ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТАМИ И СИСТЕМАМИ

УДК 519.873

ОПТИМАЛЬНОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ НАРАБОТКИ КАЖДОГО ЭЛЕМЕНТА

Песчанский А.И.

Введение

За счет совершенствования математического обеспечения технического обслуживания (ТО) сложных систем в процессе эксплуатации можно получить существенный экономический эффект. Проблемой ТО сложных систем занимались многие исследователи. Обзор результатов по различным стратегиям ТО систем можно найти, например, в работах [1-4]. В монографии [4] исследована задача оптимального управляющего воздействия на эксплуатацию цепочки последовательно соединенных элементов с учетом наработки на отказ всей системы и дублированных систем с облегченным и ненагруженным резервом.

В данной статье рассмотрена стратегия ТО дублированной системы с нагруженным резервом и мгновенной индикацией отказа с учетом суммарной наработки на отказ каждого элемента. Относительно длительностей безотказной работы элементов, их восстановлений и ТО предполагается, что они являются случайными величинами с распределениями общего вида. Для решения задачи привлекается аппарат полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством состояний. Находится стационарное распределение вложенной цепи Маркова, определяются стационарные характеристики функционирования системы: коэффициент технического использования, средний удельный доход, приходящийся на единицу календарного времени, средние удельные затраты, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы. Решается задача оптимизации величин наработок на отказ каждого элемента для проведения его ТО для достижения оптимальных значений указанных показателей качества функционирования системы.

Постановка задачи и построение математической модели

Рассмотрим систему, состоящую из двух параллельно соединенных элементов. Время безотказной работы каждого из них – случайная величина (СВ) α_i, $i=1,2$, с функцией распределения (ФР) $F_i(t)=P(\alpha_i \le t)$. Индикация отказа осуществляется мгновенно и начинается его восстановление (аварийное), которое длится случайное время β_i с ФР $G_i(t)=P(\beta_i \le t)$, $i=1,2$. Предполагается, что в момент, когда суммарная наработка i-го значения («возраст жизни») достигает заданного уровня τ_i, начинается его предупредительно ТО, длительность которого - СВ β_i^p с ФР $G_i^p(t)=P(\beta_i^p \le t)$. Как после аварийного восстановления, так и после ТО, все надежностные характеристики элемента полностью обновляются. Считается, что все СВ имеют абсолютно непрерывные ФР и конечные математические ожидания.

Требуется определить следующие стационарные показатели качества функционирования системы: коэффициент технического использования K_u, среднюю удельную прибыль S в единицу календарного времени и средние удельные затраты C за единицу исправного функционирования системы; найти оптимальные величины наработок τ_i, при которых указанные показатели качества функционирования системы достигают оптимальных значений.

Функционирование системы опишем полумарковским процессом (ПМП) $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [5,6]. Каждый элемент системы может находиться в трех физических состояниях: работоспособном, в состоянии аварийного восстановления и в состоянии предупредительного ТО.

Введем следующее множество полумарковских состояний системы

$$E = \left\{ i(d_1, d_2)(x_1, x_2)^{(i)}(u_1, u_2);\ i(d_1, d_2)(x_1, x_2)^{(i)}(u_1, u_2)^{(i)},\quad d_i = 1;\ i = 1,2 \right\},$$

где i - номер элемента, изменившего свое физическое состояние последним. Компоненты вектора (d_1, d_2) указывают на физическое состояние соответствующего элемента:

$d_i = 1$ - элемент, находится в работоспособном состоянии,

$d_i = 0$ - проводится аварийное восстановление элемента,

$d_i = 2$ - проводится ТО элемента. Компоненты вектора $(x_1, x_2)^{(i)}, x_i = 0$, фиксируют время с момента последнего изменения физического состояния i-го элемента до ближайшего момента изменения состояния другого элемента.

Компоненты вектора (u_1, u_2) равны суммарным наработкам соответствующих элементов в момент последнего изменения физического состояния системы, причем, если $d_j = 2, j = 1,2$, считается, что $u_j = \tau_j$; $(u_1, u_2)^{(i)}$ - вектор, у которого $u_i = 0$.

