УДК 519.3:515.2

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ТЕСТ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ БАЗИСОВ БИКУБИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Козуб Н.А., Манойленко Е.С., Хомченко А.Н.

Постановка проблемы. Проблема модификации базисов конечно-элементных аппроксимаций возникла практически одновременно с появлением метода конечных элементов (МКЭ). Однако существенный прогресс в решении задач оптимизации вычислительных качеств КЭ за счет модификации базисов был достигнут лишь в 60-70 -е годы прошлого столетия совместными усилиями инженеров и математиков. Накопленный опыт обнаружил недостатки традиционного матричного подхода к моделированию КЭ, что стимулировало развитие геометрического конструирования базисов. В результате прямого геометрического конструирования были созданы альтернативные модели КЭ, позволяющие корректно формулировать и успешно решать актуальную задачу оптимизации базисов на основе взвешенного усреднения альтернатив.

Анализ предшествующих публикаций, постановка задачи. Первые содержательные результаты, связанные с моделированием и применением четырехугольных КЭ, были получены в 1966 г. (Ergatoudis J.). Настойчивые попытки исключить внутренние узлы лагранжевой интерполяции привели к появлению [1,2] очень полезных, но плохо поддающихся формализации, КЭ серендипова семейства (Irons B., Ergatoudis J., Zienkiewicz O.). Вскоре стало ясно, в особенности, после появления гексагональных КЭ, что возможности матричной алгебры в дискретных аппроксимациях явно недостаточны. В МКЭ стали проникать геометрические приемы построения интерполяционных базисов [3]. Именно благодаря геометрическому моделированию впервые удалось найти альтернативные базисы серендиповых КЭ [4,5]. Было установлено, что альтернативы существуют только на КЭ высших порядков (начиная с третьего). В работе предпринята попытка на примере серендипова КЭ с 12 узлами продемонстрировать возможность управлять формой бикубической поверхности в пределах носителя так, чтобы исключить нарушения в граничных условиях. Это означает, что различные модификации КЭ можно ансамблировать без риска нарушить межэлементную непрерывность.

Цель статьи – показать преимущества геометрического моделирования и протестировать некоторые модификации базисов бикубической интерполяции.

Основная часть. Серендипов КЭ бикубической интерполяции представляет собой квадрат $\left(|\xi| \le 1, |\eta| \le 1\right)$ с 12 регулярно расположенными граничными узлами (рис.1).

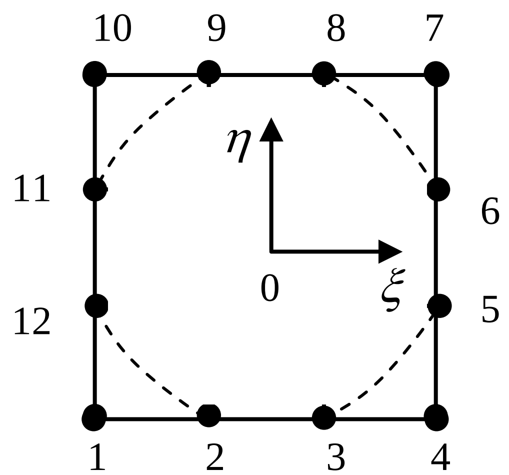

Рис.1 Серендипов КЭ бикубической интерполяции.
Линия нулевого уровня модели с параболоидом вращения.

Из литературных источников [1,2,6] известно, что его единственный базис, найденный подбором, имеет вид:

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{32}\left(1+\xi_i\xi\right)(1+\eta_i\eta)(9(\xi^2+\eta^2)-10)\ \text{для угловых узлов}\ i=1,4,7,10,\ \ \xi_i\eta_i=\pm1.$$

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{9}{32}(1-\eta^2)\left(1+\xi_i\xi\right)(1+9\eta_i\eta)\ \text{для}\ i=5,6,11,12,\ \xi_i=\pm1,\ \eta_i=\pm\frac{1}{3}.$$

