

Кузло М. Т. канд. техн. наук

## МОДЕЛЮВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНИХ ЗМІЩЕНЬ ГРУНТОВОГО МАСИВУ В ПРОЦЕСІ ЙОГО ОСУШЕННЯ

**Анотація.** У статті виконано математичне моделювання вертикальних зміщень ґрунтового масиву в процесі його осушення. Достовірність отриманих розв'язків підтверджено на конкретному прикладі. Чисельний експеримент проведено після повної стабілізації рівня ґрунтових вод, тобто коли пройшло повне осушення ґрунтового масиву.

**Ключові слова:** вертикальні зміщення, ґрунтовий масив, осушення, математична модель.

**Аннотация.** В статье выполнено математическое моделирование вертикальных смещений ґрунтового массива в процессе его осушения. Достоверность полученных решений подтверждено на конкретном примере. Чисельный эксперимент проведено после полной стабилизации уровня ґрунтовых вод, то есть когда произошло полное осушения ґрунтового массива.

**Ключевые слова:** вертикальные смещения, ґрунтовый массив, осушения, математическая модель.

**Annotation:** In the article the mathematical modeling of soil massif's vertical displacements in the process of its drainage has been carried out . The validity of obtained solutions has been confirmed on the concrete example. The numerical experiment has been carried out after complete stabilization of soil water level, the complete drainage of soil massif has been accomplished.

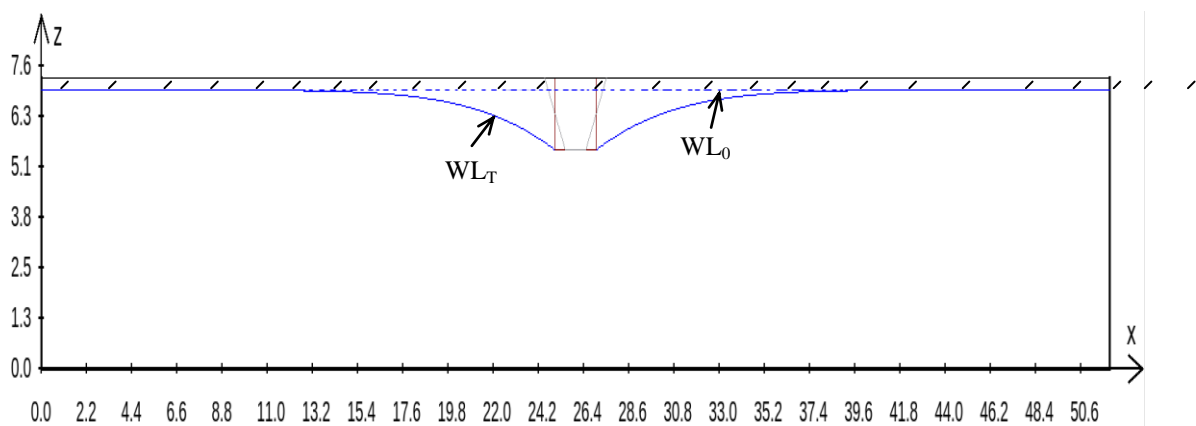
**Keywords:** vertical displacements, soil massif, drainage, mathematical modeling.

Для осушення значних територій від розміщення високого рівня ґрунтових вод дуже часто доводиться влаштовувати різноманітні дренажні системи або канали. Особливо це питання є актуальним при влаштуванні ґрунтових насипів та штучних споруд на водонасичених ґрунтах.

Аналіз останніх досліджень показав, що існує ряд теоретичних рішень з визначення напружено-деформованого стану водонасичених ґрунтових масивів [1]. Однак, питання з визначення вертикальних зміщень водонасичених ґрунтових масивів, недостатньо вивчено.

Метою роботи є визначення деформацій водонасичених ґрунтових масивів при їх осушенні і відповідних їм вертикальних зміщень поверхні землі.

Для встановлення вертикальних зміщень поверхні ґрунтового масиву в процесі його осушення були виконані чисельні дослідження. За розрахункову схему прийнятий ґрунтовий масив, у якому влаштований осушувальний канал (рис. 1).



**Рисунок 1** – Розрахункова схема ґрунтового масиву

Рівняння фільтраційного потоку на момент осушення ґрунтового масиву запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

де  $H(x, z)$  – напір води в точці  $(x, z)$  ґрунтового масиву.

