли, які дозволили записати загальний розв'язок рівнянь (2.3) і тим самим підтвердити теорему О. Ю. Ішлінського про сталість кінцевого повороту збурень. Це дало можливість завершити дослідження стійкості розв'язків кінематичних рівнянь інерціальної навігації. Проте встановлена стійкість не є асимптотичною, а тому при недотриманні початкових умов виникають помилки у визначенні координат місцеположення об'єкта, характер яких близький до коливань з частотою, яка дорівнює кутовій швидкості добового обертання Землі. Тому при конкретній реалізації розрахунково-обчислювального пристрою, що розв'язує систему диференціальних рівнянь у тій чи іншій формі, простої (не асимптотичної) стійкості не досить для ефективної роботи інерціальної системи навігації. Необхідно, щоб система була асимптотично стійкою. Для цього у системі має бути передбачена схема демпфування. В. О. Стороженком була запропонована схема демпфування з використанням зовнішньої інформації лише про широту місцезнаходження об'єкта  $\varphi$  [15]. Ця схема може бути застосована для системи інерціальної навігації з стабілізованою платформою, яка орієнтована по дотичних до координатних ліній, що являються стереографічними проекціями плоских Декартових координат на сферу.

Запропонований О. Ю. Ішлінським енергетичний метод дослідження стійкості гіроскопічних систем був розвинутий В. О. Стороженком [16] на випадок багаточастотних коливань, які виникають, зокре-

ма, при роботі платформових систем інерціальної навігації. Було встановлено цікавий факт якісно різного впливу дисипативних сил на високочастотні (нутаційні) та низькочастотні (прецесійні) коливання систем інерціальної навігації [17], а також проведено ряд досліджень, що стосуються похибок систем інерціальної навігації, викликаних випадковими збуреннями показань ньютонometrів і випадковими збурюючими моментами.

М. Є. Темченко розв'язала задачу про автономне визначення місцезнаходження об'єкта за допомогою системи інерціальної навігації, встановленої на об'єкті, що довільно переміщається, з врахуванням несферичності Землі. Вона дослідила вплив випадкових відхилень горизонтуючого гіроскопа на поведінку системи інерціальної навігації з примусовим обертанням її елементів; вивчила похибки роботи однокомпонентної системи інерціальної навігації в умовах нерегулярної хитаючи об'єкта з врахуванням інерційності елементів і в'язкого тертя в осі підвісу платформи.

Слід також відзначити виконаний С. М. Онищенком комплекс досліджень щодо застосування різних кінематичних параметрів у рівняннях безплатформових інерціальних систем [18]. Він показав, що використання непозиційної системи залишкових класів у навігаційному комплексі у просторі параметрів Кейлі–Клейна має певні переваги при побудові обчислювальних алгоритмів.

Розвиваючи дослідження О. Ю. Ішлінського щодо інерціального наведення балістичних ракет, Д. Г. Коренівським спільно з Ю. А. Карпачовим (Ю. А. Карпачов — до 1981 р. співробітник СКБ київського заводу автоматики ім. Г. І. Петровського, в 1981–1986 рр. — співробітник КБ Електробудування м. Харкова, відраджений на цей період для наукової роботи до Інституту математики) розроблено нові раціональні електромеханічні способи автономного інерціального наведення [19]. Зокрема автори ввели до розгляду в вертикальній площині польоту деяку косокутну систему координат із зростаючим у часі за величиною на проміжку роботи двигуна ракети розхилом координатних осей  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ . Орієнтація вздовж цих осей вимірювачів проекцій «уявної» швидкості центру мас ракети дає можливість побудувати на борту ракети основне балістичне рівняння у найбільш простому вигляді — у вигляді суми вимірюваних на борту ракети проекцій «уявної» швидкості центру мас ракети на ці координатні осі. Вираз дістав назву « $\alpha, \beta$ » — функціонал інерціального наведення.

**3. Проблеми балансування при конструюванні космічних апаратів.** Однією з головних вимог до керованих у польоті космічних апаратів при їх конструюванні є вимога суміщення головних осей інерції з геометричними осями, відносно яких здійснюється керування рухомим об'єктом. При неспівпаданні цих осей може поряд з обертанням навколо головної осі виникнути небажане обертання (прецесія) самої головної осі навколо вектора кінетичного моменту. У результаті космічний апарат фактично не буде стабілізованим.

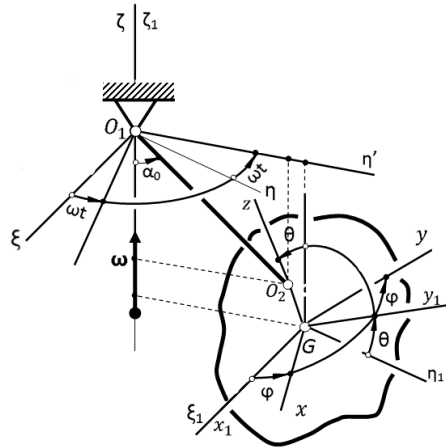
Суміщення головних осей з осями стабілізації здійснюють у процесі конструювання космічного апарату, розраховуючи напрями головних осей і змінюючи у разі потреби положення окремих об'єктів, які розташовані всередині апарата.

Положення головних осей реально виготовленого виробу може відрізнятися від розрахункових через похибки у визначенні мас об'єктів, а також їх просторового розташування. Звідси виникає завдання експериментального визначення положень головних осей інерції космічного апарата та, у разі потреби, суміщення їх з геометричними осями за допомогою встановлення додаткових вантажів (балансування).

У 70-х роках минулого століття С. В. Малашенко висунув ідею принципово нового технологічно простого методу динамічного балансування твердих тіл, заснованого на швидкому обертанні їх на струні. Цей метод досить близький до відомого методу Лаваля самоцентрування ротора, центр мас якого через технологічні недосконалості виготовлення не співпадає з його геометричним центром. Суть методу Лаваля полягає у тому, що при швидкому обертанні такого ротора його центр мас прямує до осі обертання. Аналогічно підвішене на струні тіло при обертанні з великою кутовою швидкістю поводить себе таким чином, що одна із його головних центральних осей інерції прагне до співпадання з нерухомою вертикаллю.

