Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, том 14, № 1, 39–45

УДК 517.54 + 517.12

В. В. Билет [1], ***Б. А. Клищук*** [2],
Р. Р. Салимов [3]

[1] (*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск*)

[2,3] (*Институт математики НАН Украины, Киев*)

[1] **biletvictoriya@mail.ru**, [2] **kban1988@gmail.com**,
[3] **ruslan623@yandex.ru**

Оценки площади образа круга для классов Соболева

Посвящается 70-летию профессора Юрия Борисовича Зелинского

Для регулярных гомеоморфизмов класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, обладающих N-свойством Лузина, установлены верхние и нижние оценки площади образа круга в терминах угловой p-дилатации.

Lower and upper estimates of an area for image of a disk under regular homeomorphisms of the Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$, having the Luzin N-property, are established in terms of an angular p-dilatation.

1. Введение. Задача об искажении площадей при квазиконформных отображениях берет свое начало в работе Б. Боярского (см. [1]). Ряд результатов в этом направлении получен в работах [2–4].

В данной статье получены точные оценки искажения площади образа круга при регулярных гомеоморфизмах класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, обладающих N-свойством (Лузина).

Отметим, что впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М. А. Лаврентьева [5]. В монографии [6, предложение 3.7], получено уточнение неравенства Лаврентьева в терминах угловой дилатации. Также, ранее в работах [7, 8] верхние оценки искажения площади образа круга были получены методом модулей.

Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то есть связное, открытое подмножество $\mathbb{C}$. Напомним, что отображение $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in G$, если в этой точке f имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$ (см., например, I. 1.6 в [10]). Гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ называется *регулярным*, если $J_f > 0$ почти всюду (п.в.).

Говорят, что гомеоморфизм $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ обладает N-*свойством* (Лузина), если для любого множества $E \subset G$ из условия $|E| = 0$ следует, что $|f(E)| = 0$.

Пусть f — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $p > 1$. Будем называть p-*угловой дилатацией* отображения f относительно точки z_0 величину:

$$D_p(z, z_0) = D_p(re^{i\theta}) = \frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^p}{r^p J_f(re^{i\theta})}.$$

Здесь $z = z_0 + re^{i\theta}$, J_f — якобиан отображения f. Для каждого $r > 0$ введем в рассмотрение величину

$$d_p(r) = \left(\frac{1}{2\pi r}\int_{\gamma_r} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\, ds\right)^{p-1}.$$

2. Вспомогательные леммы. Всюду далее полагаем

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}, \quad \gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}, \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Обозначим через $L(r)$ длину кривой $f(re^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, а через $S(r) = |f(B_r)|$ — площадь $f(B_r)$.

Лемма 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ — *регулярный гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, *обладающий* N-*свойством.*

Тогда при $p > 1$ *для п.в.* $r \in (0,1)$ *имеет место оценка*:

$$L^p(r) \leqslant (2\pi r)^{p-1}\, d_p(r)\, S'(r). \tag{1}$$

Доказательство. Для п.в. $r \in (0,1)$, имеем

$$L(r) = \int_0^{2\pi} |f_\theta(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} D_p^{\frac{1}{p}}(re^{i\theta})\, J_f^{\frac{1}{p}}(re^{i\theta})\, r\, d\theta.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $q = p$, $q' = \frac{p}{p-1}$, имеем

$$L(r) \leqslant \left(\int_0^{2\pi} J_f(re^{i\theta})\, r\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} D_p^{\frac{1}{p-1}}(re^{i\theta})\, r\, d\theta\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

для п.в. $r \in (0,1)$. Используя тот факт, что

$$S'(r) = \int_0^{2\pi} J_f(re^{i\theta})\, r\, d\theta\,,$$

получаем

$$L^p(r) \leqslant (2\pi r)^{p-1}\, d_p(r)\, S'(r)$$

для п.в. $r \in (0,1)$. Лемма 1 доказана.

В следующей лемме получено дифференциальное неравенство для функции $S(r)$.

Лемма 2. *Пусть $f\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, обладающий N-свойством. Тогда при $p > 1$ для п.в. $r \in (0,1)$ имеет место неравенство*

$$S'(r) \geqslant 2\pi^{\frac{2-p}{2}}\, r^{1-p}\, d_p^{-1}(r)\, S^{\frac{p}{2}}(r). \tag{2}$$

Доказательство. Из неравенства (1) следует, что для п.в. $r \in (0,1)$ справедлива оценка

$$S'(r) \geqslant (2\pi r)^{1-p}\, d_p^{-1}(r)\, L^p(r)\,.$$

Используя, далее, известное изопериметрическое неравенство

$$L^2(r) \geqslant 4\pi S(r),$$

получаем дифференциальное соотношение (2). Лемма 2 доказана.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $f\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ *— регулярный гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$, *обладающий* N*-свойством. Тогда при* $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1$ *выполняются оценки*:

$$S(r_1) \leqslant S(r_2) \exp\left\{-2\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r\, d_2(r)}\right\},\ p = 2,$$

$$S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) \leqslant \pi^{\frac{2-p}{2}}\,(p-2)\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{p-1}\, d_p(r)},\ p > 2,$$

$$S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) \geqslant \pi^{\frac{2-p}{2}}\,(2-p)\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{p-1}\, d_p(r)},\ 1 < p < 2.$$

Доказательство. Воспользуемся дифференциальным неравенством (2). Тогда для п.в. $r \in (0,1)$

$$\frac{S'(r)}{S^{\frac{p}{2}}(r)}\, dr \geqslant 2\pi^{\frac{2-p}{2}}\, \frac{dr}{r^{p-1}\, d_p(r)}\,. \tag{3}$$