Математична модель задачі в зміщеннях на момент часу  $t$  (момент часу, коли поверхня ґрунтових вод опуститься на рівні дна каналу) в області нижче рівня ґрунтових вод  $\Omega_t = \{(x, z) | x \in (0, r), z \in (0, h(x, t))\}$  описується наступними диференціальними рівняннями [2]:

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\mu\Delta w + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z} \quad (7.3)$$

при таких граничних умовах

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad (4)$$

$$u(0, z) = 0, \quad u(r, z) = 0, \quad (5)$$

$$\tau_{xz}(0, z) = 0, \quad \tau_{xz}(r, z) = 0, \quad (6)$$

$$R_x(x, l_1(x)) = 0, \quad R_z(x, l_1(x)) = \gamma_n(l_1(x) - l(x)). \quad (7)$$

Тут  $h(x, t)$  – висота розміщення ґрунтових вод у момент часу  $t$ ;  $H(x, z)$  – напір у точці  $(x, z)$  у момент часу  $t$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\lambda, \mu$  – пружні сталі;  $u(x, z)$  – горизонтальні, а  $w(x, z)$  – вертикальні зміщення точки, яка у момент  $t$  знаходиться в точці  $(x, z)$ ;  $\gamma_w = \rho_w g$  – питома вага води;  $\gamma_{sb}$  – питома вага ґрунту в насиченому стані  $\tau_{xz}$  – дотичні напруження;  $R_x(x, z), R_z(x, z)$  – горизонтальна та вертикальна складові вектора напружень;  $l_1(x)$  – рівень ґрунтових вод;  $l(x)$  – шукана висота (глибина) ґрунтового масиву в момент часу  $t$ ;  $\gamma_n$  – питома вага ґрунту в природному стані.

Загальна ширина області, що розглядається  $r$ . Горизонтальна координата початку каналу  $a$ , кінця  $b$ . Тоді ширина каналу рівна  $b - a$ .

Для того, щоб знайти зміщення у ґрунтовому масиві, необхідно знати напори в усіх точках масиву в початковий та кінцевий моменти часу. Для визначення напорів в області  $\Omega_t$  знайдемо розв'язок диференціального рівняння стаціонарної фільтрації (1) при таких граничних умовах:

$$H(0, z) = H_0(z), \quad H(r, z) = H_r(z), \quad (8)$$

$$\frac{\partial H(x,0)}{\partial z} = 0, \quad H(x, h(x,t)) = h(x,t), \quad (9)$$

де  $H_0(z), H_r(z)$  – напори на лівій та правій межі ґрунтового масиву (відомі функції).

Отримаємо розв'язок задачі (1), (8), (9). Для цього здійснимо чисельне конформне відображення області  $\Omega_t = \{(x, z) | x \in (0, r), z \in (0, h(x,t))\}$  на параметричний прямокутник у площині  $\xi, \eta$  [3].

Відображення здійснюємо таким чином: задаємо  $h_\xi$  – крок сітки по  $\xi$ ,  $h_\eta$  по  $\eta$ . Для покращення збіжності при побудові конформної сітки вибираємо  $h_\xi = h_\eta$ .

$$\Gamma_1 : z = 0 \Rightarrow \eta = 0,$$

$$\Gamma_2 : z = h(x,t) \Rightarrow \eta = b,$$

$$\Gamma_3 : x = 0 \Rightarrow \xi = 0,$$

$$\Gamma_4 : x = r \Rightarrow \xi = a,$$

$$n = \frac{r}{h_\xi}, \quad m = \frac{h_{av}}{h_\eta},$$

де  $n$  – кількість кроків по  $\xi$ ,  $m$  – кількість кроків по  $\eta$ ,  $h_{av} = \frac{\int_0^r h(x,t) dx}{r}$  –

середній рівень ґрунтових вод.

Алгоритм побудови гідродинамічної сітки, згідно методу чисельного конформного відображення, полягає в наступному. Спочатку задаємо початкові значення координат плаваючих вузлів на сторонах параметричного прямокутника  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4$ .

