Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 186–209

УДК 517.9

***О. В. Магда***

(*Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, Київ*)

**olena.magda@yahoo.com**

# Тривимірні алгебри Лі одного класу хвильових рівнянь

*Присвячено 70-річчю професора Юрія Борисовича Зелінського*

Повністю розв'язано задачу класифікації квазілініних рівнянь гіперболічного типу з двома незалежними змінними, які інваріантні відносно одновимірних, двовимірних та тривимірних розкладних розв'язних алгебр Лі.

We have completely solved the problem of description of quasi-linear hyperbolic-type differential equations in two independent variables that are invariant under one-dimensional, two-dimensional, three-dimensional split solvable Lie algebras.

**1. Вступ.** Диференціальні рівняння з частинними похідними гіперболічного типу займають важливе місце серед фундаментальних рівнянь математичної фізики. До них, зокрема, приводять задачі (наближеного) опису процесів коливань різноманітної природи в термінах диференціальних рівнянь. При цьому, як правило, обмежуються першим наближенням, одержуючи лінійні рівняння.

Ця ситуація суттєво змінюється, якщо відповідні нелінійні диференціальні рівняння мають нетривіальні симетрійні властивості. Дійсно, за цієї умови для їх аналізу можна застосувати потужні методи теорії груп та алгебр Лі (див., наприклад, [1–4]). У зв'язку із цим актуальною є задача виокремлення із заданого класу нелінійних рівнянь тих, які допускають нетривіальні групи симетрії. Відзначимо, що задача класифікації рівнянь за їх групами симетрії є центральною проблемою класичного групового аналізу диференціальних рівнянь [1]. Відповідна процедура називається груповою класифікацією диференціальних рівнянь.

Дана стаття присвячена груповій класифікації квазілінійних диференціальних рівнянь гіперболічного типу

$$u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u, u_x). \tag{1}$$

Тут і далі, $u = u(t, x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ і т.п., $F$ — довільна гладка функція.

Проблему групової класифікації лінійних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними вивчав ще С. Лі. Він, зокрема, довів теорему, яка стверджує, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними допускає не більш ніж трипараметричну групу нетривіальних перетворень [5]. Повний розв'язок задачі групової класифікації лінійних рівнянь вигляду (1) було одержано Л.В. Овсянніковим [6] (див., також, [1]). Також відзначимо роботу [7], де було проведено групову класифікацію лінійних хвильових рівнянь

$$u_{tt} = f^2(x) u_{xx}.$$

Наскільки нам відомо, задача групової класифікації нелінійних рівнянь загального вигляду (1) не розглядалася. Зауважимо, що частинний випадок цього рівняння, який одержується за умови $F = F(u)$, досліджував С. Лі [8]. Зокрема, він повністю дослідив симетрію рівняння Бонне $u_{tx} = \exp u$.

Також слід відзначити роботи, де одержано (повний або частковий) розв'язок задачі групової класифікації таких одновимірних нелінійних хвильових рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u), && [3,\ 9],\\
&u_{tt} = -\lambda u_{xx} + F(u, u_x), && [10],\\
&u_{tt} = [f(u)u_x]_x, && [11,\ 12],\\
&u_{tt} = f(u_x)u_{xx}, && [13],\\
&u_{tt} = [f(x, u)u_x]_x, && [14],\\
&u_{tt} = [f(u)u_x + g(x, u)]_x, && [15],\\
&u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x)_x, && [16].
\end{aligned}
$$

Тут ми розглядаємо задачу групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1) відносно розкладних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії за умови

$$F_{u_x u_x} \not\equiv 0. \tag{2}$$

Метод класифікації є модифікацією підходу до розв'язування задач групової класифікації диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними, запропонованого нами в [17]. В рамках цього підходу здійснено повну групову класифікацію рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом

$$u_t = u_{xx} + F(t, x, u, u_x),$$

тобто явно вказані всі можливі функції $F$, для яких ці рівняння допускають нетривіальну групу симетрії.

Загальний опис підходу та ряд допоміжних тверджень про загальну структуру груп симетрії рівнянь вигляду (1), (2) подано в другій частині роботи. Третя частина присвячена класифікації нелінійних рівнянь (1), (2), які допускають тривимірні розкладні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії.

**2. Метод класифікації та деякі попередні результати.** Основною перевагою запропонованого у [8] підходу до групової класифікації диференціальних рівнянь над традиційним методом перетворень еквівалентності є те, що він дозволяє ефективно класифікувати рівняння, які містять довільні функції вже двох, трьох і більше змінних. Тобто клас рівнянь, групові властивості яких можуть бути систематично вивчені, суттєво розширюється.

Стосовно класу рівнянь (1) алгоритм методу групової класифікації, розробленого в [8], передбачає виконання наступних кроків.

I. Із використанням інфінітезимального методу Лі знаходимо систему визначальних рівнянь для коефіцієнтів інфінітезимального оператора, що генерує групу симетрії рівняння (1). Визначальні рівняння, які явно залежать від функції $F$ та її похідних, називаються класифікуючими. Інтегруючи ті з визначальних рівнянь, які не залежать від $F$, одержуємо найбільш загальний вигляд інфінітезимального оператора, що допускається рівняннями вигляду (1). Окрім цього, із використанням інфінітезимального методу (або прямими обчисленнями) будуємо групу еквівалентності $\mathcal{E}$ досліджуваного рівняння.

II. Другий крок передбачає побудову реалізацій алгебр Лі $A_n$ розмірності $n \leq 3$ в класі отриманих на першому кроці інфінітезимальних операторів з точністю до еквівалентності, яка визначається перетвореннями із групи $\mathcal{E}$. Підставляючи одержані оператори в класифікуючі рівняння, виділяємо ті реалізації, які є алгебрами симетрії диференціального рівняння (1). Поступове розширення розмірності алгебр інваріантності призводить до зменшення ступеню довільності в невідомій функції $F$.

III. Третій крок передбачає завершення групової класифікації досліджуваного рівняння. Для цього можна використовувати як традиційні методи (якщо "довільні елементи" в досліджуваному рівнянні є функціями одного аргументу), так і подальше розширення вже відомих реалізацій алгебр Лі до реалізацій алгебр симетрії рівняння (1) наступної розмірності.

Результатом виконання цього алгоритму є перелік рівнянь, які належать до класу (1) разом з їх алгебрами симетрії. Задача групової класифікації вважається повністю розв'язаною, якщо доведено, що

1) побудовані алгебри Лі є максимальними алгебрами симетрії відповідних рівнянь,
2) в рамках сформульованої задачі отриманий перелік містить лише нееквівалентні рівняння (тобто, такі рівняння, які перетвореннями із групи $\mathcal{E}$ не зводяться одне в інше).

Перший та, частково, другий кроки алгоритму в рамках задачі групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1), (2) було здійснено в [19]. Зупинимося на отриманих там результатах.

Згідно з методом Лі, інфінітезімальний оператор групи симетрії рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$X = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u,$$

де $\tau$, $\xi$, $\eta$ — деякі гладкі функції, визначені у відкритій області $\Omega$ простору $V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ незалежних $t$, $x$ та залежної $u = u(t,x)$ змінних. З використанням інфінітезимального методу Лі доведено, що найбільш загальний інфінітезимальний оператор групи симетрії (1), (2) має вигляд

$$X = (\lambda t + \lambda_1)\partial_t + (\lambda x + \lambda_2)\partial_x + [h(x)u + r(t,x)]\partial_u. \tag{3}$$

При цьому, дійсні сталі $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ та функції $h = h(x)$, $r = r(t,x)$, $F = F(t,x,u,u_x)$ задовольняють класифікуюче рівняння

$$\begin{aligned} r_{tt} - r_{xx} - \frac{d^2h}{dx^2}u - 2\frac{dh}{dx}u_x + (h - 2\lambda)\,F- \\ -(\lambda t + \lambda_1)\,F_t - (\lambda x - \lambda_2)\,F_x - (hu + r)\,F_u \\ -\left(r_x + \frac{dh}{dx}u + (h-\lambda)u_x\right)\,F_{u_x} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (1), (2) складають невироджені перетворення постору $V$

$$\bar{t} = \alpha(t,x,u), \quad \overline{x} = \beta(t,x,u), \quad v = U(t,x,u), \quad \frac{D(\bar{t},\overline{x},v)}{D(t,x,u)} \neq 0,$$

які залишають клас рівнянь (1), (2) інваріантним. Інакше кажучи, якщо в (1), (2) перейти до нових змінних $\bar{t}$, $\overline{x}$, $v$, то одержується рівняння того ж самого вигляду:

$$v_{\overline{tt}} = v_{\overline{xx}} + \tilde{F}(\bar{t},\,\overline{x},\,v,\,v_{\overline{x}}), \qquad \tilde{F}_{v_{\overline{x}}v_{\overline{x}}} \neq 0.$$

В результаті безпосередніх обчислень ми довели, що групу $\mathcal{E}$ складають перетворення

$$\bar{t} = \gamma t + \gamma_1, \quad \overline{x} = \epsilon\gamma x + \gamma_2, \quad v = \rho(x)u + \theta(t,x), \tag{5}$$

де $\{\gamma,\gamma_1,\gamma_2\} \subset \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$, $\rho \neq 0$.