Робота з обґрунтування цього методу і його експериментальної перевірки була проведена в Інституті математики М. Є. Темченко і В. О. Стороженком за участю співробітника Інституту механіки НАНУ П. Г. Шишкіна. Було вивчено рух твердого тіла на струні у найзагальнішій постановці: розглядалося тіло довільної форми, точка кріплення якого до струни не знаходиться на жодній з його головних центральних осей інерції (рис. 8). Рівняння динамічної рівноваги такого твердого тіла можна звести до вигляду

$$\nu \sin \alpha_0 - (\sin \alpha_0 + k \sin \theta_0) \cos \alpha_0 = 0,$$



**Рис 8.** Стаціонарні рухи твердого тіла довільної форми, підвішеного на струні у будь-якій точці своєї поверхні.

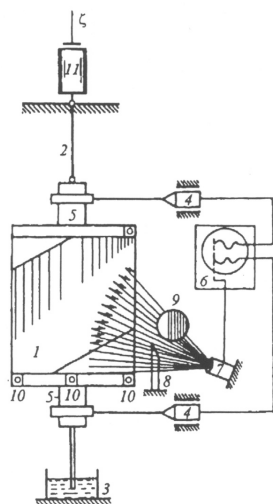
$$\begin{aligned}
 mal\nu \frac{\sin(\theta_0 - \alpha_0)}{\cos \alpha_0} + (A - B) \cos(x^*, \eta_1) \cos(x^*, \zeta_1) + \\
 + (C - B) \cos(z^*, \eta_1) \cos(z^*, \zeta_1) = 0, \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

$$(A - B) \cos(x^*, \xi_1) \cos(x^*, \zeta_1) + (C - B) \cos(z^*, \xi_1) \cos(z^*, \zeta_1) = 0,$$

де  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$  і  $A, B, C$  — відповідно головні центральні осі та головні центральні моменти інерції тіла;  $m, a$  — його маса та відстань між центром мас тіла і точкою кріплення його до струни;  $\nu = g/l\omega^2$ ;  $k = a/l$  — безрозмірні параметри.

При зростанні кутової швидкості  $\omega$  тобто при  $\nu \rightarrow 0$  рівняння (3.1) задовольняються, якщо одна з головних центральних осей інерції тіла  $x^*$ ,  $y^*$  чи  $z^*$  збігається з вертикаллю струни, і, крім того, виконується рівність  $l \sin \alpha_0 = a \sin \theta_0$ . А ця рівність, як видно з рис. 8, можлива тільки у випадку, коли центр мас тіла знаходиться строго на нерухомій вертикалі. Це є підтвердженням ідеї динамічного балансування твердих тіл на струнному підвісі. У випадку, коли кутова швидкість чи  $\omega$  скінченна, але настільки велика, що у рівняннях (3.1) члени, до складу яких входить величина  $\nu$ , мало впливають на характер руху, стаціонарні рухи тіла близькі до згаданих граничних форм.





**Рис 9.** Принципова схема установки для динамічного балансування ротора на струнному підвісі. 1 — тіло, що балансується; 2 — струна; 3 — заспокоювач коливань; 4 — датчик зміщення цапф моделі; 5 — кільця; 6 — осцилоскоп; 7 — стробоскоп; 8 — оптичний орієнтир; 9 — балануючі маси; 11 — електродвигун.

Експериментальні дослідження по розробці даного методу динамічного балансування проводились на спеціально сконструйованій установці, схематично зображеній на рис. 9. В експериментах динамічним балансуванням вважався процес співпадання із заданою точністю осей опорних цапф 5 моделі з її головною центральною віссю інерції. Якщо модель відбалансована, то при обертанні на струні з великою кутовою швидкістю її головна центральна вісь та осі цапф практично збігатимуться з нерухомою вертикаллю. В цьому випадку на екрані осцилографа повинні бути два горизонтальні сліди від променів. Якщо ж модель не відбалансована, то осі цапф описуватимуть кола, і в цьому випадку відбуватиметься «биття» одягнутих на цапфи кілець 5. У результаті на екрані осцилоскопа замість горизонтальних прямих з'являться криві, близькі за формою до синусоїд з періодом, що дорівнює проміжку часу одного оберту моделі. Балансування моделі відбувалось шляхом перерозподілу балансувальних тягарців на

спеціально виділених для цього місця тіла моделі 1. Проведені на цій установці експерименти, які підтверджені числовими розрахунками, показали, що запропонований С. В. Малашенком метод динамічного балансування дає змогу при порівняно невеликій кутовій швидкості (близько 200 рад/с) визначити місцеположення дебалансуючого тягарця масою 4 Г на поверхні моделі масою 20 кГ.

Вище вже було зазначено, що у процесі монтажу космічного апарата необхідно знати динамічні характеристики (масу, головні осі і моменти інерції) не тільки апарата у цілому, а й окремих об'єктів космічної техніки, які містяться всередині апарата для правильного їх розташування. Серед цих об'єктів можуть бути тіла неправильної геометричної форми, і їх динамічні характеристики можна визначити лише експериментально. Відомо багато методів експериментального визначення моментів інерції твердого тіла відносно деякої фіксованої осі. Досить велика бібліографія робіт, присвячених опису цих методів, представлена в [20]. Набагато менше розроблене питання про експериментальне визначення напрямків головних осей інерції у твердому тілі довільної конфігурації. Значний прорив у цьому напрямку був здійснений в Інституті математики В. О. Стороженком, М. Є. Темченко за участю вченого-експериментатора з Інституту механіки НАНУ П. Г. Шишкіна. В одному з можливих розв'язків цієї задачі використовується властивість стаціонарного руху підвішеного на струні твердого тіла, викладена в [21]. Суть її полягає у тому, що стаціонарні рухи підвішеного таким способом тіла, при яких одна з його головних центральних осей інерції вертикальна, можуть існувати не тільки при нескінченно великому значенні кутової швидкості  $\omega$ , а й при деяких скінчених її значеннях. Справді, нехай, наприклад,  $z^* = \zeta_1$ . Тоді рівняння (3.1) можна звести до вигляду

$$\nu \sin \alpha_0 = (\sin \alpha_0 + k \sin \theta_0) \cos \alpha_0, \quad \text{mal} \nu \frac{\sin(\theta_0 - \alpha_0)}{\cos \alpha_0} = 0. \quad (3.2)$$