При $p = 2$, имеем

$$\frac{S'(r)}{S(r)}\, dr \geqslant 2\, \frac{dr}{r\, d_2(r)}\,.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по $r \in (r_1, r_2)$, получаем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} (\ln S(r))^{'}\, dr \geqslant 2\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r\, d_2(r)}\,.$$

Заметим, что функция $g(r) = \ln S(r)$ является неубывающей, тогда

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} (\ln S(r))^{'} dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} g'(r) dr \leqslant g(r_2) - g(r_1) = \ln\frac{S(r_2)}{S(r_1)}$$

(см., напр., Теорему IV. 7.4 в [9]) и

$$\ln\frac{S(r_2)}{S(r_1)} \geqslant 2\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r\, d_2(r)}\,,$$

откуда

$$S(r_1) \leqslant S(r_2) \exp\left\{-2\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r\, d_2(r)}\right\}.$$

Рассмотрим случай $p \neq 2$. Интегрируя обе части неравенства (3) по $r \in (r_1, r_2)$, имеем

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}}\right)' dr \geqslant 2\pi^{\frac{2-p}{2}} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{p-1}\, d_p(r)}\,.$$

Заметим, что функция $g_p(r) = \frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}}$ является неубывающей, тогда

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\frac{S^{\frac{2-p}{2}}(r)}{\frac{2-p}{2}}\right)' dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} g_p'(r) \leqslant g_p(r_2) - g_p(r_1) =$$

$$= \frac{2}{2-p}\left(S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_1)\right)$$

(см., Теорему IV. 7.4 в [9]).

Таким образом, получаем неравенства:

$$S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) \leqslant \pi^{\frac{2-p}{2}}\,(p-2)\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{p-1}\, d_p(r)},\ p > 2,$$

$$S^{\frac{2-p}{2}}(r_2) - S^{\frac{2-p}{2}}(r_1) \geqslant \pi^{\frac{2-p}{2}}\,(2-p)\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{p-1}\, d_p(r)},\ 1 < p < 2.$$

Лемма 3 доказана.

3. Основные результаты. Ниже приведена теорема об оценке площади образа круга.

Теорема 1. *Пусть $f\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, обладающий N-свойством. Тогда имеют место оценки*:

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \exp\left\{-2\int\limits_{r}^{1} \frac{dt}{t\, d_2(t)}\right\},\ p = 2,$$

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \left(1 + (p-2)\int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{p-1}\, d_p(t)}\right)^{-\frac{2}{p-2}}, \ p > 2,$$

$$|f(B_r)| \geqslant \pi\, (2-p)^{\frac{2}{2-p}} \left(\int\limits_0^r \frac{dt}{t^{p-1}\, d_p(t)}\right)^{\frac{2}{2-p}}, \ 1 < p < 2.$$

Доказательство. Теорема 1 следует из Леммы 3 при условии, что $S(1) \ \leqslant \ |f(\mathbb{B})| \leq \pi$.

Из Теоремы 1 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ *— регулярный гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$*, обладающий* N*-свойством. Пусть, кроме того, для некоторого конечного числа* $k > 0$ *выполняется условие* $d_p(r) \leqslant k$ *для п.в.* $r \in (0,1)$*. Тогда имеют место оценки*:

$$|f(B_r)| \leqslant \pi r^{\frac{2}{k}}, \, p = 2,$$

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \left(\frac{k-1}{k} + \frac{1}{k}\, r^{2-p}\right)^{-\frac{2}{p-2}}, \ p > 2,$$

$$|f(B_r)| \geqslant k^{\frac{2}{p-2}}\, \pi\, r^2, \, 1 < p < 2.$$

Следствие 2. *Пусть* $f\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ *— регулярный гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$*, обладающий* N*-свойством. Пусть, кроме того, для некоторого конечного числа* $k > 0$ *выполняется условие* $d_p(r) \leqslant k\, r^{2-p}$ *для п.в.* $r \in (0,1)$*. Тогда при* $p > 2$ *имеет место оценка*

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \left(1 + \frac{p-2}{k}\, \ln \frac{1}{r}\right)^{-\frac{2}{p-2}}.$$

Следствие 3. *Пусть* $f\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ *— регулярный гомеоморфизм класса Соболева* $W^{1,1}_{\rm loc}$*, обладающий* N*-свойством. Пусть, кроме того, для некоторого конечного числа* $k > 0$ *выполняется условие* $d_p(r) \leqslant k\, \ln\left(\frac{e}{r}\right)$ *для п.в.* $r \in (0,1)$*. Тогда при* $p = 2$ *имеет место оценка*

$$|f(B_r)| \leqslant \pi\, \ln^{-\frac{2}{k}} \left(\frac{e}{r}\right).$$

Список литературы

[1] *Боярский Б. В.* Гомеоморфные решения систем Бельтрами // ДАН СССР. — 1955. — **102**. — С. 661 – 664.

[2] *Gehring F., Reich E.* Area distortion under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. — 1966. — **388**. — P. 1 – 15.

[3] *Astala K.* Area distortion of quasiconformal mappings // Acta Math. — 1994. — **173**. — P. 37 – 60.

[4] *Eremenko A., Hamilton D.* On the area distortion by quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — **123**. — P. 2793 – 2797.

[5] *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 136 с.

[6] *Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V.* Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane /Tracts in Mathematics, **19**/. — Warsaw–Donetsk–Helsinki, 2013. — 216 p.

[7] *Ломако Т. В., Салимов Р. Р.* К теории экстремальных задач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — С. 264 – 269.

[8] *Салимов Р. Р.* Нижние оценки p-модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. — 2014. — **26**, № 6. — С. 143 – 171.

[9] *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949. — 495 с.

[10] *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. — New York: Springer–Verlag, 1973. — 258 p.