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x_{i0} = ih_\xi, \\ z_{i0} = 0; \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2 : \begin{cases} x_{im} = ih_\xi, \\ z_{im} = h(x_{im}, t); \end{cases}$$

$$\tilde{A}_3 : \begin{cases} x_{0j} = 0, \\ z_{0j} = \frac{h(0,t)}{m} j; \end{cases}$$

$$\tilde{A}_4 : \begin{cases} x_{nj} = r, \\ z_{nj} = \frac{h(r,t)}{m} j. \end{cases}$$

Обчислюємо початкові координати внутрішніх вузлів різницевої сітки, використовуючи формули

$$\begin{cases} x_{ij}^0 = \frac{1}{2}(x_{i0} + x_{im}), \\ z_{ij}^0 = \frac{1}{2}(z_{0j} + z_{nj}), i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

Уточнюємо координати внутрішніх вузлів сітки, використовуючи метод послідовної верхньої релаксації

$$\begin{cases} x_{ij}^{k+1} = \frac{\omega}{4}(x_{i-1,j}^{k+1} + x_{i+1,j}^k + x_{i,j-1}^{k+1} + x_{i,j+1}^k) + (1-\omega) \cdot x_{i,j}^k, \\ z_{ij}^{k+1} = \frac{\omega}{4}(z_{i-1,j}^{k+1} + z_{i+1,j}^k + z_{i,j-1}^{k+1} + z_{i,j+1}^k) + (1-\omega) \cdot z_{i,j}^k, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, \end{cases}$$

де 
$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}, \quad \rho = \frac{\left( \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m} \right)}{2}.$$

Уточнюємо координати “плаваючих” вузлів на межах.

$$\tilde{A}_1 : \begin{cases} x_{i0} = \frac{1}{3}(-x_{i2} + 4x_{i1}), \\ z_{i0} = 0; \end{cases}$$

$$\tilde{A}_2 : \begin{cases} x_{im} = (z_{i-1,m} - z_{i+1,m}) \frac{3y_{im} - 4y_{i,m-1} + y_{i,m-2}}{x_{i+1,m} - x_{i-1,m}} + \frac{1}{3}(4x_{i,m-1} - x_{i,m-2}), \\ p_{im} = \min \{ \max \{ x_{im}, 0 \}, r \}, \\ z_{im} = \max \{ h(p_{im}, t), 0 \}, \end{cases}$$

де величина  $p_{im}$  вводиться для того, щоб можна було задавати функцію  $h$ , визначену по змінній  $x$  лише на відрізку  $[0, r]$ .

$$\tilde{A}_3 : \begin{cases} x_{0j} = 0, \\ z_{0j} = \frac{1}{3}(-z_{2,j} + z_{1,j}); \end{cases}$$

$$\tilde{A}_4 : \begin{cases} x_{nj} = r, \\ z_{nj} = \frac{1}{3}(-z_{n-2,j} + 4z_{n-1,j}). \end{cases}$$

Почергове уточнення координат внутрішніх та “плаваючих” вузлів проводимо до тих пір, поки середня відстань між попередніми та поточними точками сітки  $S$  більша від заданої точності  $\varepsilon$ .

$$S = \frac{1}{nm} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{(x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k)^2 + (y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^k)^2}.$$

Чисельний розв’язок крайової задачі (1), (8), (9) отримаємо шляхом побудови на сітці параметричного прямокутника в площині  $\xi, \eta$  різницевої схеми з використанням шаблону типу “хрест” та розв’язання її ітераційним методом послідовної верхньої релаксації.

Розв’яжемо задачу (2) - (7). Виразимо напруження через зміщення

$$\tau_{xz} = \mu \varepsilon_{xz} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (10)$$

Згідно (6),  $u|_{x=0} = u|_{x=r} = 0$ , тому  $\frac{\partial u}{\partial z}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial z}|_{x=r} = 0$ , отже, (7) набуде вигляду

$$\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=r} = 0. \quad (11)$$

Мають місце формули

$$R_x = \sigma_x n_x + \tau_{xz} n_z, \quad R_z = \tau_{zx} n_x + \sigma_z n_z, \quad (12)$$

де  $n_x, n_z$  – напрямні косинуси вектора нормалі до верхньої межі  $\Omega_1$ , а саме:

$$n_x = -\sin \alpha, \quad n_z = \cos \alpha, \quad \text{де } \alpha = \arctg(l_1'(x)).$$

Врахувавши (12) і виразивши напруження через зміщення, із (8) отримаємо

$$\left( n_x \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \right) + n_z \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \Big|_{z=l_1} = 0, \quad (13)$$

$$\left( n_x \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + n_z \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \Big|_{z=l_1} = \gamma_n (l_1(x) - l(x)). \quad (14)$$