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{9}{32}(1-\xi^2)\left(1+\eta_i\eta\right)(1+9\xi_i\xi)\ \text{для}\ i=2,3,8,9,\ \eta_i=\pm1,\ \xi_i=\pm\frac{1}{3}.$$

Геометрический анализ приведенного базиса показывает, что бикубические поверхности $N_i(\xi,\eta)$ состоят из плоскостей и поверхностей 2-го порядка. Наиболее содержательны угловые функции. Они влияют на четыре соседних КЭ, в отличие от промежуточных, влияющих лишь на два КЭ. Естественно, что угловые функции определяют названия моделей. Например, составляющими поверхности $N_1(\xi,\eta)$ являются гиперболический параболоид (гипар) $Z_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$ и параболоид вращения $W_1=\frac{1}{8}(9(\xi^2+\eta^2)-10)$.

На рис.1 пунктиром показана линия нулевого уровня поверхности $N_1(\xi,\eta)$ - окружность. Это след пересечения плоскости КЭ с параболоидом вращения. Поэтому приведенная система функций названа моделью с параболоидом вращения (ПВ). Легко заметить, что поверхность $N_2(\xi,\eta)$ составлена из параболического цилиндра $Z_2=\frac{9}{8}(1-\xi)^2$ и двух плоскостей $W_2=\frac{1}{2}(1-\eta)$ и $V_2=\frac{1}{2}(1-3\xi)$. Примечательно, что возможны и другие композиции. В этом основное преимущество геометрического моделирования. Здесь уместно отметить исключительную роль гипара, без которого не обходится ни одна композиция серендипова семейства.

Можно построить еще одну модель бикубической интерполяции, если в $N_1(\xi,\eta)$ параболоид вращения заменить параболическим цилиндром $W_1=\frac{1}{8}(9(1+\xi+\eta^2)-1)$, который проходит через узлы 2,3,11,12 и точку (-1;-1;1). Образующая параболического цилиндра параллельна диагонали 4-10 КЭ. На рис.2 показаны линии пересечения параболического цилиндра с плоскостью КЭ.

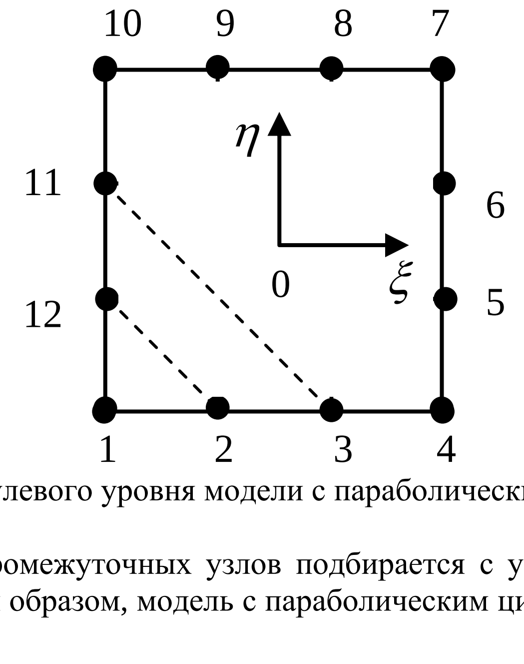

Рис.2 Линии нулевого уровня модели с параболическим цилиндром

Композиция для промежуточных узлов подбирается с учетом интерполяционной гипотезы Лагранжа. Таким образом, модель с параболическим цилиндром (ПЦ) состоит из следующих функций:

 ISBN 7-776-8361-7

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{32}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(9(1-\xi_i\xi-\eta_i\eta)^2-1),\ \mathrm{i}=1,4,7,10,\ \xi_i,\eta_i=\pm1;$$

$$\mathrm{N}_i(\xi,\eta)=\frac{9}{32}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(9\xi_i\xi+\eta_i\eta),\ \mathrm{i}=2,3,8,9,\ \eta_i=\pm1,\ \xi_i=\pm\frac{1}{3}.$$

Чтобы получить $\mathrm{N}_i(\xi,\eta)$ для остальных промежуточных узлов достаточно в последней формуле переставить ξ и η.