При виконанні другого кроку алгоритму суттєво використовується таке твердження [19].

**Теорема 1.** *Існують перетворення* (5)*, які зводять оператор* (3) *до одного із таких семи операторів:*

$$
\begin{gathered}
Q_1 = k(t\partial_t + x\partial_x)\ (k \neq 0), \qquad Q_2 = \partial_t + k\partial_x\ (k \neq 0),\\
Q_3 = \partial_x, \qquad Q_4 = \partial_t, \qquad Q_5 = \partial_t + f(x)u\partial_u\ (f \neq 0),\\
Q_6 = f(x)u\partial_u\ (f \neq 0), \qquad Q_7 = f(t,x)\partial_u\ (f \neq 0).
\end{gathered}
$$

Із теореми 1 випливає, що існують сім нееквівалентних нелінійних рівнянь вигляду (1), (2), які допускають алгебри симетрії розмірності не нижчої за 1. Нижче подано перелік одновимірних алгебр Лі симетрії та відповідні їм значення функцій $F$ в інваріантних рівняннях.

$$
\begin{aligned}
&A_1^1 = \langle t\partial_t + x\partial_x\rangle: \quad F = t^{-2}G(\xi,u,\omega),\ \xi = tx^{-1},\ \omega = xu_x,\\
&A_1^2 = \langle \partial_t + k\partial_x\rangle,\ (k>0): \quad F = G(\eta,u,u_x),\ \eta = x - kt,\\
&A_1^3 = \langle \partial_x\rangle: \quad F = G(t,u,u_x),\\
&A_1^4 = \langle \partial_t\rangle: \quad F = G(x,u,u_x),\\
&A_1^5 = \langle \partial_t + f(x)u\partial_u\rangle,\ (f \neq 0): \quad F = -tf''u + t^2(f')^2u-\\
&\qquad - 2tf'u_x + e^{tf}G(x,v,\omega),\ v = e^{-tf}u,\\
&\qquad \omega = u^{-1}u_x - f'f^{-1}\ln|u|,\\
&A_1^6 = \langle f(x)u\partial_u\rangle,\ (f \neq 0): \quad F = -f^{-1}f''u\ln|u|-\\
&\qquad - 2f^{-1}f'u_x\ln|u| + f^{-2}(f')^2u\ln^2|u| + uG(t,x,\omega),\\
&\qquad \omega = u^{-1}u_x - f'f^{-1}\ln|u|;,\\
&A_1^7 = \langle f(t,x)\partial_u\rangle,\ (f \neq 0): \quad F = f^{-1}(f_{tt} - f_{xx})u+\\
&\qquad\quad + G(t,x,\omega),\ \omega = u_x - f^{-1}f_xu.
\end{aligned}
$$

Тут $G$ довільна гладка функція, символом $()'$ позначається похідна за відповідною змінною.

Далі, як доведено в [19], справедливе таке твердження.

**Теорема 2.** *В класі операторів* (3) *не існують реалізації алгебр* $so(3)$ *та* $sl(2,\mathbb{R})$.

Із теореми 2 випливають два важливих наслідки.

**Наслідок 1.** *В класі операторів* (3) *не існують реалізації напівпростих дійсних алгебр Лі.*

**Наслідок 2.** *Не існують нелінійні рівняння вигляду* (1), (2)*, алгебри інваріантності яких ізоморфні напівпростим алгебрам Лі або містять їх як підалгебри.*

Підсумовуючи сказане вище, робимо висновок, що без втрати загальності можна обмежитися розглядом реалізацій розв'язних алгебр Лі. У відповідності із цим у [19] було проведено класифікацію нелінійних рівнянь (1), (2), алгебри інваріантності яких є двохвимірними розв'язними алгебрами Лі.

Добре відомо (див., наприклад, [20]), що з точністю до ізоморфізму існують дві дійсні розв'язні двохвимірні алгебри Лі: $A_{2.i} = \langle e_1, e_2\rangle$, $(i = 1, 2)$:

$$A_{2.1}: \quad [e_1,\ e_2] = 0;$$
$$A_{2.2}: \quad [e_1,\ e_2] = e_2.$$

Розгляд реалізацій цих алгебр в класі операторів (3) і перевірка для них умови (4) показали, що існують 16 нееквівалентних рівнянь досліджуваного класу, алгебри симетрії яких є реалізаціями алгебри $A_{2.1}$. Аналогічно, існують 15 рівнянь вигляду (1), (2), алгебри симетрії яких являються реалізаціями алгебри $A_{2.2}$. Нижче ми подаємо переліки базисних операторів реалізацій двохвимірних алгебр Лі та відповідні їм значення функцій $F$ в інваріантних рівняннях (1), (2).

**$A_{2.1}$-інваріантні рівняння**

$$A^1_{2.1} = \langle t\partial_t + x\partial_x,\ u\partial_u\rangle: \quad F = x^{-2}uG(\omega, v),$$
$$\omega = tx^{-1},\ v = u^{-1}xu_x;$$

$$A^2_{2.1} = \langle t\partial_t + x\partial_x,\ \sigma(\xi)\partial_u\rangle,\ (\sigma \neq 0,\ \xi = tx^{-1}):$$
$$F = x^{-2}[\sigma^{-1}((1-\xi^2)\sigma'' - 2\xi\sigma')u + G(\xi, \omega)],$$
$$\omega = \xi\sigma' u + \sigma x u_x;$$

$$A^3_{2.1} = \langle \partial_t + k\partial_x,\ u\partial_u\rangle,\ (k > 0): \quad F = uG(\eta, \omega),$$
$$\eta = x - kt,\ \omega = u^{-1}u_x;$$

$$A^4_{2.1} = \langle \partial_t + k\partial_x,\ \varphi(\eta)\partial_u\rangle,\ (k > 0,\ \eta = x - kt,\ \varphi \neq 0):$$
$$F = (k^2 - 1)\varphi''\varphi^{-1}u + G(\eta, \omega),\ \omega = \varphi u_x - \varphi' u;$$

$$A^5_{2.1} = \langle \partial_t + k\partial_x,\ \partial_x + mu\partial_u\rangle,\ (k > 0,\ m \neq 0):$$
$$F = e^{m\eta}G(\omega, v),\ \eta = x - kt,\ \omega = ue^{-m\eta},\ v = u^{-1}u_x;$$

$$A^6_{2.1} = \langle \partial_t,\ \partial_x\rangle: \quad F = G(u, u_x);$$

$$A^7_{2.1} = \langle \partial_x,\ \partial_t + ku\partial_u\rangle,\ (k > 0):$$
$$F = e^{kt}G(\omega, v),\ \omega = e^{-kt}u,\ v = u^{-1}u_x;$$

$$A^8_{2.1} = \langle \partial_x,\ u\partial_u\rangle: \quad F = uG(t,\omega),\ \omega = u^{-1}u_x;$$

$$A^9_{2.1} = \langle \partial_x,\ \varphi(t)\partial_u\rangle,\ (\varphi \neq 0): \quad F = \varphi^{-1}\varphi'' u + G(t,u_x);$$