Например, состояние $1(1,0)(0, x_2)(u_1, u_2)$ означает, что последним изменением состояния системы было восстановление работоспособности первого элемента, второй элемент находится в состоянии аварийного восстановления, до конца которого осталось время x_2, суммарная наработка элементов в тот момент составила соответственно u_1 и u_2. Состояния $1(1, d_2)(0, x_2)(0, u_2)$ и $2(d_1, 1)(0, x_2)(u_1, u_2)$ соответствуют возобновлению работы после ТО соответственно первого и второго элементов.

Определим времена θ пребывания системы в полумарковских состояниях. Обозначим через Ω совокупность номеров компонент вектора (d_1, d_2) равных 1. Тогда

$$\theta_{i(d_1,d_2)(x_1,x_2)^{(i)}(u_1,u_2)} = \gamma_i^{(d_i)} \wedge x_{3-i} \wedge \bigwedge_{j\in\Omega} (\tau_j - u_j),$$

где $\wedge$ - знак минимума, $\gamma_i^{(d_i)} = \begin{cases} \alpha_i,\ d_i = 1, \\ \beta_i,\ d_i = 0, \\ \beta_i^{\,p},\ d_i = 2. \end{cases}$

Определим вероятности и плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \ge 0\}$. Заметим, что из физического состояния d_i i-й элемент может перейти в состояние $d_i' = 1 \pm \sqrt{2d_i - d_i^2}$, т.е. из работоспособного состояния 1 возможны переходы в состояние 0 (аварийное восстановление) и в состояние 2 (ТО); из состояния 0 – в 1; из состояния 2 – в состояние 1.

Из состояния 1 (11) $(0, x_2)(u_1, u_2)$ возможен переход в одно из четырех состояний в зависимости от значения минимума величин $\alpha_1 \wedge x_2 \wedge (\tau_1 - u_1) \wedge (\tau_2 - u_2)$:

а) $\dfrac{d}{dt} P\{1(1,1)(0, x_2)(u_1, u_2) \to 1(0,1)(0, x_2 - t)(u_1 + t, u_2 + t)\} = f_1(t)$,

если $\alpha_1 < x_2 \wedge (\tau_1 - u_1) \wedge (\tau_2 - u_2),\ \ \alpha_1 \in dt$;

 ISBN 7-776-8361-7

б) $\dfrac{d}{dx_1}P\{1(1,1)(0,x_2)(u_1,u_2)\to 2(1,0)(x_1,0)(u_1+x_2,\,u_2+x_2)\}=f_1(x_2+x_1),\ x_1>0$,

если $x_2<\alpha_1\wedge(\tau_1-u_1)\wedge(\tau_2-u_2),\quad \alpha_1\in x_2+dx_1$;

в) $\dfrac{d}{dx_1}P\{1(1,1)(0,x_2)(u_1,u_2)\to 2(1,2)(x_1,0)(u_1+\tau_2-u_2,\tau_2)\}=f_1(\tau_2-u_2+x_1),\ x_1>0$,

если $\tau_2-u_2<\alpha_1\wedge x_2\wedge(\tau_1-u_1),\ \ \alpha_1\in\tau_2-u_2+dx_1$;

г) $P\{1(1,1)(0,x_2)(u_1,u_2)\to 1(2,1)(0,x_2-\tau_1+u_1)(\tau_1,u_2+\tau_1-u_1)\}=\overline{F}_1(\tau_1-u_1)$,

если $\tau_1-u_1<\alpha_1\wedge x_2\wedge(\tau_2-u_2)$.

Аналогично можно выписать вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n,n\ge 0\}$ из остальных состояний.

Определение стационарных показателей качества функционирования системы

Фазовое пространство состояний системы E разобьем на два непересекающихся подмножества E_+ и E_-: E_+ - подмножество работоспособных состояний, E_- - подмножество отказовых состояний. К подмножеству E_+ относятся состояния, в которых хотя бы один из элементов находится в работоспособном состоянии. В подмножество E_- входят состояния, в которых оба элемента находятся либо в состоянии аварийного восстановления, либо ТО:

$$\mathrm{E}_-=\{i(d_1,d_2)(x_1,x_2)^{(i)}(u_1,u_2),\ i=1,2;\ d_j\ne 1,\ j=1,2\}.$$