У початковий момент часу рівень поверхні ґрунту відомий – заданий функцією  $l(x,0)$ . У момент часу  $t_1$   $l$  залежить від початкового рівня поверхні, зміщень відносно початкового рівня.

$$l(x, t_1) = l(x, 0) + w_1(x, l_1(t_1)) + h_1, \quad (15)$$

$$\text{де } w_1(x, l_1(t_1)) = w_1(x, l_1(t_1)) - \left( w_0(x, l_1(t_1)) - w_1(x, l_1(t_1)) \frac{dw_0(x, l_1(t_1))}{dz} \right).$$

(16)

Тут  $w_0(x, l_1(t_1))$ ,  $w_1(x, l_1(t_1))$  – вертикальні зміщення, знайдені в результаті розв'язку задачі (2) - (7) у моменти часу 0 та  $t_1$  відповідно;  $w_1(x, l_1(t_1))$  – вертикальне зміщення в момент часу  $t_1$  відносно початкової поверхні ґрунту.

У рівності (16) зміна положення точки, що розміщена на рівні ґрунтових вод у момент часу  $t_1$  відносно  $t=0$ , врахована за допомогою похідної по вертикальних зміщеннях. Такий підхід дозволяє уникнути додаткових зовнішніх ітерацій, які необхідні при застосуванні пошуку потрібної координати або врахуванні другої похідної по зміщеннях. Оскільки рівняння (16) лінійне, воно може бути включене до системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), тобто алгоритм не ускладнюється. У рівнянні (15) ми нехтуємо впливом горизонтальних зміщень, які значно менші від вертикальних.

Виразивши  $w_1(x, l_1(t_1))$  із рівняння (16), отримаємо

$$w_1(x, l_1(t_1)) = \frac{w_1(x, l_1(t_1)) - w_0(x, l_1(t_1))}{1 - \frac{dw_0(x, l_1(t_1))}{dz}}. \quad (17)$$

У рівнянні (17)  $w_0(x, l_1(t_1))$  та  $\frac{dw_0(x, l_1(t_1))}{dz}$  невідомі, оскільки конформні сітки різні для початкового та кінцевого моменту часу. Для знаходження цих величин використаємо інтерполяцію на конформній сітці при  $t = 0$ .

$$h_1 = \frac{1-\alpha}{\alpha} (l_1(0) - l_1(t_1) + w_1(x, l_1(t_1))) - \text{зміщення осушеного ґрунту у зв'язку із}$$

зміною пористості. Тут  $\alpha = \frac{1+e_0}{1+e_1}$ , де  $e_0$  та  $e_1$  – коефіцієнти пористості водонасиченого ґрунту та ґрунту, що знаходиться у природному стані, відповідно.

Рівняння (15) не застосовується на місці каналу. Натомість тут фіксується поверхня ґрунту і використовується задане рівняння кривої  $l(x, t_1), x \in [a, b]$ .

Для розв'язання задачі (2) - (5), (11), (13) - (15) перейдемо до змінних  $\xi, \eta$  [4]

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{J_1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{J_1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \quad (19)$$

де  $J_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2$  – якобіан оберненого

відображення.



Аналогічні переходи здійснимо також у крайових умовах. Провівши заміну перших і других похідних функцій  $\xi, \eta$  по  $x, z$  через похідні  $x, z$  по  $\xi, \eta$ ; знайшовши похідні  $x, z$  по  $\xi, \eta$  на конформній сітці за допомогою стандартних скінченно-різницевих апроксимацій; замінивши похідні від функцій  $u, w$  по змінних  $\xi, \eta$  їх скінченно-різницевиими аналогами у рівняннях та крайових умовах, отримаємо СЛАР із квадратною матрицею системи. Розв'язавши СЛАР одним із стандартних числових методів (наприклад, модифікованим методом Гауса), знайдемо значення горизонтальних і вертикальних зміщень у кожній точці сітки.