$$A^{10}_{2.1} = \langle \partial_t,\ \partial_u\rangle: \quad F = G(x,u_x);$$

$$\begin{aligned}A^{11}_{2.1} = \langle \partial_t,\ f(x)u\partial_u\rangle,\ (f \neq 0):&\\ F = -f^{-1}f'' u\ln|u| - 2f^{-1}f'u_x\ln|u| +&\\ + f^{-2}(f')^2u\ln^2|u| + uG(x,\omega);&\\ \omega = u^{-1}u_x - f'f^{-1}\ln|u|;&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^{12}_{2.1} = \langle \partial_t + f(x)u\partial_u,\ g(x)u\partial_u\rangle,\ (\delta = f^{-1}f' - g^{-1}g' \neq 0):&\\ F = -g^{-1}g'' u\ln|u| - 2g^{-1}g'u_x\ln|u| +&\\ + g^{-2}(g')^2u\ln^2|u| - 2f\delta t u_x + 2f\delta g' g^{-1}tu\ln|u| +&\\ + f^2\delta^2t^2u + f(g^{-1}g'' - f^{-1}f'')tu + uG(x,\omega),&\\ \omega = u^{-1}u_x - g'g^{-1}\ln|u| - tf\delta;&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^{13}_{2.1} = \langle \partial_t + f(x)u\partial_u,\ e^{tf}\partial_u\rangle,\ (f \neq 0):&\\ F = [f^2 - tf'' + t^2(f')^2]u - 2tf'u_x + e^{tf}G(x,\omega),&\\ \omega = e^{-tf}(u_x - tf'u);&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^{14}_{2.1} = \langle f(x)u\partial_u,\ g(x)u\partial_u\rangle,\ (\delta = f'g - g'f \neq 0):&\\ F = -u^{-1}u_x^2 - \delta^{-1}\delta' u_x +&\\ + \delta^{-1}[f''g' - g''f']u\ln|u| + uG(t,x);&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^{15}_{2.1} = \langle \varphi(t)\partial_u,\ \psi(t)\partial_u\rangle,\ (\varphi'\psi - \varphi\psi' \neq 0):&\\ F = \varphi^{-1}\varphi'' u + G(t,x,u_x),\ \varphi''\psi - \varphi\psi'' = 0.&\end{aligned}$$

**$A_{2.2}$-інваріантні рівняння**

$$\begin{aligned}A^1_{2.2} = \langle t\partial_t + x\partial_x,\ xu\partial_u\rangle: \quad F = x^{-2}u\ln^2|u| -&\\ - 2x^{-1}u_x\ln|u| + t^{-2}uG(\xi,\omega),\ \xi = tx^{-1};&\\ \omega = xu^{-1}u_x - \ln|u|;&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^2_{2.2} = \langle t\partial_t + x\partial_x,\ t\varphi(\xi)\partial_u\rangle,\ (\varphi \neq 0,\ \xi = tx^{-1}):&\\ F = t^{-2}(1-\xi^2)\varphi^{-1}\xi(2\varphi' + \xi\varphi'')u + t^{-2}G(\xi,\omega),&\\ \omega = x\varphi u_x + \xi\varphi' u;&\end{aligned}$$

$$A^3_{2.2} = \langle \partial_t + k\partial_x,\ e^{k^{-1}x}u\partial_u\rangle,\ (k>0):$$
$$F = k^{-2}u\ln^2|u| - 2k^{-1}u_x\ln|u| - k^{-2}u\ln|u| +$$
$$+ uG(\eta,\omega),\ \eta = x - kt,\ \omega = u^{-1}u_x - k^{-1}\ln|u|;$$

$$A^4_{2.2} = \langle \partial_t + k\partial_x,\ e^t\varphi(\eta)\partial_u\rangle,\ (\eta = x-kt,\ k>0,\ \varphi\neq 0):$$
$$F = \big((k^2-1)\varphi''\varphi^{-1} - 2k\varphi'\varphi^{-1} + 1\big)\,u + G(\eta,\omega),$$
$$\omega = \varphi u_x - \varphi' u,\ \varphi' = d\varphi/d\eta;$$

$$A^5_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x,\ \partial_t + k\partial_x\rangle,\ (k>0):$$
$$F = \eta^{-2}G(u,\omega),\ \eta = x-kt,\ \ \omega = u_x\eta;$$

$$A^6_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + mu\partial_u,\ \partial_t + k\partial_x\rangle,\ (k>0,\ m\neq 0):$$
$$F = |\eta|^{-2-m}G(v,\omega),\ \eta = x-kt,$$
$$\omega = u|\eta|^m,\ v = u_x|\eta|^{m+1};$$

$$A^7_{2.2} = \langle \partial_x,\ e^x u\partial_u\rangle:\quad F = u\ln^2|u| - u\ln|u| - 2u_x\ln|u| +$$
$$+ uG(t,\omega),\ \omega = u^{-1}u_x - \ln|u|;$$

$$A^8_{2.2} = \langle \partial_x,\ e^x\varphi(t)\partial_u\rangle,\ (\varphi\neq 0):$$
$$F = (\varphi^{-1}\varphi'' - 1)u + G(t,\omega),\ \omega = u_x - u;$$

$$A^9_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x,\ \partial_x\rangle:\quad F = t^{-2}G(u, tu_x);$$

$$A^{10}_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + ku\partial_u,\ \partial_x\rangle,\ (k\neq 0):$$
$$F = |t|^{-2-k}G(v,\omega),\ v = |t|^k u,\ \omega = |t|^{k+1}u_x;$$

$$A^{11}_{2.2} = \langle \partial_t,\ e^t\partial_u\rangle:\quad F = u + G(x, u_x);$$

$$A^{12}_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x,\ \partial_t\rangle:\quad F = x^{-2}G(u,\omega),\ \omega = xu_x;$$

$$A^{13}_{2.2} = \langle \partial_t + f(x)u\partial_u,\ e^{(1+f)t}\partial_u\rangle,\ (f\neq 0):$$
$$F = -\big(tf'' - t^2(f')^2 - (1+f)^2\big)\,u - 2tf'u_x +$$
$$+ e^{tf}G(x,\omega),\ \omega = e^{-tf}\left(u_x - f'(t+f^{-1})u\right);$$

$$A^{14}_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x,\ \partial_t + kx^{-1}u\partial_u\rangle,\ (k>0);$$
$$F = -2ktx^{-3}u + k^2t^2x^{-4}u + 2ktx^{-2}u_x +$$
$$+ x^{-2}e^{ktx^{-1}}G(v,\omega), v = e^{-kx^{-1}t}u,$$
$$\omega = xu^{-1}u_x + \ln|u|;$$

$$A^{15}_{2.2} = \langle k(t\partial_t + x\partial_x),\ |x|^{k^{-1}}u\partial_u\rangle,\ (k \neq 0,1):$$
$$F = -k^{-2}(1-k)x^{-2}u\ln|u| - 2k^{-1}x^{-1}u_x\ln|u| +$$
$$+ k^{-2}x^{-2}u\ln^2|u| + x^{-2}uG(v,\omega),$$
$$v = tx^{-1},\ \omega = xu^{-1}u_x - k^{-1}\ln|u|;$$

$$A^{16}_{2.2} = \langle k(t\partial_t + x\partial_x),\ |t|^{k^{-1}}\varphi(\xi)\partial_u\rangle,\ (k \neq 0,1,\ \varphi \neq 0,\ \xi = tx^{-1}):$$
$$F = [k^{-1}(k^{-1}-1) + 2\xi(k^{-1}-\xi^2)\varphi^{-1}\varphi' +$$
$$+ \xi^2(1-\xi)^2\varphi^{-1}\varphi'']t^{-2}u + t^{-2}G(\xi,\omega),$$
$$\omega = x\varphi u_x + \xi\varphi' u.$$

Тут $G$ довільна гладка функція, символом $()'$ позначається похідна за відповідною змінною.

## 3. Класифікація рівнянь (2), інваріантних відносно тривимірних розкладних розв'язних алгебр Лі.

Нагадаємо, що серед рівнянь досліджуваного вигляду немає таких, алгебри інваріантності яких ізоморфні напівпростим алгебрам Лі або містять їх як підалгебри. Тому без втрати загальності розгляду, достатньо обмежитись розглядом розв'язних алгебр Лі.