Ці рівняння мають наступний розв'язок:

$$\alpha_0 = \theta_0; \quad \omega^2 = \omega_*^2 = \frac{g}{(l + a) \cos \theta_0}. \quad (3.3)$$

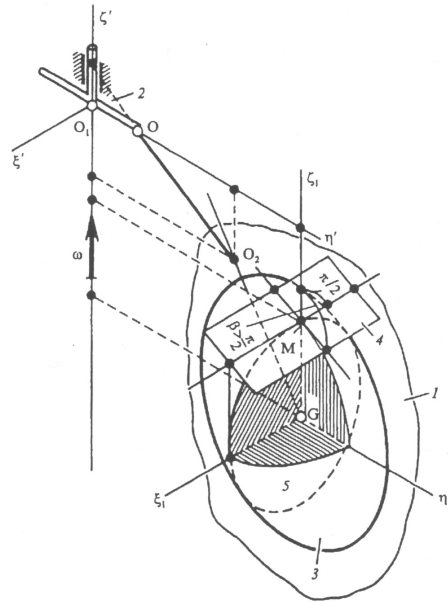
Аналогічні формули одержимо і для інших форм стаціонарного руху, коли вертикальною буде інша головна вісь інерції, наприклад,  $x^*$  чи  $y^*$ . Таким чином, існують три таких значення кутової швидкості, при яких одна з його головних центральних осей інерції вертикальна. При цьому, як випливає з першої рівності (3.3), центр мас

тіла постійно знаходиться на прямій, що служить продовженням лінії струни. І навпаки: якщо при стаціонарному русі центр мас тіла постійно знаходиться на одній прямій з нерухомою точкою  $O_1$  і точкою  $O_2$  кріплення тіла до струни (рис. 8.), то при такому стаціонарному русі одна з головних центральних осей інерції тіла вертикальна. Звідси і випливає один з найпростіших способів визначення головних центральних осей інерції тіла. Полягає він у тому, що розглядається стаціонарний рух тіла у широкому діапазоні кутової швидкості і фіксується якомога точніше те значення кутової швидкості, при якому центр мас тіла знаходиться на прямій, що служить продовженням лінії струни. При цьому вертикальна вісь, що проходить через центр мас тіла, і буде його головною віссю інерції.

Основні особливості стаціонарних рухів твердого тіла на струні зберігаються, якщо вільний кінець струни закріпити не безпосередньо на осі ротора мотора (як це має місце на рис. 8), а з допомогою штанги, що обертається навколо вертикальної осі (рис. 10). У такому випадку відцентровий момент інерції  $J_{\zeta_1 \xi_1}$ , вирахований відносно вертикальної осі  $\zeta_1$ , що проходить через центр мас тіла, та осі  $\xi_1$  перпендикулярної до проведеної через лінію струни вертикальної площини, виявляється рівним нулю. Це значить, що осі чи  $\zeta_1$  та  $\xi_1$  є головними осями еліпса, що утворюється при перетині центрального еліпсоїда інерції тіла вертикальною площиною, перпендикулярною до рухомої площини, в якій міститься струна (рис. 10). Дана властивість стаціонарного руху покладена в основу другого способу відшукання головних центральних осей інерції тіла довільної форми.

Процедура визначення цих осей така: прикріпимо тіло до струни у довільній точці та здійснимо його стаціонарний рух, змінюючи з деяким інтервалом значення кутової швидкості. При кожному такому значенні кутової швидкості одним з можливих технічних засобів фіксуємо на поверхні тіла слід центральної осі, що займає вертикальне положення у даному стаціонарному русі.

Здійснивши експеримент у достатньо широкому діапазоні кутової швидкості, одержимо на поверхні тіла деяку криву, що складається із згаданих слідів. Далі змінимо на поверхні тіла положення кріплення його до струни так, щоб у площині, яка утворюється старою і новою точками кріплення, а також центром мас тіла, не знаходилась жодна з точок кривої, одержаної у попередньому досліді. Повторюємо дослід з новою точкою кріплення. Точка перетину одержаних таким чином кривих і є слідом на поверхні тіла однієї з його головних центральних



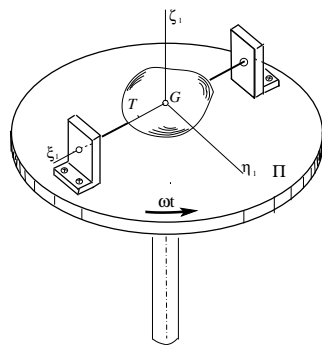
**Рис 10.** Стационарні рухи твердого тіла, підвішеного з допомогою струни та штанги, що обертається навколо вертикальної осі. 1 — досліджуване тіло; 2 — штанга; 3 — центральний еліпсоїд інерції тіла.

осей інерції.

Деякі інші, технічно простіші порівняно з рухом тіла на струні способи визначення головних осей інерції тіла, які ґрунтуються на використанні різноманітних форм усталених рухів, приводяться у [22].

Давно відомо, що якщо яким-небудь чином надати тілу довільної форми обертання з достатньо великою кутовою швидкістю, то це тіло буде прагнути зайняти певне положення, в якому найчастіше з віссю обертання співпадає одна з його головних центральних осей інерції. Класичними прикладами цього явища є стійкі обертання тіла у випадку Ейлера навколо великої і малої осей інерції, стійкі обертання снаряда довкола повздовжньої осі і т. д. Одним з найбільш простих випадків згаданого ефекту є рух твердого тіла, зображений на рис. 11.