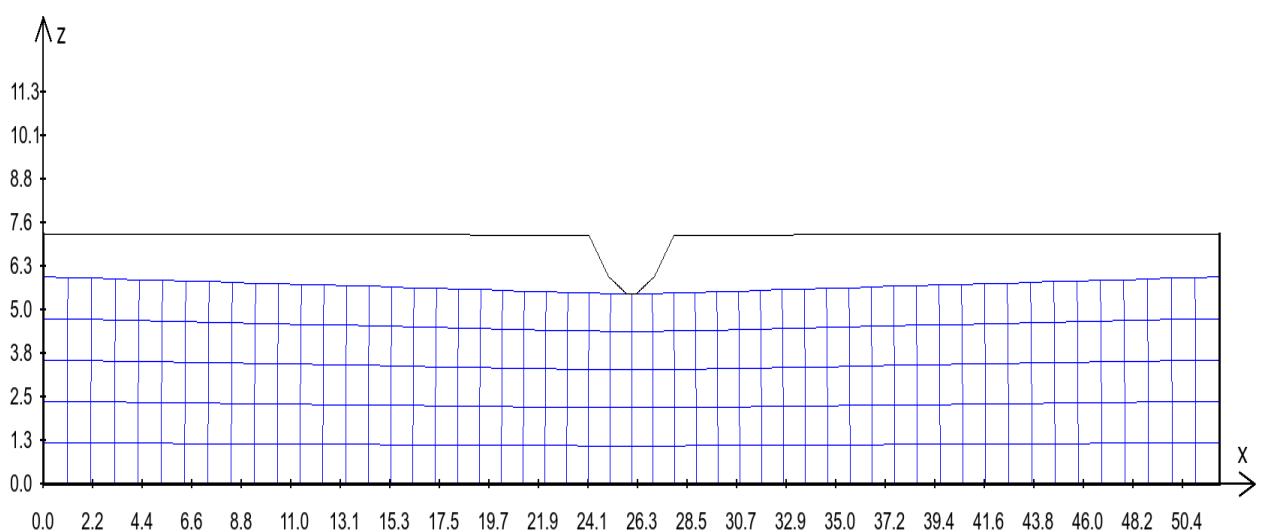
Згідно з описаним алгоритмом, проведено чисельний експерименти при наступних вхідних даних:

$$r = 52\text{м}; \quad a = 25\text{м}; \quad b = 27\text{м}; \quad l(x,0) = 7,3\text{м}; \quad h(x,0) = 7\text{м}; \quad H_0(z)|_{t=0} = 7\text{м};$$

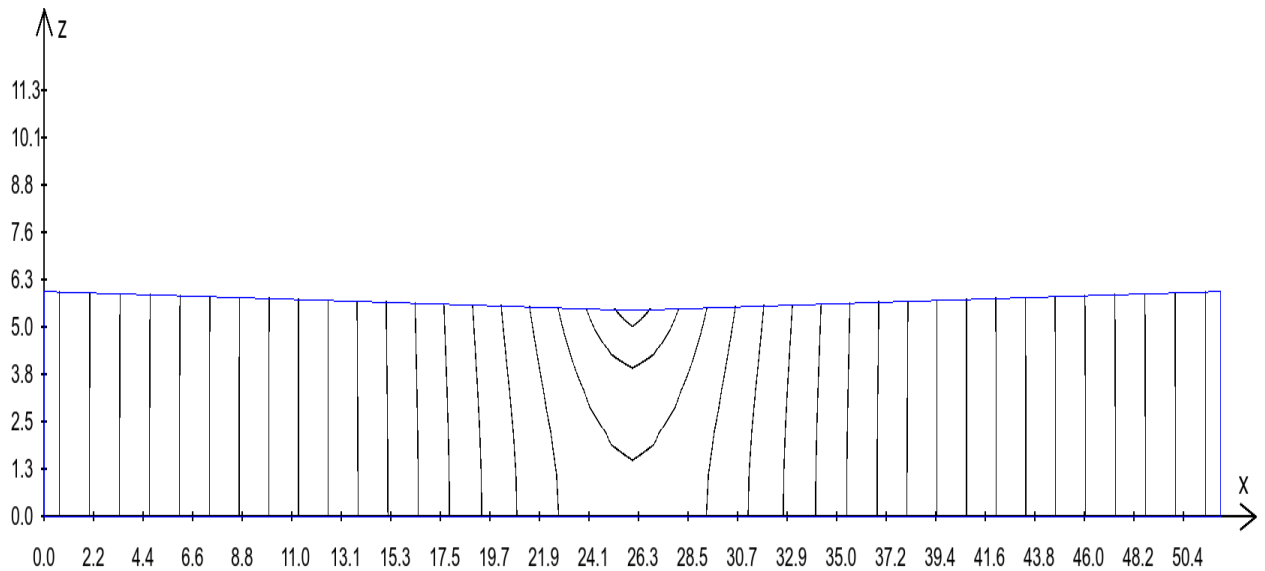
$$H_r(z)|_{t=0} = 7\text{м}; \quad H_0(z)|_{t=t_1} = 6\text{м}; \quad H_r(z)|_{t=t_1} = 6\text{м}; \quad \lambda = 10385\text{КПа}; \quad \mu = 6920\text{КПа};$$