Нехай $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$. З точністю до ізоморфізму розрізняють дев'ять тривимірних розв'язних дійсних алгебр Лі (нижче наведено значенння лише ненульових комутаційних співвідношень між базисними елементами цих алгебр):

$$A_{3.1} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 = 3A_1,$$
$$A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1, \quad [e_1,\ e_2] = e_2;$$
$$A_{3.3}: \quad [e_2,\ e_3] = e_1;$$
$$A_{3.4}: \quad [e_1,\ e_3] = e_1, \quad [e_2,\ e_3] = e_1 + e_2;$$
$$A_{3.5}: \quad [e_1,\ e_3] = e_1, \quad [e_2,\ e_3] = e_2;$$
$$A_{3.6}: \quad [e_1,\ e_3] = e_1, \quad [e_2,\ e_3] = -e_2;$$
$$A_{3.7}: \quad [e_1,\ e_3] = e_1, \quad [e_2,\ e_3] = qe_2,\ (0 < |q| < 1);$$

$$A_{3.8}: \quad [e_1,\ e_3] = -e_2, \quad [e_2,\ e_3] = e_1;$$
$$A_{3.9}: \quad [e_1,\ e_3] = qe_1 - e_2, \quad [e_2,\ e_3] = e_1 + qe_2,\ (q > 0).$$

Відзначимо, що алгебри $A_{3.1}$, $A_{3.2}$ розкладаються в пряму суму алгебр Лі нижчої розмірності, і у подальшому ми називаємо їх розкладними розв'язними алгебрами Лі. Решта тривимірних алгебр Лі є нерозкладними. Також зауважимо, що алгебра $A_{3.3}$ (відома у літературі як алгебра Вейля) є нільпотентною.

Наявність у розв'язної алгебри Лі композиційного ряду дозволяє використовувати вже відомі результати класифікації для двохвимірних алгебр Лі для побудови реалізацій тривимірних алгебр Лі. Тому для вивчення реалізацій алгебр $A_{3.1}$ та $A_{3.2}$ достатньо провести розширення відомих реалізацій відповідно алгебр $A_{2.1}$ та $A_{2.2}$, доповнивши їх ще одним базисним оператором вигляду (3). При цьому, для спрощення вигляду цього оператора можна використовувати лише ті з перетворень (5), які не змінюють вигляд базисних операторів відповідної реалізації двохвимірної алгебри Лі.

Розглянемо два характерних приклади розширення реалізацій алгебри $A_{2.1}$ до реалізацій алгебри $A_{3.1}$.

Нехай має місце реалізація $A^1_{2.1}$. Доповнивши її оператором $e_3$ вигляду (3) і перевіривши комутаційні співвідношення, бачимо, що для коефіцієнтів оператора $e_3$ виконуються співвідношення

$$\lambda_1 = \lambda_2 = r(t,x) = 0, \qquad h = p = \mathrm{const}.$$

Тобто, оператор $e_3 = \lambda e_1 + p e_2$ є лінійною комбінацією перших двох базисних операторів реалізації $A^1_{2.1}$. Звідси випливає, що реалізація $A^1_{2.1}$ не допускає розширення до реалізації алгебри $A_{3.1}$.

Нехай, тепер, має місце реалізація $A^2_{2.1}$. Доповнивши її оператором $e_3$ вигляду (3) і перевіривши комутаційні співвідношення, бачимо, що має місце така реалізація алгебри $A_{3.1}$:

$$\langle t\partial_t + x\partial_x, \sigma(\xi)\partial_u, \gamma(\xi)\partial_u\rangle,\ \xi = tx^{-1},$$

де $\gamma'\sigma - \gamma\sigma' \neq 0$. Але, як показує безпосередня перевірка, за цієї умови відповідне інваріантне рівняння є лінійним.

Нехай, нарешті, має місце реалізація $A^3_{2.1}$. Безпосередні обрахунки показують, що і у цьому випадкові існує єдине розширення до реалізації алгебри $A_{3.1}$

$$\langle \partial_t, \partial_x, u\partial_u\rangle,$$

а відповідне інваріантне рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + uG(\omega), \omega = u^{-1}u_x,$$

задовольняє сформульовану задачу за умови $G_{\omega\omega} \neq 0$.

Провівши аналогічний аналіз реалізацій $A^i_{2.1}$ ($i = 4, 5, \ldots, 13, 15$), ми отримали ще шість нееквівалентних реалізацій алгебри $A_{3.1}$, таких, що відповідні інваріантні рівняння задовольняють умову (2). Повний перелік значень функцій $F$ в $A_{3.1}$-інваріантних рівняннях наведено в таблиці 1, де використано такі позначення:

$$
\begin{aligned}
A^1_{3.1} &= \langle \partial_t, \partial_x, u\partial_u \rangle;\\
A^2_{3.1} &= \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u \rangle;\\
A^3_{3.1} &= \langle \partial_t + \beta\partial_x, e^{k\eta}\partial_u, \partial_x + ku\partial_u \rangle,\ \beta > 0,\quad k > 0,\quad \eta = x - \beta t;\\
A^4_{3.1} &= \langle \partial_x, \partial_t + ku\partial_u, e^{kt}\partial_u \rangle,\quad k > 0;\\
A^5_{3.1} &= \langle \partial_x, \varphi(t)\partial_u, \psi(t)\partial_u \rangle,\quad \sigma = \psi'\varphi - \psi\varphi' \neq 0,\ \sigma' = 0;\\
A^6_{3.1} &= \langle \partial_x, f(x)u\partial_u, \varphi(x)u\partial_u \rangle,\\
&\qquad \sigma = f'\varphi - f\varphi' \neq 0,\quad \rho = \varphi' f'' - \varphi'' f';\\
A^7_{3.1} &= \langle f(x)u\partial_u, \varphi(x)u\partial_u, \partial_t + \psi(x)u\partial_u \rangle,\ \sigma = f'\varphi - \varphi' f \neq 0,\\
&\qquad \rho = f''\varphi' - \varphi'' f',\ f'\psi - f\psi' \neq 0,\quad \varphi'\psi - \varphi\psi' \neq 0.
\end{aligned}
$$

**Таблиця 1.** $A_{3.1}$-інваріантні рівняння (1), (2)

| № | Функція $F$ | Реалізація $A_{3.1}$ |
|---|---|---|
| 1 | $uG(\omega),\quad \omega = u^{-1}u_x$ | $A^1_{3.1}$ |
| 2 | $G(u_x)$ | $A^2_{3.1}$ |
| 3 | $k^2(\beta^2 - 1)u + e^{k\eta}G(\omega)$,<br>$\eta = x - \beta t, \omega = e^{-k\eta}(u_x - ku)$ | $A^3_{3.1}$ |
| 4 | $k^2 u + e^{kt}G(\omega),\ \omega = e^{-kt}u_x$ | $A^4_{3.1}$ |
| 5 | $\varphi^{-1}\varphi'' u + G(t, u_x),\ \varphi = \varphi(t)$ | $A^5_{3.1}$ |
| 6 | $-u^{-1}u_x^2 - \sigma^{-1}\sigma' u_x + \sigma^{-1}\rho u \ln\|u\|$,<br>$\sigma = \sigma(x),\ \rho = \rho(x)$ | $A^6_{3.1}$ |
| 7 | $-u^{-1}u_x^2 - \sigma^{-1}\sigma' u_x + \sigma^{-1}\rho u \ln\|u\| +$<br>$+ t\sigma^{-1}[\sigma'\psi' - \psi\rho - \sigma\psi'']u,\quad \sigma = \sigma(x)$,<br>$\rho = \rho(x),\ \psi = \psi(x)$ | $A^7_{3.1}$ |

Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що для першого, п'ятого, шостого і сьомого рівнянь із таблиці 1 відповідні реалізації алгебри $A_{3.1}$ є максимальними алгебрами інваріантності. Для решти рівнянь максимальними алгебрами інваріантності є такі чотиривимірні алгебри Лі:

$$
\begin{array}{lll}
A^2_{3.1} & \not\ni & \langle t\partial_u\rangle \quad \text{для другого рівняння,}\\
A^3_{3.1} & \not\in & \langle e^{k(x+\beta t)}\partial_u\rangle \quad \text{для третього рівняння,}\\
A^4_{3.1} & \not\in & \langle e^{-kt}\partial_u\rangle \quad \text{для четвертого рівняння.}
\end{array}
$$

Тут $k > 0$, $\beta > 0$.