Сравнение моделей ПВ и ПЦ показывает, что последняя «скрывает» тринадцатый параметр $\xi^2\eta^2$, который в комбинированных моделях способен количественно и качественно изменять аппликаты бикубических поверхностей. Комбинированная модель получается взвешенным усреднением каких-либо двух исходных моделей по формуле

$$N_i^{(k)}(\xi,\eta)=\alpha N_i^{(ПВ)}(\xi,\eta)+(1-\alpha)N_i^{(ПЦ)}(\xi,\eta).$$

С помощью весового коэффициента $\alpha(0\le\alpha\le1)$ можно регулировать качество интерполяции. Усреднение, как правило, улучшает качество модели. В математическом моделировании найдется множество примеров, подтверждающих этот тезис. Здесь мы приведем пример модифицированного базиса бикубической интерполяции [7], полученного в результате арифметического $(\alpha=0{,}5)$ усреднения моделей ПВ и ПЦ:

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{32}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(9\xi^2+9\eta^2+9\xi_i\xi\eta_i\eta-9\xi_i\xi-9\eta_i\eta-1),\ i=1,4,7,10,\ \xi_i,\eta_i=\pm1;$$

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{9}{64}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(18\xi_i\xi+\eta_i\eta+1),\ i=2,3,8,9,\ \eta_i=\pm1,\ \xi_i=\pm\frac{1}{3}.$$

Проведенные исследования [8] подтверждают улучшение качества бикубической интерполяции при арифметическом усреднении ПВ и ПЦ. Интересный результат получен в компьютерных экспериментах [9] при смешивании моделей ПВ и ПЦ в различных пропорциях. Постепенное увеличение доли тринадцатого параметра приводит к сжатию параболоида вращения вдоль диагонали КЭ, содержащей «собственный» узел $N_i(\xi,\eta)$ и одновременному смещению полученного эллиптического параболоида (ЭП) к «собственному» узлу. На рис.3 показана линия нулевого уровня (эллипс) модели ЭП. В диапазоне $(0<\alpha<1)$ существует бесчисленное множество моделей ЭП, которые мы будем различать по коэффициенту сжатия эллипса в нулевом уровне: $k=b/a$, где $2b$ - малая ось, $2a$ - большая ось эллипса.

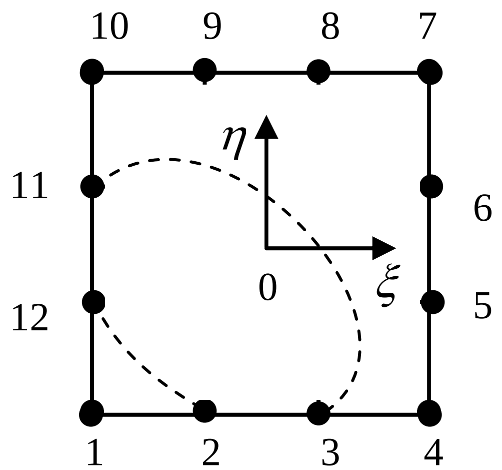

Рис.3 Линия нулевого уровня модели с эллиптическим параболоидом

Вершина эллиптического параболоида находится в точке $(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{2})$. Коэффициент сжатия $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Поэтому данную модель мы обозначили так: ЭП - $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ниже эта модель будет использована в новой комбинации.

Для создания модифицированных базисов мы используем еще одну модель бикубической интерполяции, которая получена геометрически. Здесь, кроме стандартного гипара, присутствующего в любой «угловой» композиции, используется оригинальный гипар, образующий в нулевом уровне две пересекающиеся прямые (рис.4).