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+, среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент технического использования K_u найдем по формулам [5,6]

$$\mathrm{T}_+=\frac{\int\limits_{\mathrm{E}_+}m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}_-}\rho(dz)P(z,\mathrm{E}_+)},\quad \mathrm{T}_-=\frac{\int\limits_{\mathrm{E}_-}m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}_-}\rho(dz)P(z,\mathrm{E}_+)},\quad K_u=\frac{T_+}{T_++T_-},\tag{1}$$

где $\rho(\cdot)$ - стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n,n\ge 0\}$,

$m(z)$ - средние времена пребывания в состояниях системы,

$P(z,\mathrm{E}_+)$ - вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n,n\ge 0\}$ из отказовых состояний в работоспособные.

Предположим, что для ВЦМ $\{\xi_n,n\ge 0\}$ выполняются условия существования и единственности стационарного распределения [5]. Докажем следующую теорему.

Теорема. Стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n,n\ge 0\}$ определяется формулами

$$\rho(i(d_1,d_2)(x_1,x_2)^{(i)}(u_1,u_2)=\rho\,\Phi_1(u_1,x_1)\Phi_2(u_2,x_2),\tag{2}$$

где $$\Phi_j(u_j,x_j)=\begin{cases}h_j(u_j)\overline{G}_j(x_j), & d_j=0,\\ v_j(u_j,x_j), & d_j=1,\\ \overline{G}_j{}^p(x_j), & d_j=2,\end{cases}$$

$v_j(u_j,x_j)=f_j(u_j+x_j)+\int\limits_0^{u_j}f_j(u_j+x_j-s)h_j(s)ds$ - плотность прямого остаточного времени восстановления рекуррентного потока, порожденного СВ α_j, $v_j(u_j,0)=h_j(u_j)$ - плотность функции восстановления $H_j(u_j)$, порожденной СВ α_j, $v_j(0,0)\equiv 1,\ j=1,2$;

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(1 + H_i(\tau_i)\right)\left(\tau_i + M\beta_i^p + M\beta_i H_i(\tau_i)\right)\right)^{-1}.$$

Доказательство. По определению стационарного распределения плотность $\rho(\cdot)$ должна удовлетворять следующей системе интегральных уравнений

$$\rho\left(1(0,d_2)(0,x_2)(u_1,u_2)\right) = \int_0^{u_m} f_1(t)\rho(1(1,d_2)(0,x_2+t)(u_1-t,u_2'))dt +$$

$$+\int_0^{u_m}\psi_2^{(d_2)}(t+x_2)\rho(2(1,d_2)(t,0)(u_1-t,u_2'))dt + f_m(x_m+u_m)\rho(m(1,d_2)(x_1+u_m,x_2+u_m)^{(m)}(u_2',u_2'')),$$

$$x_1 = 0,\ d_2 = \overline{0,2},$$

$$\rho\left(1(1,1)(0,x_2)(u_1,u_2)\right) = \int_0^{u_2} g_1(t)\rho(1(0,1)(0,x_2+t)(u_1,u_2-t))dt +$$

$$+\int_0^{u_2} f_2(t+x_2)\rho(2(0,1)(t,0)(u_1,u_2-t))dt + f_2(u_2+x_2)\rho(2(0,1)(u_2,0)(u_1,0)),$$

$$\rho\left(1(1,d_2)(0,x_2)(u_1,u_2)\right) = \int_0^{\infty} g_1(t)\rho(1(0,d_2)(0,x_2+t)(u_1,u_2'))dt +$$

$$+\int_0^{\infty}\psi_2^{(d_2)}(t+x_2)\rho(2(0,d_2)(t,0)(u_1,u_2'))dt, \quad d_2 = 0{,}2,$$

$$\rho\left(1(2,d_2)(0,x_2)(\tau_1,u_2)\right) = \int_0^{u_m}\overline{F}_1(t)\rho(1(1,d_2)(0,x_2+t)(\tau_1-t,u_2'))dt +$$

$$+\int_0^{u_m}\psi_2^{(d_2)}(t+x_2)dt\int_0^{\infty}\rho(2(1,d_2)(t+s,0)(\tau_1-t,u_2'))ds + \overline{F_1}(\tau_1)\rho(1(1,d_2)(0,\tau_1+x_2)(0,u_2')),\ d_2 = 0{,}2,$$

