УДК 624.121.54

Кузло М.Т., д-р техн. наук

ПРО ДЕЯКІ АНАЛІТИЧНІ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ПРИ ОСУШЕННІ ГРУНТОВОГО МАСИВУ

Анотація. Отримано аналітичний розв'язок диференціального рівняння нестаціонарної фільтрації при осушенні грунтового масиву. Це дає можливість встановити положення депресійної поверхні в грунтовому масиві у будь-який момент часу при пониженні рівня води в горизонтальних паралельних дренах з різною інтенсивністю.
Ключові слова: грунтовий масив, фільтрація, горизонтальні дрени, депресійна поверхня.

Аннотация. Получены аналитические решения дифференциального уравнения нестационарной фильтрации при осушении грунтового массива. Это даст возможность установить положения депрессионной поверхности в грунтовому массиве в любой момент времени при понижении уровня воды в горизонтальных дренах с различною интенсивностью.
Ключевые слова: грунтовый массив, фильтрация, горизонтальные дрены, депрессионная поверхность.

Annotation. The analytical solution of differential equation of nonstationary filtration under the drainage of soil massif has been obtained. It gives an opportunity to determine the position of depression surface in any time moment under the reduction of water level in horizontal parallel drains with different intensity.
Keywords: soil massif, filtration, horizontal drains, depression surface.

Вступ

Для осушення значних територій від розміщення високого рівня ґрунтових вод часто доводиться влаштовувати різноманітні дренажні системи або канали. Особливо це питання є актуальним при влаштуванні гідромеліоративних осушувальних систем. При цьому виникає необхідність з визначення положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві на будь-який момент часу при пониженні рівня води в горизонтальних дренах або відкритих водотоках з різною інтенсивністю.

Основна частина

Аналіз останніх досліджень показав, що існує ряд теоретичних рішень і розроблених експериментальних методик з визначення положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві при пониженні рівня води в дренажних системах, або відкритих водотоках [1, 2, 3, 4, 5]. Однак, питання з визначення положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві на будь-який момент часу при пониженні рівня води в горизонтальних паралельних дренажних системах з різною швидкістю недостатньо вивчено. Для спрощення рішення поставленої задачі прийняті припущення:

1) розглядається водопроникний однорідний ґрунтовий масив, що розміщений на водонепроникних грунтах;

2) пониження рівня води у відкритих горизонтальних дренах відбувається за лінійним законом зі швидкістю V_0 та V_1.

Необхідно розрахувати положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві у будь-який момент часу при понижені рівня води в горизонтальних паралельних дренах зі швидкістю V_0 та V_l.

Розрахункова схема поставленої задачі наведена на рис. 1.

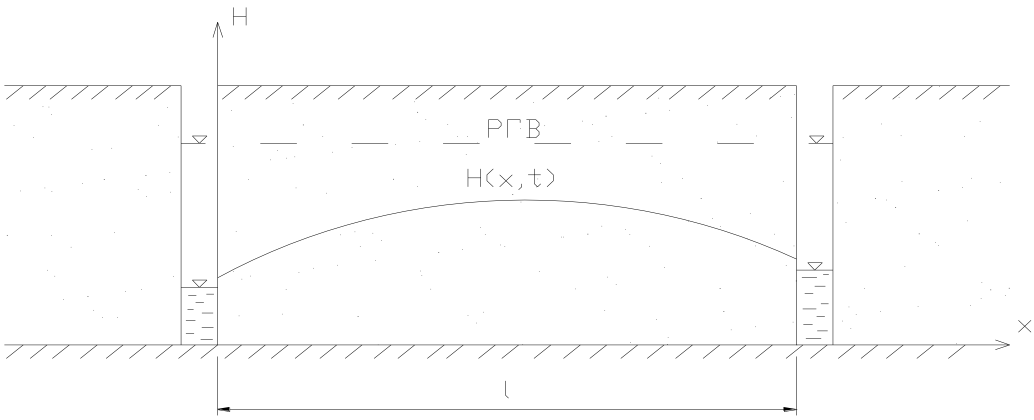

Рисунок 1 – Розрахункова схема динаміки депресійної поверхні в ґрунтовому масиві при пониженні рівня води в горизонтальних дренах

В даному випадку в ґрунтовому масиві виникає нестаціонарний фільтраційний потік, який описується рівнянням

$$\frac{kh}{\mu}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (1)$$

де k - коефіцієнт фільтрації; h – потужність фільтраційного потоку; μ – коефіцієнт водовіддачі.