Тверде тіло, яке може бути і неоднорідним, має свободу оберта-



**Рис 11.** Усталені рухи твердого тіла на платформі, яка обертається навколо вертикалі.

ння відносно горизонтальної осі, з якою співпадає одна з центральних осей інерції тіла. При цьому сама горизонтальна вісь обертається навколо вертикалі з деякою постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Вважається, що центр мас тіла  $G$  знаходиться на перетині осей обертання платформи і тіла, подібні підвіси тіла називають астатичними. Позначаючи компоненти тензора інерції тіла у незмінно зв'язаній з ним системі координат  $xyz$  через  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{zz}$ ,  $J_{xy}$ ,  $J_{xz}$ ,  $J_{yz}$ , рівняння руху тіла одержимо у вигляді

$$J_{xx} + \omega^2 [(J_{zz} - J_{yy}) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + J_{yz} (\cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1)] = 0. \quad (3.4)$$

Це рівняння має стаціонарний розв'язок

$$\alpha_1 = \alpha_1^0 = \text{const}, \quad (3.5)$$

який задовольняє умову

$$(J_{zz} - J_{yy}) \sin \alpha_1^0 \cos \alpha_1^0 + J_{yz} (\cos^2 \alpha_1^0 - \sin^2 \alpha_1^0) = 0. \quad (3.6)$$

Згідно з цією рівністю виявляється рівним нулеві відцентровий момент інерції  $J_{y_1 z_1}$  у новій системі координат  $x_1 y_1 z_1$ , яка повернута відносно системи  $xyz$  на кут  $-\alpha_1^0$ . Геометрично це означає, що осі  $y_1$  і  $z_1$  є головними осями еліпса, утвореного у результаті перетину центрального еліпсоїда інерції тіла площиною  $\eta_1 \zeta_1$ . Таким чином,

підвішене подібним способом довільне неоднорідне тіло при обертанні прагне зайняти таке рівноважне положення, при якому одна з головних осей еліпса, отриманого у результаті перетину еліпсоїда інерції площиною, перпендикулярною до осі обертання тіла  $\xi_1(x)$ , співпадала б з віссю  $\zeta(\zeta_1)$  обертання платформи П. При цьому стійким буде таке рівноважне положення, при якому з віссю обертання платформи співпадатиме мала вісь згаданого еліпса. Для характеристики взаємного розташування систем координат  $x_1y_1z_1$  та  $x_1y_1z_1$  скористаємося введеною у [21] величиною  $D = J_{xy}^2 + J_{xz}^2 + J_{yz}^2$ , яка певним чином характеризує «віддаленість» системи координат  $x_1y_1z_1$  від системи, утвореної головними осями інерції тіла. У результаті виявляється справедливим наступне співвідношення:

$$D_1 = J_{x_1y_1}^2 + J_{x_1z_1}^2 + J_{y_1z_1}^2 = J_{xy}^2 + J_{xz}^2 < J_{xy}^2 + J_{xz}^2 + J_{yz}^2 = D.$$

Звідси випливає, що нова система координат  $x_1y_1z_1$ , яка у положенні рівноваги співпадає з системою  $\xi_1\eta_1\zeta_1$ , знаходиться "ближче" до головних центральних осей інерції у порівнянні з первинною системою  $x_1y_1z_1$ .

Далі, змінюючи положення тіла на платформі так, щоб з віссю  $\xi_1$  співпадала знайдена за допомогою описаного вище способу центральна вісь тіла  $y_1$ , одержимо нове стійке рівноважне положення тіла, при якому з віссю  $\zeta(\zeta_1)$  обертання платформи буде співпадати мала вісь еліпса, що утворюється у перетині центрального еліпсоїда інерції тіла площиною  $\eta_1\zeta_1$ . Відповідно одержуємо нову зв'язану з тілом систему координат  $x_2y_2z_2$ , відносно якої виявляється рівним нулеві відцентровий момент інерції  $J_{x_2z_2}$ , і, як наслідок, виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} D_2 &= J_{x_2y_2}^2 + J_{x_2z_2}^2 + J_{y_2z_2}^2 = J_{x_2y_2}^2 + J_{y_2z_2}^2 = J_{x_1y_1}^2 + J_{y_1z_1}^2 = \\ &J_{x_1y_1}^2 < D_1 = J_{xy}^2 + J_{yz}^2 < J_{xy}^2 + J_{xz}^2 + J_{yz}^2 = D. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Звідси видно, що система координат  $x_2y_2z_2$  знаходиться ближче до головних центральних осей інерції тіла у порівнянні з попередньою системою координат  $x_1y_1z_1$ .

Будемо і далі продовжувати цей процес, кожного разу циклічно змінюючи вісь, довкола якої обертається тіло. У результаті для  $k$ -го етапу одержимо ланцюжок нерівностей  $D_k < D_{k-1} < \dots < D_1 < D$ , з якого випливає, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k = 0$ , тобто описувана процедура послідовних обертань тіла з визначенням на кожному етапі положення

нової осі обертання автоматично приводить до точного знаходження його головних центральних осей інерції.

*Числовий експеримент.* Розглядалося конкретне тверде тіло з віднесеними до його маси головними центральними моментами інерції, відповідно рівними  $\frac{A}{m} = 30 \text{ см}^2$ ;  $\frac{B}{m} = 45 \text{ см}^2$ ;  $\frac{C}{m} = 13 \text{ см}^2$ .

Кути  $\sigma$  і  $\tau$  обертання, що характеризують відхилення первісної осі обертання від головних центральних осей інерції, були вибрані наступними:  $\sigma = \tau = \frac{\pi}{5}$ . У результаті матриця  $\mathbf{A}_0$  напрямних косинусів системи координат  $xyz$  відносно тригранника, складеного з головних центральних осей інерції тіла, та центральний тензор інерції тіла  $\mathbf{J}_0$  відповідно будуть

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0.809017 & 0.345491 & -0.475528 \\ 0 & 0.809017 & 0.587785 \\ 0.587785 & -0.475528 & 0.654508 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 27.946304 & 8.944272 & 2.826669 \\ 8.944272 & 33.944272 & -12.310734 \\ 2.826669 & -12.310734 & 26.109423 \end{pmatrix}.$$

Разом з величиною  $D$ , що характеризує відхилення системи координат  $xyz$  відносно тригранника, складеного з головних центральних осей інерції тіла, будемо визначати відносне відхилення  $d$  згідно з формулою

$$d = \frac{J_{xy}^2 + J_{xz}^2 + J_{yz}^2}{J_{xx}^2 + J_{yy}^2 + J_{zz}^2}. \quad (3.8)$$

Одержимо  $D_0/m = 15.477216 \text{ см}^2$ ;  $d_0 = 0.347348$ .