$$\rho\left(1(2,1)(0,x_2)(\tau_1,u_2)\right) = \int_0^{u_m}\overline{F}_1(t)\rho(1(1,1)(0,x_2+t)(\tau_1-t,u_2-t))dt +$$

$$+\int_0^{u_m} f_2(t+x_2)dt\int_0^{\infty}\rho(2(1,1)(t+s,0)(\tau_1-t,u_2-t))ds +$$

$$+\int_0^{\infty} f_m(x_m+u_m)\rho(m(1,1)(x_1+u_m,x_2+u_m)^{(m)}(u_1-u_m,u_2-u_m))dx_1,$$

$$\rho\left(1(1,d_2)(0,x_2)(0,u_2)\right) = \int_0^{\infty} g_1^{\,p}(t)\rho(1(2,d_2)(0,t+x_2)(\tau_1,u_2'))dt +$$

$$+\int_0^{\infty}\psi_2^{(d_2)}(t+x_2)\rho(2(2,d_2)(t,0)(\tau_1,u_2'))dt, \qquad d_2 = 0{,}2,$$

$$\rho\left(1(1,1)(0,x_2)(0,u_2)\right) = \int_0^{u_2} g_1^{\,p}(t)\rho(1(2,1)(0,x_2+t)(\tau_1,u_2-t))dt +$$

$$+\int_0^{u_2} f_2(t+x_2)\rho(2(2,1)(t,0)(\tau_1,u_2-t))dt + f_2(u_2+x_2)\rho(2(2,1)(u_2,0)(\tau_1,u_2)),$$

где

 ISBN 7-776-8361-7

$$\psi_i^{(d_i)}(t)=\frac{d}{dt}\Psi_i^{(d_i)}(t),\quad \Psi_i^{(d_i)}(t)=\begin{cases}F_i(t), & d_i=1,\\ G_i(t), & d_i=0,\\ G_i^{\,p}(t), & d_i=2,\end{cases}\qquad u_m=\begin{cases}u_1\wedge u_2, & d_2=1,\\ u_1, & d_2=0,2,\end{cases}$$

$$u_1'=\begin{cases}0, & d_2\neq 1,\\ u_1-u_m, & d_2=1,\end{cases}\qquad u_2'=\begin{cases}u_2-t, & d_2=1,\\ u_2, & d_2=0,\\ \tau_2, & d_2=2,\end{cases}\qquad u_2''=\begin{cases}u_2-u_m, & d_2=1,\\ u_2, & d_2=0,\\ \tau_2, & d_2=2.\end{cases}$$

Аналогично выписываются 12 уравнений для состояний $2(d_1,d_2)(x_1,0)(u_1,u_2)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что формулы (2) определяют решение этой системы. Например, проверим, что функции

$$\rho(1(0,1)(0,x_2)(u_1,u_2))=\rho(1(1,1)(0,x_2)(u_1,u_2))=\rho h_1(u_1)v_2(u_2,x_2),$$
$$\rho(2(1,1)(x_1,0)(u_1,u_2))=\rho v_1(u_1,x_1)h_2(u_2),\rho(1(1,1)(0,x_2)(0,u_2))=\rho v_2(u_2,x_2) \qquad (3)$$
$$\rho(2(1,1)(x_1,0)(u_1,0))=\rho v_1(u_1,x_1),$$

являются решениями уравнения

$$\rho(1(0,1)(0,x_2)(u_1,u_2))=\int_0^{u_m}f_1(t)\rho(1(1,1)(0,x_2+t)(u_1-t,u_2-t))dt+$$
$$+\int_0^{u_m}f_2(t+x_2)\rho\big(2(1,1)(t,0)(u_1-t,u_2-t)\big)dt+$$
$$+f_m(x_m+u_m)\rho(m(1,1)(x_1+u_m,x_2+u_m)^{(m)}(u_1-u_m,u_2-u_m)),\ x_1=0,\ u_m=u_1\wedge u_2.$$