Для повного опису $A_{3.1}$-інваріантних рівнянь необхідно проаналізувати розширення реалізації $A^{14}_{2.1}$ до реалізацій алгебри $A_{3.1}$. Для цього ми розглянемо більш загальне рівняння

$$
u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 + A(x)u_x + B(x)u\ln|u| + uD(t,x), \qquad (6)
$$

яке, очевидно, містить як частинні випадки $A^{14}_{2.1}$-інваріантне рівняння, та шосте і сьоме рівняння із таблиці 1. В наступній лемі подано повний опис рівнянь вигляду (6), максимальна алгебра інваріантності, яких має розмірність не вищу за 3.

**Лема 1.** *Якщо функції $A$, $B$, $D$ є довільними, то максимальною алгеброю інваріантності рівняння* (6) *є двовимірна алгебра Лі, еквівалентна реалізації $A^{14}_{2.1}$, і* (6) *зводиться до $A^{14}_{2.1}$-інваріантного рівняння. За умови, що максимальна алгебра інваріантності рівняння* (6) *є тривимірною (ми позначаємо її $A_3$), мають місце такі випадки:*

**I.** $A_3 \sim A^6_{3.1}$, *функції $A, B, D$ зводяться до відповідних функцій в $A^6_{3.1}$-інваріантному рівнянні;*

**II.** $A_3 \sim A^7_{3.1}$, *функції $A, B, D$ зводяться до відповідних функцій в $A^7_{3.1}$-інваріантному рівнянні;*

**III.** $D = x^{-2}G(\xi),\ \xi = tx^{-1},\ G \neq 0:$

1) $A_3 \sim A_{3.2},\ A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, u\partial_u, |x|^{1-n}u\partial_u\rangle,$
   $A = nx^{-1}\ (n \neq 1),\ B = 0;$
2) $A_3 \sim A_{3.3},\ A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, u\partial_u, u\ln|x|\partial_u\rangle,\ A = x^{-1},\ B = 0;$
3) $A_3 \sim A_{3.4},\ A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, \sqrt{|x|}u\partial_u, \sqrt{|x|}\ln|x|u\partial_u\rangle,$
   $A = 0,\ B = \frac{1}{4}x^{-2};$

4) $A_3 \sim A_{3.9}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, \sqrt{|x|}\cos(\frac{1}{2}\beta\ln|x|)u\partial_u$, $\sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{2}\beta\ln|x|)u\partial_u\rangle$, $A = 0$, $B = mx^{-2}$, $m > \frac{1}{4}$, $\beta = \sqrt{4m-1}$;

5) $A_3 \sim A_{3.7}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, (\sqrt{|x|})^{1+\beta}u\partial_u, (\sqrt{|x|})^{1-\beta}u\partial_u\rangle$, $A = 0$, $B = mx^{-2}$, $m < \frac{1}{4}$, $m \neq 0$, $\beta = \sqrt{1-4m}$;

6) $A_3 \sim A_{3.8}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, \cos(\sqrt{m}\ln|x|)u\partial_u$, $\sin(\sqrt{m}\ln|x|)u\partial_u\rangle$, $A = x^{-1}$, $B = mx^{-2}$, $m > 0$;

7) $A_3 \sim A_{3.6}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, |x|^{\sqrt{|m|}}u\partial_u, |x|^{-\sqrt{|m|}}u\partial_u\rangle$, $A = x^{-1}$, $B = mx^{-2}$, $m < 0$;

8) $A_3 \sim A_{3.4}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, (\sqrt{|x|})^{1-n}u\partial_u, (\sqrt{|x|})^{1-n}\times$ $\times\ln|x|u\partial_u\rangle$, $A = nx^{-1}$ $(n \neq 0, 1)$, $B = \frac{1}{4}(n-1)^2x^{-2}$;

9) $A_3 \sim A_{3.9}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, (\sqrt{|x|})^{1-n}\cos(\frac{1}{2}\beta\ln|x|)u\partial_u$, $(\sqrt{|x|})^{1-n}\sin(\frac{1}{2}\beta\ln|x|)u\partial_u\rangle$, $A = nx^{-1}$ $(n \neq 0, 1)$, $B = mx^{-2}$ $(m > \frac{1}{4}(n-1)^2)$, $\beta = \sqrt{4m-(n-1)^2}$;

10) $A_3 \sim A_{3.7}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, (\sqrt{|x|})^{1-\beta-n}u\partial_u$, $(\sqrt{|x|})^{1-n+\beta}u\partial_u\rangle$, $A = nx^{-1}$ $(n \neq 0, 1)$, $B = mx^{-2}$ $(m < \frac{1}{4}(n-1)^2$, $m \neq 0)$, $\beta = \sqrt{(n-1)^2-4m}$.

**IV.** $D = G(t)$,

1) $A_3 \sim A_{3.3}$, $A_3 = \langle \partial_x, u\partial_u, xu\partial_u\rangle$, $A = B = 0$;

2) $A_3 = A_{3.2}$, $A_3 = \langle \partial_x, u\partial_u, e^xu\partial_u\rangle$, $A = -1$, $B = 0$;

3) $A_3 \sim A_{3.8}$, $A_3 = \langle \partial_x, \cos(x)u\partial_u, \sin(x)u\partial_u\rangle$, $A = 0$, $B = 1$;

4) $A_3 \sim A_{3.6}$, $A_3 = \langle \partial_x, e^xu\partial_u, e^{-x}u\partial_u\rangle$, $A = 0$, $B = -1$;

5) $A_3 \sim A_{3.4}$, $A_3 = \langle \partial_x, e^{\frac{1}{2}x}u\partial_u, e^{\frac{1}{2}x}xu\partial_u\rangle$, $A = -1$, $B = \frac{1}{4}$;

6) $A_3 \sim A_{3.7}$, $A_3 = \langle \partial_x, e^{\frac{1}{2}(1+\beta)x}u\partial_u, e^{\frac{1}{2}(1-\beta)x}u\partial_u\rangle$, $A = -1$, $B = m$ $(m < \frac{1}{4})$, $m \neq 0, \beta = \sqrt{1-4m}$;

7) $A_3 \sim A_{3.9}$, $A_3 = \langle \partial_x, e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{1}{2}\beta x)u\partial_u, e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{1}{2}\beta x)u\partial_u\rangle$, $A = -1$, $B = m$ $(m > \frac{1}{4})$, $\beta = \sqrt{4m-1}$;

**V.** $D = G(\eta)$, $\eta = x - kt$, $k > 0$,

1) $A_3 \sim A_{3.3}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, u\partial_u, xu\partial_u\rangle$, $A = B = 0$;

2) $A_3 = A_{3.2}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, u\partial_u, e^xu\partial_u\rangle$, $A = -1$, $B = 0$;

3) $A_3 \sim A_{3.8}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, \cos(x)u\partial_u, \sin(x)u\partial_u \rangle$,
$A = 0$, $B = 1$;

4) $A_3 \sim A_{3.6}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, e^x u\partial_u, e^{-x}u\partial_u \rangle$, $A = n$, $B = -1$;

5) $A_3 \sim A_{3.4}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{\frac{1}{2}x}u\partial_u, e^{\frac{1}{2}x}xu\partial_u \rangle$,
$A = -1$, $B = \frac{1}{4}$;

6) $A_3 \sim A_{3.7}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{\frac{1}{2}(1+\beta)x}u\partial_u, e^{\frac{1}{2}(1-\beta)x}u\partial_u \rangle$,
$A = -1, B = m$ $(m < \frac{1}{4})$, $m \neq 0, \beta = \sqrt{1-4m}$;

7) $A_3 \sim A_{3.9}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{1}{2}\beta x)u\partial_u$,
$e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{1}{2}\beta x)u\partial_u \rangle$, $A = -1$, $B = m$ $(m > \frac{1}{4})$ $\beta = \sqrt{4m-1}$.