Відношення $\frac{kh}{\mu}$ називають коефіцієнтом водопровідності, яке можна записати у вигляді a^2. Це означає, що воно завжди має додатне значення. Тоді рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

Крайові умови для визначення положення депресійної поверхні в грунтового масиву при понижені рівня води в горизонтальних дренах за лінійним законом запишуться у вигляді:

$$H(x,0) = H_0(x), \qquad (3)$$

$$H(0,t) = H_0(0) - V_0 t, \qquad (4)$$

$$H(l,t) = H_0(l) - V_l t. \qquad (5)$$

Зведемо однорідне рівняння до неоднорідного, але з однорідними граничними умовами. Для цього проведемо заміну:

$$H(x,t) = u(x,t) + H_0(0) - V_0 t + \frac{H_0(l) - V_l t - (H_0(0) - V_0 t)}{l} x. \qquad (6)$$

Матимемо наступну задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \qquad (7)$$

$$u(x,0) = H_0(x) - H_0(0) - \frac{H_0(l) - H_0(0)}{l} x, \qquad (8)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad (9)$$

де

$$f(x) = V_0 + \frac{V_l - V_0}{l} x. \qquad (10)$$

Позначимо $u(x,0) = \varphi(x)$. Знайдемо розв'язок отриманої крайової задачі [6]:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),\ t > 0,\ x \in (0,l), \qquad (11)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,l], \qquad (12)$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \geq 0. \qquad (13)$$

Згідно принципу редукції, розв'язок задачі (11), (12), (13) будемо шукати у вигляді

$$u(x,t) = z(x,t) + v(x,t), \qquad (14)$$

де $z(x,t)$ є розв'язком задачі

$$z_t(x,t) = a^2 z_{xx}(x,t),\ t > 0,\ x \in (0,l), \qquad (15)$$

$$z(x,0)=\varphi(x),\; x\in[0,l], \tag{16}$$

$$z(0,t)=0,\; z(l,t)=0,\; t\geq 0, \tag{17}$$

а $v(x,t)$ є розв'язком задачі

$$v_t(x,t)=a^2 v_{xx}(x,t)+f(x,t), t>0, x\in(0,l). \tag{18}$$

$$v(x,0)=0,\; x\in(0,l), \tag{19}$$

$$v(0,t)=0,\; v(l,t)=0,\; t\geq 0. \tag{20}$$

Розв'яжемо методом розділення змінних (методом Фур'є) задачу (15) – (17). Будемо вимагати, щоб початкова та граничні умови були не суперечливі, тобто, вони задовольняють умову узгодженості:

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0. \tag{21}$$

Розв'язок крайової задачі (15) – (17) шукаємо у вигляді

$$z(x,t)=T(t)X(x)\neq 0. \tag{22}$$

Підставивши (22) у рівняння (15) і граничні умови (17) та відокремивши змінні, отримаємо рівняння для функції $T(t)$

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{23}$$

та для функції $X(x)$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{24}$$

$$X(0)=0, X(l)=0, \tag{25}$$

де λ – довільна стала.

Як відомо, власними значеннями спектральної задачі (24), (25) є $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\quad n=1,2,...,$ а відповідні власні функції мають вигляд:

$$X_n(x)=C_n\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{26}$$

де $C_n=const.$

Підставивши власні значення λ_n в рівняння (23), одержимо:

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t)=0. \tag{27}$$

Інтегруючи звичайне диференціальне рівняння (27), маємо:

$$\frac{dT_n}{dt}=-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n,$$

$$\frac{dT_n}{T_n}=-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 dt,$$

$$\ln|T_n| = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t + c,$$

$$T_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \qquad (28)$$

де $B_n = e^c = const.$

Згідно (20), функції $z_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x, \ \ n = 1,2,3,\dots,$

де $A_n = C_n \cdot B_n$, задовольняють рівняння (15) та граничні умови (17). В силу лінійності та однорідності рівняння (15) сума частинних розв'язків

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (29)$$

також задовольняє даному рівнянню та граничним умовам (17). Коефіцієнти A_n вибирають так, щоб ряд (29) задовольняв початкову умову (16). Тобто,

$$z(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x). \qquad (30)$$

Нехай, $\varphi(x) \in C^1(0,l)$ і задовольняє умову узгодженості:

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Тоді $\varphi(x)$ розкладається в ряд Фур'є за системою власних функцій $\sin\frac{\pi n}{l}x$ і з (30) отримаємо:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi. \qquad (31)$$

Можна показати, що ряд (29), де A_n визначається за формулою (31), при $\varphi(x) \in C^1([0;l])$, на сегменті $(0,l)$ можна почленно диференціювати довільну кількість разів, як по x, так і по t, причому він визначає неперервну функцію на $[0,l]$. Це обґрунтовує одержаний результат.

Функцію $v(x,t)$, як розв'язок крайової задачі (18) – (20) шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \qquad (32)$$

де $X_n(x)$ є власними функціями задачі (24), (25). Тобто, $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$ (довільні константи покладені рівними одиниці). Ряд (32) задовольняє граничні умови (20). Потрібно вибрати функції $T_n(t)$ таким чином, щоб він також задовольняв рівняння (18) та початкові умови (19).