Действительно, подставляя в правую часть этого уравнения функции (3) и учитывая, что

$$\frac{d}{dt}v_i(u_i-t,x_i+t)=-f_i(x_i+t)h_i(u_i-t),\quad x_i\geq 0,\ i=1,2,$$

получаем

$$\rho\int_0^{u_m}f_1(t)h_1(u_1-t)v_2(u_2-t,x_2+t)dt+\rho\int_0^{u_m}f_2(t+x_2)v_1(u_1-t,t)h_2(u_2-t)dt+$$
$$+\rho f_m(x_m+u_m)v_{3-m}(u_{3-m}-u_m,x_{3-m}+u_m)=-\rho\int_0^{u_m}\frac{d}{dt}\big[v_1(u_1-t,t)v_2(u_2-t,x_2+t)\big]dt+$$
$$+\rho v_1(u_1-u_m,u_m)v_2(u_2-u_m,x_2+u_m)=\rho v_1(u_1,0)v_2(u_2,x_2)=\rho h_1(u_1)v_2(u_2,x_2)=$$
$$=\rho(1(0,1)(0,x_2)(u_1,u_2)).$$

Зная стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n,n\geq 0\}$, а также среднее время пребывания системы в состояниях, которое определяется формулами

$$M\theta_{i(d_1,d_2)(x_1,x_2)^{(i)}(u_1,u_2)}=\int_0^{x_{3-i}\wedge\bigwedge_{j\in\Omega}(\tau_j-u_j)}\overline{\Psi}_i^{(d_i)}(t)dt,$$

найдем значения функционалов, входящих в формулы (1).

$$\int_{E_-}\rho(dz)P(z,E_+)=\sum_{i=1}^{2}\Bigg[\int_0^{\infty}dx_i\int_0^{\tau_1}du_1\int_0^{\tau_2}\rho\Big((3-i)(0,0)(x_1,x_2)^{(3-i)}(u_1,u_2)\Big)du_2+$$
$$+\int_0^{\infty}dx_i\int_0^{\tau_1}\rho\Big((3-i)(0,2)(x_1,x_2)^{(3-i)}(u_1,\tau_2)\Big)du_1+\int_0^{\infty}dx_i\int_0^{\tau_2}\rho\Big((3-i)(2,0)(x_1,x_2)^{(3-i)}(\tau_1,u_2)\Big)du_2+$$
$$+\int_0^{\infty}\rho\Big(i(2,2)(x_1,x_2)^{(i)}(\tau_1,\tau_2)\Big)dx_{3-i}\Bigg]=\rho\sum_{i=1}^{2}\big(1+H_i(\tau_i)\big)\big(M\beta_i^{p}+M\beta_iH_i(\tau_i)\big).$$

$$\int_{E_-}\rho(dz)m(z)=\rho H_1(\tau_1)H_2(\tau_2)\left[\int_0^\infty \overline{G}_2(x_2)dx_2\int_0^{x_2}\overline{G}_1(t)dt+\int_0^\infty \overline{G}_1(x_1)dx_1\int_0^{x_1}\overline{G}_2(t)dt\right]+$$

$$+\rho H_2(\tau_2)\left[\int_0^\infty \overline{G}_2(x_2)dx_2\int_0^{x_2}\overline{G}_1{}^p(t)dt+\int_0^\infty \overline{G}_1{}^p(x_1)dx_1\int_0^{x_1}\overline{G}_2(t)dt\right]+$$

$$+\rho H_1(\tau_1)\left[\int_0^\infty \overline{G}_1(x_1)dx_1\int_0^{x_1}\overline{G}_2{}^p(t)dt+\int_0^\infty \overline{G}_2{}^p(x_2)dx_2\int_0^{x_2}\overline{G}_1(t)dt\right]+$$

$$+\rho\int_0^\infty \overline{G}_1{}^p(x_1)dx_1\int_0^{x_1}\overline{G}_2{}^p(t)dt+\rho\int_0^\infty \overline{G}_2{}^p(x_2)dx_2\int_0^{x_2}\overline{G}_1{}^p(t)dt=\rho\prod_{i=1}^{2}\left(\mathrm{M}\beta_i^p+\mathrm{M}\beta_i\mathrm{H}_i(\tau_i)\right). \qquad (4)$$

Подмножество работоспособных состояний E_+ содержит 16 состояний, поэтому функционал $\int_{\mathrm{E}_+} m(z)\rho(dz)$ равен сумме 16 интегралов. Покажем, как преобразовать, например, три из них.