*Доведення.* Підставивши в класифікуюче рівняння (4) вираз

$$F = -u^{-1}u_x^2 + A(x)u_x + B(x)u\ln|u| + uD(t,x),$$

одержуємо таку систему визначальних рівнянь для функцій $h(x)$, $r(t,x)$ та сталих $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ в операторові симетрії (3):

$$\begin{aligned}
&r = 0,\\
&(\lambda x + \lambda_2)A' + \lambda A = 0,\\
&(\lambda x + \lambda_2)B' + 2\lambda B = 0,\\
&h'' + Ah' + Bh = -(\lambda t + \lambda_1)D_t - (\lambda x + \lambda_2)D_x - 2\lambda D.
\end{aligned} \tag{7}$$

Спочатку зупинимось на доведенні першої частини леми, вважаючи функції $A$, $B$, $D$ довільними. Ліва частина четвертого рівняння системи (7) залежить лише від змінної $x$. Крім того, оскільки $D$ — довільна функція своїх аргументів, то, взагалі кажучи, $D_t \neq 0$. Звідси випливає, що сталі $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ з необхідністю дорівнюють нулю. Тому четверте рівняння зводиться до лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку для функції $h(x)$

$$h'' + Ah' + Bh = 0. \tag{8}$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді

$$h = C_1 f(x) + C_2\varphi(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

де функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ складають фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$y'' + Ay' + By = 0, \qquad y = y(x). \tag{9}$$

Далі, підставивши вираз для $h$ у (8), маємо

$$A = -\sigma^{-1}\sigma', \qquad B = \sigma^{-1}(\varphi' f'' - f', \varphi''),$$

де $\sigma = \varphi f' - \varphi' f \neq 0$. Першу частину твердження доведено.

Припустимо тепер, що $D = 0$. Тоді, якщо хоча б одна із функцій $A$ або $B$ є довільною функцією від $x$, то $\lambda = \lambda_2 = 0$, а функція $h$ задовольняє рівняння (8). Має місце перший випадок другої частини твердження.

Далі, якщо функції $A$ і $B$ не є довільними, то згідно із другим та третім рівняннями системи (7) вони, з точністю до еквівалентності, набувають одного із таких значень:

$$\begin{aligned}
&1)\quad A = B = 0;\\
&2)\quad A = n,\ B = m,\ m, n \in \mathbb{R}, |n| + |m| \neq 0;\\
&3)\quad A = nx^{-1},\ B = mx^{-2}, m, n \in \mathbb{R},\ |n| + |m| \neq 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

За цих умов, максимальна алгебра інваріантності відповідних рівнянь (6) має розмірність вищу за 3.

Таким чином, без втрати загальності розгляду, можна вважати, що $D \neq 0$. Інтегруючи рівняння

$$(\lambda t + \lambda_1)D_t + (\lambda x + \lambda_2)D_x + 2\lambda D = H(x)$$

за умови $D \neq 0$, одержуємо з точністю до еквівалентності такі вирази для функції $D(t, x)$:

$$\begin{aligned}
&D = x^{-2}G(\xi) + x^{-2}\textstyle\int xH(x)\,dx, \quad \xi = tx^{-1};\\
&D = G(\eta) + k^{-1}\textstyle\int H(x)\,dx, \quad \eta = x - kt, \quad k > 0;\\
&D = G(t) + \textstyle\int H(x)\,dx,\\
&D = tH(x) + \tilde{H}(x).
\end{aligned} \tag{11}$$

Неважко перевірити, що існують заміни змінних вигляду

$$\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x, \quad u = \theta(x)v(\bar{t}, \bar{x}), \quad \theta \neq 0, \tag{12}$$

де $\theta$ — розв'язок рівняння

$$\theta^{-1}\theta'' - \theta^{-2}(\theta')^2 + A\theta^{-1}\theta' + B\ln|\theta| + \Lambda(x) = 0,$$

які залишають вигляд рівняння (6) незмінним, а значення (11) функції $D$ зводять до таких:

$$\begin{aligned}
&D = x^{-2}G(\xi), \quad \xi = tx^{-1};\\
&D = G(\eta), \quad \eta = x - kt, \quad k > 0;\\
&D = G(t),\\
&D = tH(x).
\end{aligned} \tag{13}$$

Для перших трьох значень функції $D$ виконується рівність $H(x) \equiv 0$. Тому функція $h$ задовольняє рівняння (8). За умови, що $D = tH(x)$ маємо:

$$h'' + Ah' + Bh = -\lambda_1 H, \qquad (\lambda x + \lambda_2)H' + 3\lambda H = 0.$$

Таким чином, максимальна алгебра інваріантності відповідного рівняння (8) є тривимірною тоді і тільки тоді, коли $\lambda = \lambda_2 = 0$, що відповідає другому випадкові із другої частини твердження леми.

Нехай, тепер, $D = x^{-2}G(\xi)$, $\xi = tx^{-1}$. Тоді функція $G \neq 0$ задовольняє рівняння

$$(\lambda_2\xi - \lambda_1)G' + 2\lambda_2 G = 0. \tag{14}$$

Якщо $G$ є довільною функцією, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і, крім того, $\lambda \neq 0$ (інакше максимальна алгебра інваріантності буде двохвимірною). Тому виконуються рівності

$$xA' + a = 0, \qquad xB' + 2B = 0.$$

Звідси випливає, що функції $A$ та $B$ можуть набувати лише першого та третього значень із (10). Аналізуючи ці значення, одержуємо десять випадків пункту III другої частини твердження.

Якщо ж функція $G$ не являється довільною, то, інтегруючи (14), маємо

$$\begin{aligned}
&G = p, \quad p \in \mathbb{R}, \quad p \neq 0;\\
&G = p(\xi - q)^{-2}, \quad p \neq 0, \quad q \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

За умови $G = p$, параметр $\lambda_2$ дорівнює нулю. Тому з вимоги того, щоб максимальна алгебра інваріантності була тривимірною, випливає, що $\lambda$ також дорівнює нулю. Це відповідає випадкові, коли $A$ і $B$ в (6) є довільними функціями (перший випадок із другої частини твердження). Якщо ж $G = p(\xi - q)^{-2}$, $p \neq 0$, то маємо $\lambda_1 = \lambda_2 q$. Звідси випливає, що максимальна алгебра інваріантності відповідного рівняння (6) є тривимірною тоді і тільки тоді, коли функції $A$, $B$ задаються формулами 3) із (10) (при цьому $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а тому мають місце випадки, які містяться в третьому пунктові другої частини твердження), або коли функції $A$, $B$ задаються формулами 2) із (10) (при цьому $\lambda = 0$, $D = p(t - qx)^{-2}$ і з точністю до позначення сталих маємо випадки четвертого ($q = 0$) або п'ятого ($q \neq 0$) пунктів другої частини твердження).

Нехай, тепер, $D = G(\eta)$, $\eta = x - kt$, $k > 0$. Тоді має місце рівність

$$\lambda(\eta G' + 2G) + (\lambda_2 - k\lambda_1)G' = 0.$$

Звідси випливає, що коли $G$ — довільна функція змінної $\eta$, то $\lambda = 0$, $\lambda_2 = k\lambda_1$. Тому максимальна алгебра інваріантності рівняння (6) буде тривимірною тоді, коли $A = B = 0$ або $A$, $B$ задаються формулами 2) із (10). Таким чином, одержуємо всі випадки із п'ятого пункту другої частини твердження.

Припустимо тепер, що $G = p$ ($p \neq 0$) або $G = p\eta^{-2}$ ($p \neq 0$). Тоді вимога того, щоб максимальна алгебра інваріантності рівняння (6) була тривимірною, приводить нас до випадків, одержаних вище.