Нижче представлена послідовність матриць  $A_i$  напрямних косинусів між системою координат  $x_i y_i z_i$ , що визначаються вказаним вище способом після відповідного етапу обертання твердого тіла на платформі, і тригранником  $x^* y^* z^*$ , складеним з головних центральних осей інерції тіла. Приведені також вирази для тензора інерції тіла  $\mathbf{J}_i$  на кожному з етапів і відповідні значення величин  $\mathbf{D}_i$  і  $\mathbf{d}_i$ , які характеризують "віддаленість" кожної з систем  $x_i y_i z_i$  від головних центральних осей інерції.

$$\alpha_1 = -0.631358,$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.809017 & 0.345491 & -0.475528 \\ -0.346935 & 0.933736 & 0.088157 \\ 0.474476 & 0.933656 & 0.875272 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 27.946304 & 5.551637 & 7.561043 \\ 5.551637 & 42.945841 & 0.0 \\ 7.561043 & 0.0 & 17.107854 \end{pmatrix}$$

$$D_1/m = 9.380301 \text{ см}^2; \quad d_1 = 0.173649,$$

$$\alpha_2 = -0.474465,$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.036421 & 0.350115 & -0.023121 \\ -0.346935 & 0.933736 & 0.088158 \\ 0.052454 & -0.074531 & 0.995838 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 31.829626 & 4.938387 & 0.0 \\ 4.938387 & 42.945841 & -2.536336 \\ 0.0 & -2.536336 & 13.224532 \end{pmatrix}$$

$$D_2/m = 5.551637 \text{ см}^2; \quad d_2 = 0.100816,$$

.....

$$\alpha_8 = -0.000001,$$

$$\mathbf{A}_8 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{J}_8 = \begin{pmatrix} 30.0 & 0.0 & 0.000000 \\ 0.000000 & 45.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 13.0 \end{pmatrix},$$

$$D_8/m = 0.000000 \text{ см}^2; \quad d_8 = 0.000000.$$

Неважко помітити, що із зростанням номера етапу матриця направляючих косинусів зв'язаної з тілом системи координат  $x_i y_i z_i$  прагне до одиначної матриці, одночасно відповідна матриця (тензор) інерції тіла поступово приводиться до головних осей. Це означає, що осі  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  прагнуть до співпадання з головними центральними осями інерції тіла. Практично співпадання відбувається вже на 6-му етапі. При цьому показником точності співпадання осей  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  з головними осями інерції на  $n$ -ому етапі може служити вимірювана на наступному етапі величина кута повороту  $\alpha_{n+1}$ . Так, на 6-му етапі ця точність складає величину порядку менше половини дугової мінуги.

Аналогічну процедуру визначення головних осей інерції можна застосувати за допомогою пристрою, який зображений на рис. 12 і являє собою найпростіший підвіс Кардана, вісь зовнішнього кільця якого знаходиться у підшипниках основи. Роль внутрішнього кільця відіграє саме досліджуване тверде тіло, розташоване таким чином,



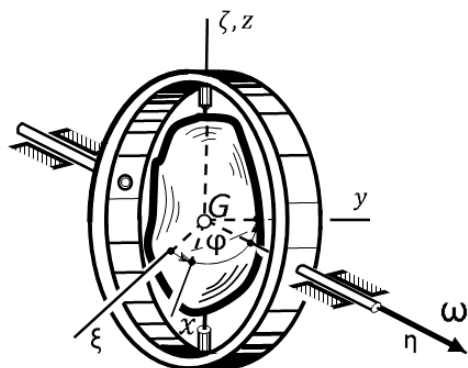
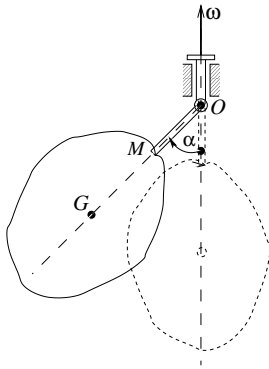


Рис 12. Усталені рухи твердого тіла у найпростішому кардановому підвісі.

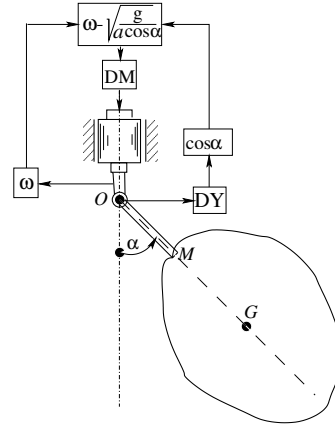
що його центр мас  $G$  знаходиться строго у центрі кільця  $K$ . Якщо задати кільцю  $K$  разом з розташованим у ньому тілом обертання з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ , то після перехідного процесу тіло прийде у стійке положення динамічної рівноваги. У цьому положенні з віссю  $\eta$  обертання кільця буде співпадати мала піввісь еліпса, який утворюється внаслідок перетину еліпсоїду інерції площиною, перпендикулярною до осі обертання тіла. Одержуємо нову незмінно зв'язану з тілом координатну систему  $x_1 y_1 z_1$ , яка у рівноважному положенні співпадає з системою  $\xi \eta \zeta$  (рис. 12) і знаходиться «ближче» до головних центральних осей інерції тіла у порівнянні з попередньою системою координат  $x y z$ . Якщо поміняти положення тіла у кільці так, щоб віссю обертання тіла відносно кільця стала одна з щойно знайдених осей  $x_1$  чи  $y_1$ , то після нового процесу обертання одержимо нове положення динамічної рівноваги, яке визначає нову координатну систему  $x_2 y_2 z_2$ . Ця нова система буде розташована у згаданому значенні ще «ближче» до головних центральних осей інерції тіла у порівнянні з попередньою системою  $x_1 y_1 z_1$ . Як показали розрахунки, продовжуючи далі цей процес, кожного разу циклічно змінюючи вісь обертання тіла, після шести послідовних обертань одержимо систему координат, осі якої практично співпадають з головними центральними осями інерції тіла.