$$\int_0^\infty dx_2\int_0^{\tau_1}ds_1\int_0^{\tau_2}\rho\big(1(1,0)(0,x_2)(\tau_1-s_1,u_2)\big)du_2\int_0^{x_2\wedge s_1}\overline{F_1}(t)dt+\int_0^\infty dx_2\int_0^{\tau_2}\rho\big(1(1,0)(0,x_2)(0,u_2)\big)du_2\int_0^{\tau_1\wedge x_2}\overline{F_1}(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty dx_1\int_0^{\tau_1}ds_1\int_0^{\tau_2}\rho\big(2(1,0)(x_1,0)(\tau_1-s_1,u_2)\big)du_2\int_0^{x_1\wedge s_1}\overline{G_2}(t)dt=$$

$$=\int_0^{\tau_1}\overline{F_1}(t)dt\int_t^\infty dx_2\int_0^{\tau_2}\left(\int_t^{\tau_1}\rho\big(1(1,0)(0,x_2)(\tau_1-s_1,u_2)\big)ds_1+\rho\big(1(1,0)(0,x_2)(0,u_2)\big)\right)du_2+$$

$$+\int_0^{\tau_1}\overline{G_2}(t)dt\int_t^\infty dx_1\int_t^{\tau_1}ds_1\int_0^{\tau_2}\rho\big(2(1,0)(x_1,0)(\tau_1-s_1,u_2)\big)du_2=$$

$$=\rho\mathrm{H}_2(\tau_2)\left[\int_0^{\tau_1}\overline{F_1}(t)\big(1+\mathrm{H}_1(\tau_1-t)\big)dt\int_t^\infty\overline{G_2}(x_2)dx_2+\int_0^{\tau_1}\overline{G_2}(t)dt\int_t^{\tau_1}\overline{V_1}(z-t,t)dz\right]=$$

$$=-\rho\mathrm{H}_2(\tau_2)\int_0^{\tau_1}\frac{d}{dt}\left[\int_t^{\tau_1}\overline{G_2}(x_2)dx_2\int_t^{\tau_1}\overline{V_1}(z-t,t)dz\right]dt=\rho\mathrm{M}\beta_2\tau_1\mathrm{H}_2(\tau_2)\,,$$

$$\text{где } \overline{V_1}(z,t)=\int_t^\infty v_1(z,s)ds\,.$$

Проводя аналогичные преобразования с остальными слагаемыми, в результате получаем

$$\int_{\mathrm{E}_+} m(z)\rho(dz)=\rho\left[\tau_1\tau_2+\tau_1\left(\mathrm{M}\beta_2^p+\mathrm{M}\beta_2\mathrm{H}_2(\tau_2)\right)+\tau_2\left(\mathrm{M}\beta_1^p+\mathrm{M}\beta_1\mathrm{H}_1(\tau_1)\right)\right]. \qquad (5)$$

Следовательно, средняя стационарная наработка на отказ T_+, среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент технического использования K_u системы определяются формулами:

$$\mathrm{T}_+=\frac{\tau_1\tau_2+\tau_1\left(\mathrm{M}\beta_2^p+\mathrm{M}\beta_2\mathrm{H}_2(\tau_2)\right)+\tau_2\left(\mathrm{M}\beta_1^p+\mathrm{M}\beta_1\mathrm{H}_1(\tau_1)\right)}{\left(1+\mathrm{H}_1(\tau_1)\right)\left(\mathrm{M}\beta_2^p+\mathrm{M}\beta_2\mathrm{H}_2(\tau_2)\right)+\left(1+\mathrm{H}_2(\tau_2)\right)\left(\mathrm{M}\beta_1^p+\mathrm{M}\beta_1\mathrm{H}_1(\tau_1)\right)},$$

$$\mathrm{T}_-=\frac{\left(\mathrm{M}\beta_1^p+\mathrm{M}\beta_1\mathrm{H}_1(\tau_1)\right)\left(\mathrm{M}\beta_2^p+\mathrm{M}\beta_2\mathrm{H}_2(\tau_2)\right)}{\left(1+\mathrm{H}_1(\tau_1)\right)\left(\mathrm{M}\beta_2^p+\mathrm{M}\beta_2\mathrm{H}_2(\tau_2)\right)+\left(1+\mathrm{H}_2(\tau_2)\right)\left(\mathrm{M}\beta_1^p+\mathrm{M}\beta_1\mathrm{H}_1(\tau_1)\right)},$$