Нехай, нарешті, $D = G(t)$, тоді справедлива рівність

$$(\lambda t + \lambda_1)G' + 2\lambda G = 0.$$

Звідси випливає, що коли $G$ — довільна функція, то $\lambda = \lambda_1 = 0$ і максимальна алгебра інваріантності рівняння (6) буде тривимірною тоді, коли функції $A$, $B$ задаються формулою 2) із (10). Таким чином, одержуємо всі випадки із четвертого пункту другої частини твердження. Якщо ж $G = p$ ($p \neq 0$) або $G = pt^{-2}$ ($p \neq 0$), то вимога того, щоб максимальна алгебра інваріантності рівняння (6) була тривимірною, приводить нас до випадків, одержаних вище. Лему доведено.

Із доведеної леми, зокрема, випливає, що розширення реалізації $A^{14}_{2.1}$ до реалізацій алгебри $A_{3.1}$ приводить до вже відомих реалізацій $A^5_{3.1}, A^6_{3.1}$. Отже, $A_{3.1}$-інваріантні рівняння (1), (2) з точністю до еквівалентності вичерпуються рівняннями, значення функції $F$ в яких наведені в таблиці 1.

Також, серед рівнянь (6) є ще три рівняння, максимальними алгебрами інваріантності яких є тривимірні алгебри Лі ізоморфні алгебрі $A_{3.2}$. Решта ж тривимірних алгебр інваріантності рівнянь вигляду (6) є реалізаціями нерозкладних розв'язних тривимірних алгебр Лі.

Далі ми проводимо класифікацію нелінійних диференціальних рівнянь (1), (2), алгебрами інваріантності яких є реалізації алгебри $A_{3.2}$. Оскільки $A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1$, то для побудови реалізацій алгебри $A_{3.2}$ достатньо проаналізувати розширення відомих реалізацій алгебри $A_{2.2}$ ще одним оператором вигляду (3), який комутує з базисними операторами реалізацій $A^i_{2.2}$ $(i = 1, \ldots, 16)$. Розглянемо, наприклад, реалізацію $A^1_{2.2}$, для якої $e_1 = t\partial_t + x\partial_x$, $e_2 = xu\partial_u$. Поклавши $e_3$ рівним операторові (3) і перевіривши комутаційні співвідношення, які визначають алгебру $A_{3.2}$, одержуємо реалізацію

$$\langle t\partial_t + x\partial_x, xu\partial_u,\ u\partial_u\rangle,$$

яка є алгеброю інваріантності рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 + x^2uG(\xi), \qquad \xi = tx^{-1}.$$

Це рівняння належить до класу рівнянь (6) (перший випадок із третього пункту другої частини твердження леми при $n = 0$).

Провівши аналогічний аналіз решти п'ятнадцяти реалізацій алгебри $A_{2.2}$, ми отримали ще двадцять $A_{3.2}$-інваріантних рівнянь вигляду (1), (2). Повний перелік значень функцій $F$, які визначають ці рівняння, наведено в таблиці 2, де використано такі позначення:

$A^1_{3.2} = \langle k(t\partial_t + x\partial_x), |x|^{k^{-1}}u\partial_u, u\partial_u\rangle,\ k \neq 0;$
$A^2_{3.2} = \langle \partial_t, \partial_x, e^x u\partial_u\rangle;$
$A^3_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{k^{-1}x}u\partial_u, u\partial_u\rangle,\ k > 0;$
$A^4_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{k^{-1}x}u\partial_u, \partial_t + mu\partial_u\rangle,\ k > 0,\ m \neq 0;$
$A^5_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + k\partial_x, u\partial_u\rangle,\ k \geq 0;$
$A^6_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + mu\partial_u, \partial_t + k\partial_x, |\eta|^{-m}\partial_u\rangle,$
$\eta = x - kt,\ k = m = 0$ або $k > 0,\ m \in \mathbb{R};$
$A^7_{3.2} = \langle \partial_x, e^x u\partial_u, u\partial_u\rangle;$
$A^8_{3.2} = \langle \partial_x, e^x u\partial_u, \partial_t + mu\partial_u\rangle,\ m > 0;$
$A^9_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, u\partial_u\rangle;$
$A^{10}_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + ku\partial_u, \partial_x, |t|^{-k}\partial_u,\rangle,\ k \in \mathbb{R};$
$A^{11}_{3.2} = \langle \partial_t + ku\partial_u, e^{(1+k)t}\partial_u, \partial_x\rangle,\ k \in \mathbb{R};$
$A^{12}_{3.2} = \langle \partial_t + ku\partial_u, e^{(1+k)t}\partial_u, \partial_x + m(\partial_t + (1+k)u\partial_u)\rangle,$
$k \in \mathbb{R},\ m > 0;$
$A^{13}_{3.2} = \langle \partial_t + k(\cos x)u\partial_u, e^{(1+k\cos x)t}\partial_u, e^{kt\cos x}\cos x\partial_u\rangle,\ k \neq 0;$

$A^{14}_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + kx^{-1}u\partial_u, u\partial_u\rangle, k > 0;$

$A^{15}_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + kx^{-1}u\partial_u, e^{ktx^{-1}}\partial_u\rangle,\ k > 0;$

$A^{16}_{3.2} = \langle k(t\partial_t + x\partial_x), |t|^{k^{-1}}|\xi|^{\frac{k-1}{2k}}\partial_u, |\xi|^{\frac{k-1}{2k}}\partial_u\rangle,$
$k \neq 0, 1,\ \xi = tx^{-1};$

$A^{17}_{3.2} = \langle \partial_x, e^{x+(m-k)t}\partial_u, \partial_t + k\partial_x + mu\partial_u\rangle,\ m, k \in \mathbb{R};$

$A^{18}_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{\frac{1}{2}k^{-1}(x+kt)}\partial_u, e^{\frac{1}{2}k^{-1}\eta}\partial_u\rangle,$
$k > 0,\ \eta = x - kt;$

$A^{19}_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{t+m\eta}\partial_u, \partial_x + mu\partial_u\rangle,$
$k > 0,\ m \neq 0,\ \eta = x - kt;$

$A^{20}_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{t+(k-\beta)^{-1}\eta}\partial_u, \partial_t + \beta\partial_x\rangle,$
$k > 0,\ k \neq 1,\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq k,\ \eta = x - kt;$

$A^{21}_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{t+\frac{1-m}{k-\beta}\eta}\partial_u, \partial_t + \beta\partial_x + mu\partial_u\rangle;$
$k > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\ k \neq \beta,\ m \in \mathbb{R}.$

**Таблиця 2.** $A_{3.2}$-інваріантні рівняння (1), (2)

| № | Функція $F$ | Реалізація $A_{3.2}$ |
|---|---|---|
| 1 | $-u^{-1}u_x^2 - k^{-1}(1-k)x^{-1}u_x + x^{-2}uG(\xi)$, $\xi = tx^{-1}$ | $A^1_{3.2}$ |
| 2 | $u\ln^2\lvert u\rvert - u\ln\lvert u\rvert - 2u_x\ln\lvert u\rvert + uG(\omega)$, $\omega = u^{-1}u_x - \ln\lvert u\rvert$ | $A^2_{3.2}$ |
| 3 | $-u^{-1}u_x^2 - k^{-1}u_x + uG(\eta),\ \eta = x - kt$ | $A^3_{3.2}$ |
| 4 | $-u^{-1}u_x^2 - k^{-1}u_x + uG(\omega)$, $\omega = k^2u^{-1}u_x - k\ln\lvert u\rvert - m(x-kt)$ | $A^4_{3.2}$ |
| 5 | $u\eta^{-2}G(\omega), \eta = x - kt,\ \omega = \eta u_x u^{-1}$ | $A^5_{3.2}$ |
| 6 | $m(k^2-1)(m+1)\eta^{-2}u + \lvert\eta\rvert^{-2-m}G(\omega)$, $\eta = x - kt,\ \omega = \lvert\eta\rvert^m(mu + \eta u_x)$ | $A^6_{3.2}$ |
| 7 | $-u^{-1}u_x^2 - u_x + uG(t)$ | $A^7_{3.2}$ |
| 8 | $-u^{-1}u_x^2 - u_x + uG(\omega)$, $\omega = u^{-1}u_x - \ln\lvert u\rvert + mt$ | $A^8_{3.2}$ |
| 9 | $ut^{-2}G(\omega),\ \omega = tu^{-1}u_x$ | $A^9_{3.2}$ |
| 10 | $k(k+1)t^{-2}u + \lvert t\rvert^{-2-k}G(\omega),\ \omega\ \lvert t\rvert^{k+1}u_x$ | $A^{10}_{3.2}$ |