$$e_0 = 0,65; \quad e_1 = 0,55; \quad \gamma_w = 9,8\text{кН/м}^3; \quad \gamma_{sb} = 10,5\text{кН/м}^3; \quad \gamma_n = 16,5\text{кН/м}^3.$$

Гідродинамічна сітка фільтраційного потоку в кінцевий момент часу (момент стабілізації рівня ґрунтових вод) та лінії рівних напорів наведені на рис. 2 і 3.



**Рисунок 2** – Гідродинамічна сітка фільтраційного потоку в кінцевий момент часу (момент стабілізації рівня ґрунтових вод)



**Рисунок 3** – Лінії рівних напорів у кінцевий момент часу

Результати обчислень наведені в таблиці 1. В таблиці 1 наведена висота поверхні ґрунту  $l_t$  в кінцевий момент часу (у початковий момент часу  $l(x,0)=7,3\text{м}$ ).

**Таблиця 1** – Значення зміщень верхньої межі ґрунтового масиву

$x, \text{м}$	0,0000	1,0829	2,1399	3,1895	4,2333	5,2719
$l(x, t_1), \text{м}$	7,2392	7,2380	7,2368	7,2356	7,2344	7,2332
$x, \text{м}$	6,3057	7,3349	8,3595	9,3796	10,3952	11,4064
$l(x, t_1), \text{м}$	7,2320	7,2308	7,2297	7,2285	7,2273	7,2261
$x, \text{м}$	12,4131	13,4153	14,4130	15,4063	16,3952	17,3795
$l(x, t_1), \text{м}$	7,2249	7,2237	7,2225	7,2213	7,2202	7,2190
$x, \text{м}$	18,3594	19,3347	20,3055	21,2716	22,2329	23,1889
$l(x, t_1), \text{м}$	7,2178	7,2166	7,2155	7,2144	7,2133	7,2123
$x, \text{м}$	24,1390	25,0800	26,0004	26,9209	27,8619	28,8120
$l(x, t_1), \text{м}$	7,2116	7,2110	7,21000	7,21080	7,2121	7,2126
$x, \text{м}$	29,7680	30,7293	31,6954	32,6661	33,6415	34,6213

### Кінець таблиці 1

$l(x, t_1), м$	7,2135	7,2145	7,2155	7,2167	7,2178	7,2190
$x, м$	35,6056	36,5944	37,5877	38,5854	39,5876	40,5942
$l(x, t_1), м$	7,2202	7,2213	7,2225	7,2237	7,2249	7,2261
$x, м$	41,6053	42,6209	43,6409	44,6655	45,6946	46,7284
$l(x, t_1), м$	7,2273	7,2285	7,2297	7,2308	7,2320	7,2332
$x, м$	47,7670	48,8107	49,8603	50,9171	52,0000	
$l(x, t_1), м$	7,2344	7,2356	7,2368	7,2380	7,2392	

Чисельний експеримент проведено після повної стабілізації рівня ґрунтових вод, тобто коли пройшло повне осушення ґрунтового масиву.

Висновок. Отримані розв'язки дають можливість визначити вертикальні зміщення поверхні землі водонасиченого ґрунтового масиву в процесі його осушення. Достовірність отриманих розв'язків підтверджено на конкретному прикладі. Подальшими дослідженнями можуть бути отримання відповідних розв'язків для багат шарового ґрунтового масиву.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Иванов П.Л. Ґрунты и основания гидротехнических сооружений. Механика ґрунтов / П.Л. Иванов.– М.: Высш. шк., 1991.– 447 с.
2. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека.– К.: 1991.– 432 с.
3. Власюк А.П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с „плавающими” узлами / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук.– К.: 1989.– 55 с.– (Препр. АН УССР. Ин-т матем, 89.79).
4. Thompson J.F. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies / J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.W. Mastin // J. Comp. Phys.– 1974.– 15.– P. 299-319.