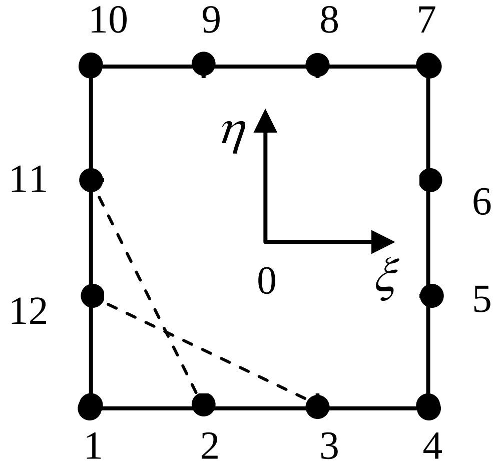

Рис.4 Линии нулевого уровня модели ГП.

Эта модель, названная нами ГП, состоит из следующих функций формы:

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{64}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(5-3\xi_i\xi-6\eta_i\eta)(5-6\xi_i\xi-3\eta_i\eta),\ i=1,4,7,10,\ \xi_i,\eta_i=\pm1;$$

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{9}{128}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(36\xi_i\xi+5\eta_i\eta-1),\ i=2,3,8,9,\ \eta_i=\pm1,\ \xi_i=\pm\frac{1}{3}.$$

Результатом арифметического усреднения модели ПВ и модели ГП явилась модель ЭП-$\frac{\sqrt{39}}{13}$ с базисом:

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{128}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(36\xi^2+36\eta^2+45\xi_i\xi\eta_i\eta-45\xi_i\xi-45\eta_i\eta+5),\ i=1,4,7,10,$$

$$\xi_i,\eta_i=\pm1;$$

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{9}{256}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(3+72\xi_i\xi+5\eta_i\eta),\ i=2,3,8,9,\ \eta_i=\pm1,\ \xi_i=\pm\frac{1}{3}.$$

Если же теперь арифметически усреднить модели ЭП - $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и ЭП - $\frac{\sqrt{39}}{13}$, то получим модель ЭП - $\frac{\sqrt{7}}{5}$ с базисом:

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{256}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(72\xi^2+72\eta^2+81\xi_i\xi\eta_i\eta-81\xi_i\xi-81\eta_i\eta+1),\ i=1,4,7,10,$$

$$\xi_i,\eta_i=\pm1;$$

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{9}{512}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(7+144\xi_i\xi+9\eta_i\eta),\ i=2,3,8,9,\ \eta_i=\pm1,\ \xi_i=\pm\frac{1}{3}.$$

ISBN 7-776-8361-7

Будем называть ЭП - $\frac{\sqrt{3}}{3}$ - модель 1, ЭП - $\frac{\sqrt{39}}{13}$ - модель 2, ЭП - $\frac{\sqrt{7}}{5}$ - модель 3.

Модифицированные базисы использованы для построения температурного поля пластины с граничными условиями Дирихле по формуле:

$$T(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{12} N_i(\xi,\eta)\cdot T_i,$$

где T_i - известные температуры в граничных узлах. Значения температуры в 9 внутренних контрольных точках $A_j\,(j=\overline{1,9})$ сопоставляются с точным решением. За точное решение принято решение МКР на сетке с 256 ячейками, полученное методом Гаусса и подтвержденное итерациями Либмана. Для каждой модификации вычисляется среднее квадратичное отклонение от точного решения. Результаты вычислений для двух задач с различными ГУ представлены в таблицах 1-4.

Таблица 1

Граничные условия Дирихле для температурного поля пластины

$\eta=-1$	$\xi=1$	$\eta=1$	$\xi=-1$
$T=30\cos\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\xi\right)$	$T=15(1+\eta)$	$T=\frac{30}{4}(\xi+1)^2$	$T=30\cos\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\eta\right)$

Результаты вычислений показаны в таблице 2.