Цікавий варіант пристрою для знаходження положення у твердо-

му тілі його головних центральних осей інерції виникає при застосуванні для цієї мети підвісу тіла за допомогою плоского маятника, що обертається навколо вертикальної осі (рис. 13). Важке неоднорідне тіло довільної форми жорстко прикріплене у точці  $M$  до невагомго жорсткого стрижня. На іншому кінці стрижня є шарнір, горизонтальна вісь якого обертається навколо вертикальної осі. При постійному значенні кутової швидкості обертання  $\omega$  має місце положення відносної рівноваги. У цьому положенні величина кутової швидкості і значення кута відхилення стрижня  $\alpha$  зв'язані співвідношенням



**Рис 13.** Стационарний рух твердого тіла довільної форми, підвішеного як плоский маятник, що обертається навколо вертикалі.



**Рис 14.** Пристрій для автоматичного приходу підвішеного на стрижні тіла у положення динамічної рівноваги. DY — датчик кута відхилення; DM — датчик моментів.

$$\omega^2 = \frac{mga \sin \alpha}{ma^2 \sin \alpha \cos \alpha + J_{x'z'}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}, \quad (3.9)$$

де  $J_{x'z'}$  — відцентровий момент інерції у супровідній системі координат  $x'y'z'$ . Має місце співвідношення

$$J_{x'z'} = (J_{xx} - J_{zz}) \sin \alpha \cos \alpha + J_{zz}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (3.10)$$

Величини кута  $\alpha$  відхилення стрижня від вертикалі, виміряні експериментально, можуть бути використані у запропонованому в [21]

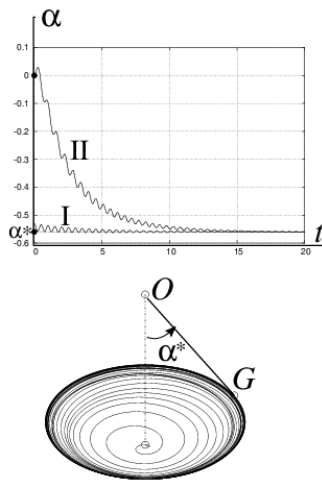
способі визначення головних осей, який заснований на побудові за даними експерименту деякого видозміненого вікового рівняння. Вирішення цього рівняння дозволяє визначити не лише напрями головних центральних осей інерції тіла, але також різниці між будь-якими двома його головними центральними моментами інерції. Важливим є те положення відносної рівноваги, при якому з вертикаллю збігається одна з головних осей еліпса, утвореного у результаті перетину центрального еліпсоїда інерції тіла вертикальною площиною, що обертається. Таке положення відносної рівноваги є основою для застосування методу послідовних наближень, кінцевим результатом якого є визначення із заданою точністю всіх трьох головних центральних осей інерції неоднорідного тіла. Особливістю даного положення відносної рівноваги є те, що кутова швидкість обертання збігається з кутовою швидкістю уявного математичного маятника з масою, рівною масі тіла, і довжиною, рівною відстані між центром шарніра і центром мас тіла. Це дає можливість виявити це положення рівноваги шляхом синхронізації обертання досліджуваного неоднорідного маятника з обертанням згаданого «уявного» математичного маятника. При цьому в процесі експерименту необхідно неперервно вимірювати величину

$$\Omega = k \left( \omega - \sqrt{\frac{g}{a \cos \alpha}} \right). \quad (3.11)$$

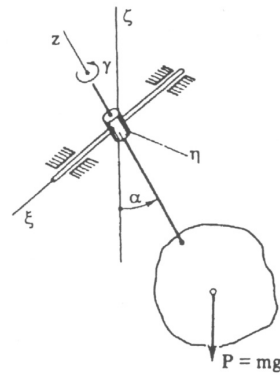
Принципова схема такого пристрою представлена на рис. 14.

На рис. 15 зображено перехідний процес для тіла з конкретними параметрами. Після закінчення перехідного процесу тіло знаходиться у шуканому положенні відносної рівноваги, в якому фіксуємо нову зв'язану з тілом координатну систему, яка знаходиться «ближче» до головних центральних осей інерції порівняно з вихідною системою. Далі, повторюємо експеримент, розміщуючи точку кріплення тіла до стрижня на одній з центральних осей, знайдених у попередньому експерименті, і тим самим ще більше наближаючись до головних осей, і визначаючи з заданою точністю положення у тілі його головних центральних осей.

Серед об'єктів космічної техніки, для яких виникає потреба визначити положення головних центральних осей інерції, зустрічаються такі, що з тих чи інших причин не допускають обертання (особливо з великими кутовими швидкостями). Для таких об'єктів описана вище процедура послідовних наближень при експериментальному визначенні головних осей інерції може бути непридатною з цієї причини.



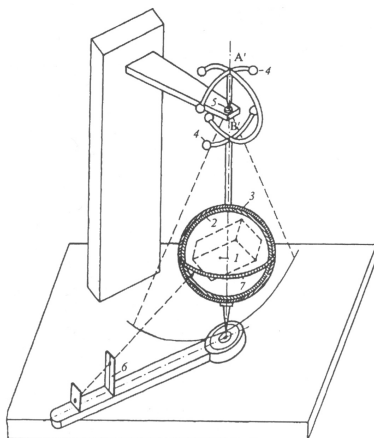
**Рис 15.** Перехідний процес при встановленні динамічної рівноваги тіла. I — крива затухань коливань при малому початковому відхиленні маятника; II — крива цих затухань при великому початковому відхиленні.