Продовження таблиці 2.

| п/п | Функція $F$ | Реалізація $A_{3.2}$ |
|---|---|---|
| 11 | $(1+k)^2u+e^{tk}G(\omega),\ \omega=e^{-kt}u_x$ | $A_{3.2}^{11}$ |
| 12 | $(1+k)^2u+e^{kt+mx}G(\omega),$ $\omega=e^{-kt-mx}u_x$ | $A_{3.2}^{12}$ |
| 13 | $[k^2t^2\sin^2 x+kt\cos x+k^2\cos^2 x+2k\cos x+$ $+1]u+2kt(\sin x)u_x+e^{kt\cos x}G(\omega)$ $\omega=e^{-kt\cos x}[u_x+(\tan x+kt\sin x)u]$ | $A_{3.2}^{13}$ |
| 14 | $2ktx^{-2}u_x-2ktx^{-3}u+k^2t^2x^{-4}u+x^{-2}uG(\omega),$ $\omega=xu^{-1}u_x+ktx^{-1}$ | $A_{3.2}^{14}$ |
| 15 | $2ktx^{-2}u_x+(k^2t^2x^{-4}-2ktx^{-3}+k^2x^{-2})u+$ $+x^{-2}e^{ktx^{-1}}G(\omega),\ \omega=e^{-ktx^{-1}}(xu_x+ktx^{-1}u)$ | $A_{3.2}^{15}$ |
| 16 | $\left[\frac{1-k}{k}\xi^2+\frac{1-k^2}{4k^2}(1-\xi^2)\right]t^{-2}u+t^{-2}G(\xi,\omega),$ $\omega=\lvert\xi\rvert^{\frac{k-1}{2k}}\left[xu_x+\frac{k-1}{2k}u\right],\ \xi=tx^{-1}$ | $A_{3.2}^{16}$ |
| 17 | $[(m-k)^2-1]u+e^{mt}G(\omega),\omega=e^{-mt}(u_x-u)$ | $A_{3.2}^{17}$ |
| 18 | $\frac{1}{4}k^{-2}(k^2-1)u+G(\eta,\omega),\eta=x-kt,$ $\omega=e^{\frac{1}{2}k^{-1}\eta}(u_x-\frac{1}{2}k^{-1}u)$ | $A_{3.2}^{18}$ |
| 19 | $[(km-1)^2-m^2]u+e^{m\eta}G(\omega),$ $\eta=x-kt,\ \omega=e^{-m\eta}(u_x-mu)$ | $A_{3.2}^{19}$ |
| 20 | $[(k(k-\beta)^{-1}-1)^2-(k-\beta)^{-2}]u+G(\omega),$ $\omega=u_x-(k-\beta)^{-1}u$ | $A_{3.2}^{20}$ |
| 21 | $\left[\frac{(k^2-1)(1-m)^2}{(k-\beta)^2}-\frac{2k(1-m)}{k-\beta}+1\right]u+$ $+e^{(\beta-k)^{-1}\eta}G(\omega),\eta=x-kt,$ $\omega=e^{m(k-\beta)^{-1}\eta}\left(u_x-\frac{1-m}{k-\beta}u\right)$ | $A_{3.2}^{21}$ |

**4. Заключні зауваження.** Одним із основних висновків, які можна зробити на основі проведених досліджень, є те, що задача *повної* групової класифікації інваріантних рівнянь (1) — дуже нетривіальна математична проблема, розв'язання якої потребує нетрадиційних методів і підходів. Саме цей факт пояснює ту дивну обставину, що для такого класичного рівняння, як нелінійне хвильове рівняння (1), задачу групової класифікації до цих пір не розв'язано у повному обсязі.

В ряді робіт (короткий огляд яких подано у вступі) одержано частковий розв'язок задачі групової класифікації рівнянь вигляду (1). В цих роботах або вивчаються групові властивості рівнянь досліджуваного вигляду при спеціальному виборі функції $F$, або фіксується *a priori* вигляд шуканих операторів симетрії. Очевидно, що обидва підходи ведуть до втрати, як інваріантних рівнянь, так і нетривіальних алгебр інваріантності, які допускаються такими рівняннями.

Запропонований в [17] метод групової класифікації диференціальних рівнянь малої розмірності дозволяє в багатьох випадках одержати вичерпний опис інварінтних рівнянь, які належать до деякого наперед заданого класу диференціальних рівнянь з частинними похідними. В даній роботі повністю розв'язано задачу класифікації рівнянь (1), (2), які допускають двовимірні та тривимірні розкладні розв'язні алгебри Лі. Оскільки не існує рівнянь досліджуваного вигляду, алгебри інваріантності яких були б напівпростими або містили напівпрості алгебри, як підалгебри, то для повного розв'язання задачі групової класифікації рівнянь (1), (2) необхідно дослідити випадки тривимірних нерозкладних розв'язних алгебр Лі та розширень тривимірних розв'язних алгебр Лі до розв'язних алгебр Лі розмірності $n > 3$.

Іншим важливим застосуванням нашого підходу є групова класифікація систем нелінійних диференціальних рівнянь гіперболічного типу з двома незалежними змінними. Є серйозні підстави вважати, що для таких рівнянь також можливо одержати повний розв'язок задачі групової класифікації.

## Література


[1] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978 (English transl.: Academic Press, New York, 1982).

[2] *Olver P. J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. — New-York: Springer-Verlag, 1986.

[3] *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — К.: Наукова думка, 1989 (English transl.: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993).

[4] *Fushchych W. I., Zhdanov R. Z.* Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. — K.: Mathematical Ukraina Publishers, 1997.

[5] *Lie S.* Über die Integration durch bestimmte Inegrale von einer Klasse linearer partiallen Differentialgleichungen // Arch. Math. — 1881. — **6**, № 3. — S. 328 – 368.

[6] *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн.физ. — 1960, № 3. — P. 126 – 145.

[7] *Bluman G. W., Kumei S.* On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys. — 1987. — **28**, № 2. — P. 307 – 318.

[8] *Lie S.* Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ // Arch. Math. — 1881. — **8**, № 1. — S. 112 – 125.

[9] *Pucci E., Salvatori M. C.* Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations // Int. J. Non. Mech. — 1986. — **21**, № 2. — P. 147 – 152.

[10] *Pucci E.* Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ // Riv. Mat. Univ. Parma. — 1987. — **12**, № 4. — P. 71 – 87.

[11] *Ames W. F., Adams E., Lohner R. J.* Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non. Mech. — 1981. — **16**, № 5-6. — P. 439 –447.

[12] *Oron A., Rosenau Ph.* Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. — 1986. — **118**, № 4. — P. 172 – 176.

[13] *Suhubi E. S., Bakkaloğlu A.* Group poperties and similarity solutions for a quasi-linear wave equation in the plane // Int. J. Non. Mech. — 1991. — **26**, № 5. — P. 567 – 584.

[14] *Torrisi M., Valenti A.* Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a nonlinear wave equation // Int. J. Non. Mech. — 1985. — **20**, № 3 — P. 135 – 144.

[15] *Torrisi M., Valenti A.* Group analysis and some solutions of a nonlinear wave equation // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. — 1990. — **38**, № 2. — P. 445 – 458.

[16] *Ibragimov N. H., Torrisi M., Valenti A.* Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. — 1991. — **32**, № 11. — P. 2988 – 2995.

[17] *Zhdanov R. Z., Lahno V. I.* Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. — 1999. — **32**. — 7405 – 7418.

[18] *Ахатов Н. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1989. — **34**. — С. 3 – 83.

[19] *Magda O.* The group classification of nonlinear wave equations invariant under two–dimensional Lie algebras // Proceeding of Institute of Mathematics of he NAS of Ukraine. — 2000. — **30**, Part 1. — P. 165 – 169.

[20] *Barut A. O., Raczka R.* Theory of group representations and applications. — Warszawa: PWN-Polish Scientific, 1977.