Таблица 2

Сравнение результатов моделирования температурного поля пластины

Точка	A_1 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	A_2 $(0;-\frac{1}{2})$	A_3 $(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$	A_4 $(-\frac{1}{2};0)$	A_5 $(0;0)$	A_6 $(\frac{1}{2};0)$	A_7 $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$	A_8 $(0;\frac{1}{2})$	A_9 $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$
Точное решение	22,715	18,217	13,103	17,705	15,999	15,258	11,014	12,871	16,917
Приближенная температура в точке A_j									
1 модель	24,532	19,429	13,495	18,489	16,148	14,814	10,682	11,977	15,904
2 модель	24,3597	19,289	13,323	18,349	15,974	14,614	10,509	11,837	15,672
3 модель	24,446	19,359	13,409	18,419	16,061	14,714	10,596	11,907	15,788

Среднее квадратичное отклонение $\delta=0{,}981$, $\delta=0{,}975$, $\delta=0{,}974$ соответственно для 1, 2 и 3 моделей.

Таблица 3

Граничные условия Дирихле для температурного поля пластины

$\eta=-1$	$\xi=1$	$\eta=1$	$\xi=-1$
$T=\frac{25}{2}(1-\xi^2)$	$T=\frac{20}{8}(1+\eta)^3$	$T=20$	$T=10(1+\eta)$

Результаты вычислений показаны в таблице 4.

Таблица 4

Сравнение результатов моделирования температурного поля пластины

Точка	A_1 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	A_2 $(0;-\frac{1}{2})$	A_3 $(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$	A_4 $(-\frac{1}{2};0)$	A_5 $(0;0)$	A_6 $(\frac{1}{2};0)$	A_7 $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$	A_8 $(0;\frac{1}{2})$	A_9 $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$
Точное решение	8,766	9,754	6,873	11,244	11,031	8,345	15,268	14,835	12,983
Приближенная температура в точке A_j									
1 модель	10,159	11,092	7,775	11,876	11,254	8,127	15,003	13,906	11,723
2 модель	9,983	10,860	7,635	11,640	10,942	7,891	14,819	13,670	11,545
3 модель	10,071	10,976	7,705	11,758	11,098	8,009	14,911	13,788	11,634

Среднее квадратичное отклонение $\delta = 0{,}972$, $\delta = 0{,}954$, $\delta = 0{,}956$ соответственно для 1, 2 и 3 моделей.

Выводы. Наличие альтернативних базисов и принцип взвешенного усреднения открывают широкие возможности для экспериментирования в поисках улучшенных аппроксимаций. Комбинирование бикубических поверхностей чаще всего дает модели с эллиптическим параболоидом (ЭП). Понятно, что качество таких моделей зависит не только от коэффициента сжатия ЭП, но и от граничных условий. Есть предположение, что независимо от ГУ лучшие модели следует искать в небольшой окрестности $k = 0{,}5$. Представляет интерес попытка найти зависимость между коэффициентом сжатия k и весовым коэффициентом α, по крайней мере, для конкретной пары прототипов.

New models bicubic interpolation are presented. For testing computing properties of model the weighed averaging boundary temperatures on a square plate is used.

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
3. Wachspress E.L. A rational finite element basis. – Academic Press. – New York, 1975. – 216 p.
4. Хомченко А.Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных // III Респ. симпозиум по диффер. и интегр. уравнениям: Тез. докл. – Одесса, 1982. – С.257-258.
5. Хомченко А.Н. О модификации серендиповых элементов /Ив.- Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1983. – 4 с. Деп. в ВИНИТИ 4.07.83, №3643.
6. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
7. Хомченко А.Н., Камаева Л.И. О моделировании конечных элементов серендипова семейства// Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюзн. межвуз. сб./ Горький: ГГУ, 1985. – С. 14-17.
8. Манойленко Е.С. Модели конечных элементов для расчетов температурных полей// Сборник научных трудов Херсонского филиала Украинского государственного морского технического университета. Выпуск 1 – Херсон: ХФ УДМТУ, – 2003. – С. 62-68.
9. Козуб Н.А. Модели неклассических серендиповых базисов// Тези доп. IV міжн. н/п конф. «Математичне та прогр. забезпечення інтел. систем. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – С. 79-80.

ISBN 7-776-8361-7