**Рис 16.** Коливний рух тіла з двома степенями свободи.

Проте виявилося, що ця процедура може бути здійснена і при використанні коливних усталених рухів тіла. У [22] вивчено рух своєрідного маятника (рис. 16), вісь коливань якого горизонтальна і закріплена на нерухомій основі з допомогою циліндричного шарніра. Тіло маятника може вільно обертатися навколо осі  $z$ , що сполучає центр мас маятника з віссю коливань. У випадку, коли вільна вісь обертань не є головною центральною віссю, маятник виконує коливання навколо горизонтальної осі  $\xi$ , близькі до коливань звичайного маятника. Крім того, відбуваються його незатухаючі коливання навколо осі вільного обертання  $z$ . При цьому в площині основних коливань знаходиться середнє положення однієї з головних осей еліпса, що утворюється у результаті перетину площиною  $xy$  еліпсоїда інерції, побудованого у точці перетину осей  $\xi$  та  $z$ . У результаті можна наближено визначити положення у тілі маятника згаданої головної осі еліпса перетину.

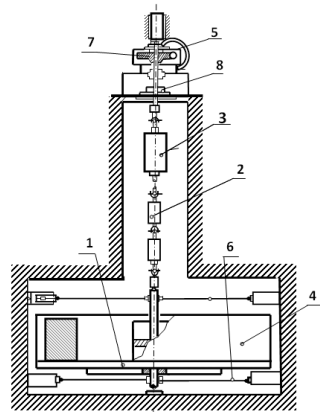
У результаті можна перейти від довільної системи координат  $xuz$  до системи  $x_1y_1z_1$ , вісь  $z_1$  якої співпадає з віссю  $z$ , а за вісь  $x_1$  може обиратися згадана головна вісь еліпса перетину. Нова система координат  $x_1y_1z_1$  знаходиться «ближче» до головних осей інерції тіла в порівнянні з системою  $xuz$ . Це дає можливість застосувати метод послідовних наближень і у цьому випадку.



**Рис 17.** Принципова схема установки для визначення головних осей інерції тіла: 1 — досліджуване тіло; 2,3 — зовнішня і внутрішня сфери; 4 — тягарці для статичного балансування підвісу тіла; 5 — агатова опора; 6 — оптичний візир; 7 — шкала для фіксації положення тіла відносно площини коливань.

Подальші дослідження показали, що тверде тіло з нерухомою точкою, яка не знаходиться в жодній з його головних центральних площин інерції, може здійснювати рухи, досить близькі до плоско-паралельних коливань. При цьому, як і в випадку плоского маятника з вільною віссю обертань, у площину основних коливань потрапляє середнє положення однієї з головних осей еліпса, який утворюється при перетині центрального еліпсоїда інерції тіла площиною, горизонтальною у рівно вісному положенні. Це дозволяє і для тіла з однією нерухомою точкою здійснити процедуру послідовного наближення при визначенні головних осей інерції.

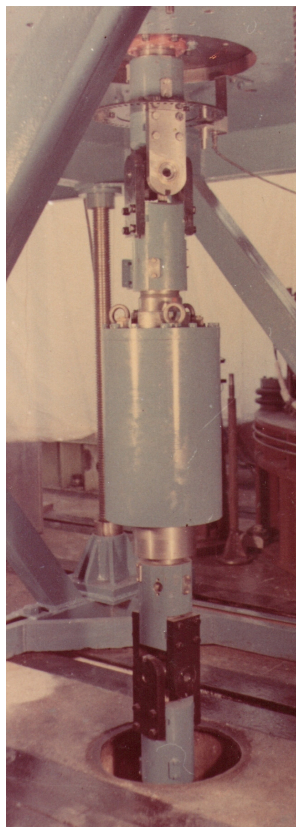
Описана процедура була практично здійснена на макетній установці, спеціально сконструйованій для цієї мети (рис. 17). За дослі-



**Рис 18.** Схема відцентрового стелу «Ротор-Ю» на струнному підвісі: 1 — ротор; 2 — струнний підвіс; 3 — вузол вертикальної амортизації; 4 — аеродинамічний обтічник; 5 — мотор, що надає стелу обертового руху; 6 — система горизонтальних демпфуючих розтяжок; 7 — черв'ячний редуктор.

джуване тіло 1 був вибраний паралелепіпед з наперед відомими напрямками головних центральних осей інерції, які співпадають з осями симетрії паралелепіпеда. Спочатку тіло розміщувалося у сферах 2 і 3 так, що жодна з його осей симетрії не співпадала з віссю, яка сполучає центр мас тіла з нерухомою точкою 5. Тілу разом з сферами надавали коливного руху і за допомогою оптичної системи 6 фіксувалася поділка шкали 7, яка відповідала шуканій центральній осі інерції тіла. Потім ця вісь суміщалася з лінією, що сполучає центр мас тіла з нерухомою точкою, і знову тілу надавали коливного руху, в результаті якого фіксувалася нова вісь. У процесі експерименту можна було спостерігати, що осі, які фіксувалися на кожному етапі, поступово наближались до осей симетрії тіла і після шостого етапу практично співпадали з ними. При цьому у численних експериментах було помічено, що з найбільшою точністю відбувається визначення положення тієї з головних осей інерції тіла, відносно якої момент інерції найменший.

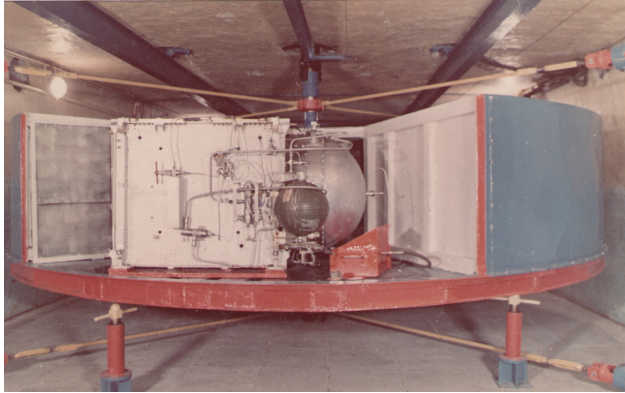
Слід відзначити, що розглянуті методи дають змогу принципово вирішувати питання про динамічне балансування твердого тіла або про знаходження його головних осей інерції. Питання ж про точність



**Рис 19.** Фрагмент струнного підвісу з вузлом вертикальної амортизації.

запропонованих методів динамічного балансування, що ґрунтуються на використанні властивостей усталених рухів тіла, залишається відкритим. Для його вирішення слід передусім враховувати збурюючі фактори, що неминуче виникають при технічній реалізації того чи іншого методу.