$$\mathrm{K}_u=1-\prod_{i=1}^{2}\frac{\mathrm{M}\beta_i^p+\mathrm{M}\beta_i\mathrm{H}_i(\tau_i)}{\tau_i+\mathrm{M}\beta_i^p+\mathrm{M}\beta_i\mathrm{H}_i(\tau_i)}\,. \qquad (6)$$

 ISBN 7-776-8361-7

Определим средний удельный доход S, приходящийся на единицу календарного времени и средние удельные затраты C, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы. Для этого воспользуемся формулами [7]

$$S = \frac{\int\limits_{\mathrm{E}} m(z)\, f_s(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}} m(z)\rho(dz)}, \qquad C = \frac{\int\limits_{\mathrm{E}} m(z)\, f_c(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}_+} m(z)\rho(dz)},$$

где $f_s(z)$ и $f_c(z)$ функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Пусть c_i^0 - доход в единицу исправного функционирования, c_i и $c_i^p (i=1,2)$ - соответственно плата за единицу времени аварийного восстановления и ТО i-го элемента, тогда нетрудно записать вид функций $f_s(z)$ и $f_c(z)$. Например, выпишем значения этих функций для некоторых состояний:

$$f_s(z) = \begin{cases} c_1^0 + c_2^0, & z \in i(1,1)(x_1, x_2)^{(i)}(u_1, u_2), \\ c_1^0 - c_2, & z \in i(1,0)(x_1, x_2)^{(i)}(u_1, u_2), \\ -c_1 - c_2^p, & z \in i(0,2)(x_1, x_2)^{(i)}(u_1, \tau_2), \end{cases}$$

$$f_c(z) = \begin{cases} 0, & z \in i(1,1)(x_1, x_2)^{(i)}(u_1, u_2), \\ c_2, & z \in i(1,0)(x_1, x_2)^{(i)}(u_1, u_2), \\ c_1 + c_2^p, & z \in i(0,2)(x_1, x_2)^{(i)}(u_1, \tau_2). \end{cases}$$

После преобразований, аналогичным преобразованиям, используемым при выводе формул (4), (5), получаем:

$$S = \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i^0 \tau_i - c_i^p \mathrm{M}\beta_i^p - c_i \mathrm{M}\beta_i \mathrm{H}_i(\tau_i)}{\tau_i + \mathrm{M}\beta_i^p + \mathrm{M}\beta_i \mathrm{H}_i(\tau_i)},$$

$$C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \left(c_i^p \mathrm{M}\beta_i^p + c_i \mathrm{M}\beta_i \mathrm{H}_i(\tau_i)\right)\left(\tau_{3-i} + \mathrm{M}\beta_{3-i}^p + \mathrm{M}\beta_{3-i}\mathrm{H}_{3-i}(\tau_{3-i})\right)}{\tau_1\tau_2 + \sum\limits_{i=1}^{2} \tau_i \left(\mathrm{M}\beta_{3-i}^p + \mathrm{M}\beta_{3-i}\mathrm{H}_{3-i}(\tau_{3-i})\right)}.$$

Оптимизация сроков проведения ТО

Задача определения оптимальных показателей качества функционирования системы сводится к отысканию абсолютных экстремумов функций $K_u(\tau_1, \tau_2)$, $S(\tau_1, \tau_2)$ и $C(\tau_1, \tau_2)$. Приравнивая нулю частные производные этих функций по переменным τ_1 и τ_2, после некоторых преобразований получаем системы уравнений, которым должны соответственно удовлетворять величины наработок τ_i^k, τ_i^s и τ_i^c, $i=1,2$:

$$\tau_i h_i(\tau_i) - \mathrm{H}_i(\tau_i) = \frac{\mathrm{M}\beta_i^p}{\mathrm{M}\beta_i},\ i=1,2, \tag{6}$$