Припустимо, що функцію $f(x,t)$ можна розкласти в ряд Фур'є за системою власних функцій $\sin\frac{\pi n}{l}x$:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{33}$$

де

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi. \tag{34}$$

Підставляючи ряди (32), (33) у рівняння (18), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x=0,$$

що можливо лише у випадку

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)=0, n=1,2,\ldots \tag{35}$$

Для того, щоб функція $v(x,t)$ задовольняла початкову умову (19) необхідно щоб

$$T_n(0)=0,\ n=1,\ 2. \tag{36}$$

Лінійне звичайне диференціальне рівняння першого порядку (35) розв'яжемо методом Бернуллі. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$T_n(t)=p(t)\cdot\omega(t).$$

Тоді з (35) маємо:

$$p'\cdot\omega+p\cdot\omega'+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 p\cdot\omega=f_n(t),$$

$$p'\cdot\omega+p\left(\omega'+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\omega\right)=f_n(t). \tag{37}$$

Функцію $\omega(t)$ виберемо з

умов :

$$\omega'+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\omega=0,$$

$$\frac{d\omega}{dt}=-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2\omega,$$

$$\frac{d\omega}{\omega}=-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 dt,$$

$$\ln|\omega| = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t + c.$$

Тоді, наприклад, можемо взяти

$$\omega = e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}. \tag{38}$$

Враховуючи (38), з (37) маємо:

$$p' \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} = f_n(t),$$

$$p' = f_n(t) e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t},$$

$$p(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \tau} d\tau + c.$$

Тобто,

$$T_n(t) = \left(\int_0^t f_n(\tau) e^{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \tau} d\tau + c \right) \cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}.$$

З умови (36) маємо:

$$T_n(0) = (0 + c) \cdot 1 = 0 \Rightarrow c = 0. \text{ Тоді: } T_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \tag{39}$$

Враховуючи вищенаведені міркування, з (32) отримаємо:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{40}$$

Отже, розв'язком першої змішаної крайової задачі для неоднорідного параболічного рівняння (11) – (13) є функція:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де A_n, $f_n(\tau)$ визначаються відповідно формулами (31), (34).

У нашому випадку:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n d\tau \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right), \tag{41}$$

де $$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,\ f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx. \quad (42)$$

Функції f_n у нашому випадку мають вигляд:

$$f_n = \frac{2}{\pi n}(V_0 - V_l(-1)^n). \quad (43)$$

Підставивши f_n в отриманий розв'язок та звівши доданки біля $\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, отримаємо:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n}(V_0 - V_l(-1)^n)\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right).$$

Повернувшись до заміни, отримаємо:

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n}(V_0 - V_l(-1)^n)\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right) +$$

$$+ H_0(0) - V_0 t + \frac{H_0(l) - V_l t - (H_0(0) - V_0 t)}{l}x, \quad (44)$$

Після спрощення отримаємо:

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n}(V_0 - V_l(-1)^n)\left(\frac{l}{\pi n a}\right)^2\left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) +$$

$$+ H_0(0) - V_0 t + \frac{h_0(l) - V_l t - (h_0(0) - V_0 t)}{l}x, \quad (45)$$

де $$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l H_0(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx + \frac{2}{\pi n}(-H_0(0) + H_0(l)(-1)^n). \quad (46)$$

Висновок

Аналітичний розв'язок диференціального рівняння нестаціонарної фільтрації у вигляді залежності (45) дає можливість встановити положення депресійної поверхні в грунтовому масиві у будь-який момент часу при пониженні рівня води в горизонтальних паралельних дренах з різною інтенсивністю.

Література

1. Кремез В. С. Моделирование фильтрации грунтовых вод на основе уточнённого уравнения Буссинеска / В. С. Кремез // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: Збірник наукових праць. – Рівне: НУВГП, 2006. – Вип. 31 – С.160 – 165.
2. Хулбарян М. Г. Приблежённое аналитическое решение задачи нестационарной фильтрации со свободной поверхностью / М. Г. Хулбарян, О. О. Юшманов // Водные ресурсы. – 1982. №1. – С.107 – 112.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
4. Genuchten M.T. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils / M.T. Genuchten Soil Sci. Soc. Am. J. – 1980. – 44, №5. – P.892 – 898.
5. Healy R.W. A generalized solution to infiltration from surface point source / R.W. Healy, A.W. Warric Soil. Sci. Soc. – Fv.J. – 1988. – 52. – P.1245 – 1251.
6. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

Рецензенти

В.Я. Савенко, д-р техн. наук, НТУ (Київ),

О.С. Славінська, д-р техн. наук, НТУ (Київ)

Reviewers

V.Ya. Savenko, Dr.Tech.Sci., NTU (Kyiv)

O.S. Slavinska, Dr.Tech.Sci., NTU (Kyiv)