Одним із результатів творчої співдружності Інституту математики НАНУ і КБ «Південне» в області ракетної і космічної техніки було створення великого відцентрового стану-центрифуги, призначеного для випробування різних приладів і пристроїв в умовах лінійних пе-



**Рис 20.** Загальний вигляд випробувального поля ротора з випробовуваним об'єктом.

ревантажень. При створенні цієї центрифуги знову був використаний ефект самобалансування твердих тіл на струнному підвісі. Сконструйований в КБ «Південне» відцентровий стенд «Ротор-Ю» являє собою осесиметричну платформу (власне центрифугу) діаметром 5,5 м, що підвішена до осі ротора вертикально розташованого електродвигуна (мал. 18). При цьому «струнний» підвіс являє собою систему кількох жорстких стрижнів, з'єднаних між собою за допомогою шарнірів Гука. Такими ж шарнірами підвіс з'єднаний з центрифугою, а також з віссю ротора електродвигуна, кутова швидкість якого регулюється в широкому діапазоні. При цьому максимально допустимою вагою досліджуваного об'єкта була вага в 1 тс, а максимально досяжною перегрузкою — перегрузка в 25 од на радіусі в 2,75 м. Теоретичне обґрунтування створення центрифуги виконували співробітники Інституту математики НАНУ М. Є. Темченко і В. О. Стороженко, а також співробітники Інституту механіки НАНУ С. В. Малашенко і П. Г. Шишкін. Наукове керівництво роботами здійснювалося академіком О. Ю. Ішлінським. Паралельно на машинобудівному заводі «Південний» велись розробки аналогічної центрифуги на «струнному» підвісі балочного типу з суттєво різними моментами інерції. Роботи проводились під керівництвом талановитого конструктора кандидата технічних наук О. Ф. Грабовського. На жаль, йому не вдалося завершити роботи через трагічну загибель.



Основні результати досліджень, що стосувалися ефекту самобалансування і створення відцентрового ственду зокрема, знайшли відображення в книзі [21].

На рис. 19 і 20 показані відповідно фрагмент струнного підвісу з вузлом вертикальної амортизації і загальний вигляд випробувального поля ротора з випробовуваним об'єктом.

1. *Ишлинский А. Ю.* Инерциальное управление баллистическими ракетами. Некоторые теоретические вопросы. — М.: Наука, 1968. — 142 с.
2. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнениях задачи определения местонахождения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений // Прикл. математика и механика. — 1957. — **21**, вып. 6. — С. 725–739.
3. *Чертюк Б. Е.* Ракеты и люди. — М.: Машиностроение, 1999. — 416 с.
4. *Бойчук О. Ф.* К вопросу автономного определения координат // Прикл. механика, 1966. — **2**, № 4, — С. 114–121.
5. *Бойчук О. Ф.* Эквивалентные конечные повороты и вопрос ошибок автономного определения координат // Прикл. механика, 1974. — **10**, № 2. — С. 94–100.
6. *Бойчук О. Ф.* Общая схема расчета некорректируемых инерциальных систем // Прикл. механика, 1971. — **7**, № 9. — С. 79–86.
7. *Калинович В. М.* Про видозміни інерціальної системи навігації гірогоризонткомпас — гіроскоп напрямку — лічильно-розв'язувальний пристрій // ДАН УРСР, 1962. — Сер. А, № 5. — С. 591–594.
8. *Калинович В. М.* Про вплив неортогональності акселерометрів на роботу інерціальної системи навігації // ДАН УРСР, 1968. — Сер. А, № 9. — С. 852–855.
9. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях местоположения движущегося объекта // Прикл. математика и механика. — 1964. — **28**, вып. 6. — С. 1135–1137.
10. *Стороженко В. А., Темченко М. Е.* О применении теории конечных вращений к задаче автономного определения координат метав движущегося объекта // Изв. АН СССР. МТТ. — 1971. — № 3. — С. 3–10.
11. *Стороженко В. А., Темченко М. Е.* К задаче автономного определения местоположения объекта в околополярных областях // Изв. АН СССР. МТТ. — 1971. — № 5. — С. 16–22.

12. Темченко М. Е. К задаче автономного определения координат местоположения объекта посредством использования плоской декартовой системы координат, стереографически отображенной на сферу, при чете несферичности Земли // Изв. АН СССР. МТТ. — 1974. — № 3. — С. 19–28.
13. Ишлинский А. Ю. Геометрическое рассмотрение устойчивости решения основной задачи инерциальной навигации // Инженерный журнал. Механика твёрдого тела. — 1968. — № 3. — С. 12–16.
14. Бойчук О. Ф., Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А. Построение функции Ляпунова для совокупности уравнений основной задачи инерциальной навигации // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1975. — № 5. — С. 13–18.
15. Стороженко В. А. О демпфировании суточных колебаний в системах инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. — 1973. — № 4. — С. 87–95.
16. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 482 с.
17. Стороженко В. А. Применение энергетического метода к исследованию устойчивости некоторых колебательных систем // Инженерный журнал. МТТ. — 1966. — № 3. — С. 87–95.
18. Онищенко С. М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. — К.: Наукова думка, 1983. — 208 с.
19. Корневский Д. Г., Карпачев Ю. А. Некоторые задачи инерциального управления. — К.: Наукова думка, 1977. — 152 с.
20. Гернет М. М., Ратобильский В. Ф. Определение моментов инерции. — М.: Машиностроение, 1969. — 247 с.
21. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. Вращение твёрдого тела на струне и смежные задачи. — М.: Наука, 1991. — 330 с.
22. Стороженко В. А. Стационарные движения в задаче определения главных осей инерции неоднородных твердых тел. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 228 с.

*І.О. Луковський, В.О. Стороженко*