$$\tau_i h_i(\tau_i) - \mathrm{H}_i(\tau_i) + \frac{c_i - c_i^p}{c_i + c_i^0}\mathrm{M}\beta_i^p h_i(\tau_i) = \frac{\mathrm{M}\beta_i^p}{\mathrm{M}\beta_i}\frac{c^p{}_i + c_i^0}{c_i + c_i^0},\ i=1,2, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\left(c_i \mathrm{M}\beta_i\, \tau_i h_i(\tau_i) - c_i^p \mathrm{M}\beta_i^p - c_i \mathrm{M}\beta_i\, \mathrm{H}_i(\tau_i)\right)\left(\tau_{3-i} + \mathrm{M}\beta_{3-i}^p + \mathrm{M}\beta_{3-i}\mathrm{H}_{3-i}(\tau_{3-i})\right)^2 + \\ &+ \left(\mathrm{M}\beta_i\, \tau_i h_i(\tau_i) - \mathrm{M}\beta_i^p - \mathrm{M}\beta_i\, \mathrm{H}_i(\tau_i)\right)\left(c_{3-i}^p \mathrm{M}\beta_{3-i}^p + c_{3-i}\mathrm{M}\beta_{3-i}\mathrm{H}_{3-i}(\tau_{3-i})\right)\times \\ &\times \left(\mathrm{M}\beta_{3-i}^p + \mathrm{M}\beta_{3-i}\mathrm{H}_{3-i}(\tau_{3-i})\right) + \mathrm{M}\beta_i\, h_i(\tau_i)\tau_{3-i}^2\left(c_i - c_i^p\right) = 0, \quad i=1,2. \end{aligned} \tag{8}$$

В случае существования единственных решений этих систем уравнений оптимальные значения показателей качества функционирования системы определяются формулами:

$$\max K_u = 1 - \prod_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{M}\beta_i h_i(\tau_i^k)}{1 + \mathrm{M}\beta_i h_i(\tau_i^k)},$$

$$\max S = \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i^0 - c_i \mathrm{M}\beta_i h_i(\tau_i^s)}{1 + \mathrm{M}\beta_i h_i(\tau_i^s)},$$

$$\min C = \frac{\sum_{i=1}^{2} \left(c_i^p \mathrm{M}\beta_i^p + c_i \mathrm{M}\beta_i \mathrm{H}_i(\tau_i^c)\right)\left(\tau_{3-i}^c + \mathrm{M}\beta_{3-i}^p + \mathrm{M}\beta_{3-i} \mathrm{H}_{3-i}(\tau_{3-i}^c)\right)}{\tau_1^c \tau_2^c + \sum_{i=1}^{2} \tau_i^c \left(\mathrm{M}\beta_{3-i}^p + \mathrm{M}\beta_{3-i} \mathrm{H}_{3-i}(\tau_{3-i})\right)}.$$

Если системы уравнений (6) – (8) имеют несколько решений, оптимальные значения показателей находятся подстановкой каждого из них в формулу для случая единственного решения с последующим выбором наилучшего из них, причем необходимо учесть значение показателей при $\tau_i = \infty$.

Заметим, что для достижения максимальных значений коэффициента технического использования и средней удельной прибыли системы необходимо и достаточно оптимизировать соответствующие суммарные величины наработок на отказ каждого элемента, а оптимизация величин наработки на отказ каждого элемента еще не гарантирует минимальных средних удельных убытков всей системы.

The semi-markov model of maintenance for two-unit parallel system with allowance of age replacement is formulated. The optimal reliability and economical stationary values of system functioning quality are received.

1. Cho D.I., Parlar M. A survey of maintence models for multi-unit systems // Eur.J. Oper.Res. – 1991. – 51. – P.1-23.
2. Dekker R., Wildeman R.E. A review of multi-component maintence models with economic dependence // Math. Methods of Oper.Res. – 1997. – 45. – P.411-435.
3. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.
4. Каштанов В.А., Медведев В.И. Теория надежности сложных систем (теория и практика). – М.: Европейский центр по качеству, 2002. – 470 с.
5. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы Марковского восстановления в задачах надежности систем. – К.: Наук. думка, 1982. – 236 с.
6. Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.И., Турбин А.Ф. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 209 с.
7. Шуренков В.М. Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

 ISBN 7-776-8361-7