УДК 330.4

**С. А. Рибальченко,**
**асистент кафедри економічної кібернетики,**
**Київський національний університет імені Тараса Шевченка**

# ПРОЦЕС ВИПЛАТ ТА НАДХОДЖЕННЯ ПРЕМІЙ У ВИПАДКУ СТРАТИФІКАЦІЇ ПОРТФЕЛЮ

S. Rybalchenko,
lecturer assistant of economic cybernetic department, Taras Shevchenko National University of Kyiv

## CLAIMS AND PAYMENTS PROCESS IN CASE OF PORTFOLIO STRATIFICATION

**Досліджено найпопулярніші при моделюванні страхового ризику функції розподілу: Лог-нормальний, Парето, Гамма, Вейбулла, Кокса та Бурра. Визначено функції, що характеризують дійсні значення показників діяльності страхової компанії та ризику найбільш точно. Розроблено рекомендації для апроксимації суб'єктивної функції розподілу. Запропоновано деякі варіанти критерію вибору функції розподілу ймовірностей для моделювання страхової діяльності. Аналіз проведено на основі реальних показників діяльності страхової компанії.**

It is considered and analysed most popular at the design of insurance risk of distribution function: Log-normal, Paretto, Gamma, Veibull, Cox and Burr. Functions which describe the actual values of performance of insurance company and risk indicators most exactly are definite. Recommendations are developed for approximation of subjective function of distribution. Some criterion of probability distribution selection for insurance modelling were offered An analysis is conducted on the basis of the real performance of insurance company indicators.

*Ключові слова: функція розподілу, ризик у страхуванні, математичне сподівання, дисперсія, асиметрія, ексцес.*
*Key words: distribution function, risk in insurance, mean, dispersion, asymmetry, excess.*

Фінансові та іміджеві втрати страховиків протягом кризи обумовлюють необхідність у розробленні методологічної бази аналізу цього виду діяльності. На даному етапі провідні страхові компанії України для дослідження своєї діяльності та розробки політики перестрахування користуються послугами європейських компаній, оскільки в нашій країні ще не розроблено дієву методику актуарного аналізу всіх напрямів страхування, яка б могла на рівних конкурувати із західними аналогами. Дана проблема має значну актуальність, свідченням чого є пожвавлення співпраці страхових компаній України із ВНЗ, організація навчання вітчизняних актуаріїв. Зацікавленість українських компаній пояснюється можливістю в майбутньому скоротити свої витрати, через використання значно дешевших послуг українських актуаріїв та українських консалтингових компаній, що опираються на власні розробки.

В умовах непередбачуваної динамічної економіки, що склалася в нашій країні, страхування несе надзвичайно велику суспільну функцію, а саме: робить нас менш безпорадними перед надзвичайними ситуаціями. У зв'язку з тим, що страхові компанії беруть на себе більшість як економічних так і природних ризиків, яким піддаються юридичні та фізичні особи, виникає необхідність постійної оцінки загального ризику діяльності страхової компанії, адже від успішності страхової компанії залежить кожен її


**Рис. 1. Щільність розподілу премій**


**Рис. 2. Щільність розподілу виплат**

клієнт. Тобто клієнтам це дослідження дає можливість обрати найкращу для них страхову компанію, бо ймовірність банкрутства є одним з найвагоміших факторів вибору. А страхові компанії в свою чергу, створюючи двокритеріальну задачу — максимізація прибутку і мінімізація ймовірності банкрутства, зможуть знайти оптимальні параметри діяльності. В розвинених країнах роботи такого напряму є надзвичайно популярними і розповсюдженими. Виникає природна необхідність у апроксимації, вдосконаленню даних моделей та розробці власних.

Предмет дослідження: економіко-математичні моделі розрахунку ймовірності банкрутства страхової компанії, імітаційні моделі.

Об'єкт дослідження: ймовірність краху та політика перестрахування страхової компанії. Загалом же в широкому розумінні об'єктом дослідження є страхування в цілому, як діяльність, що пов'язана з ризиком.

## АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Більшість знавців економіко-математичного моделювання зробили вагомий внесок у розвиток вітчизняних розробок в сфері актуарної математики. Серед них можна виділити: Вітлінський В.В. (вдосконалює методи міри ризиків у страхуванні), Мішура Ю. (застосування стохастичного моделювання), Карташов М. (аналіз процесів Маркова в страхуванні).

Але переважна більшість вітчизняних робіт орієнтується на апроксимацію праць зарубіжних вчених. Широкий спектр проблем страхування вже досліджено за кордоном, найбільша увага приділяється обгрунтуванню вибору функції розподілу ймовірностей для моделювання страхової діяльності. Значний внесок у розвиток актуарної науки та моделювання загалом зробили Е. Слад, К. Бурнецкі, Д. Гренделл, Т. Рольскі, Н. Бауерс , Х. Гербер , І.Т. Балабанов, Г.І. Фалін та інші.

## МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є дослідження властивостей функцій розподілу та вибір оптимальних для моделювання ризиків у страхуванні, вироблення методології апроксимації функції, що забезпечує найбільшу точність при моделюванні ризиків страхової компанії.

Основні завдання роботи:

— прогнозування надходжень(премій) страховиків та перестраховиків;

— прогнозування виплат страхових компаній;

— знаходження оптимальних тарифів перестрахування;

— виокремлення найбільш придатних функцій розподілу ймовірностей для моделювання параметрів страхової діяльності;

— аналіз динаміки ймовірності краху страхових компаній.

## РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Звичайно ж для будь-якої сучасної компанії, не тільки страхової, є надзвичайно важливим планування свої доходів та витрат. Від цього залежать все наступне оперативне і тактичне планування. Крім цього таке моделювання дає можливість відслідковувати взаємозалежності між різними показниками діяльності страхової компанії із доходами та витратами, що в свою чергу є корисним для покращення рівня прибутковості і оптимізації структури витрат.

Кожна величина генерується за певним розподілом, і саме вибір адекватного розподілу є центральною проблемою будь-якої моделі страхової компанії.

Більшість іноземних дослідників у своїх роботах зупиняють свою увагу на такі розподіли:

— Лог-Нормальний розподіл;

— розподіл Паретто;

— Гамма розподіл;

— розподіл Кокса;

— розподіл Вейбулла;

— Розподіл Бурра;

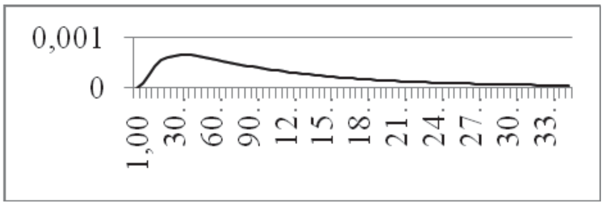


**Рис. 3. Щільність Лог-нормального розподілу**

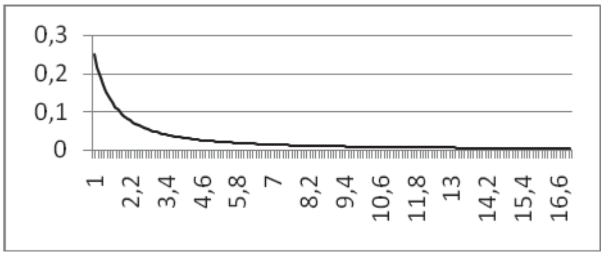


**Рис. 4. Щільність розподілу Паретто**

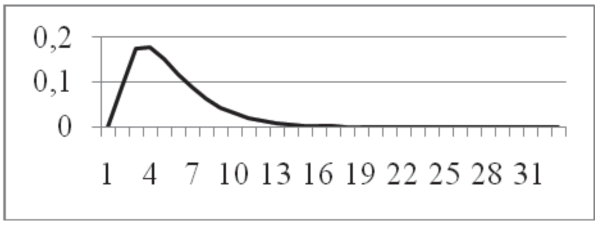


**Рис. 5. Щільність Гама-розподілу**

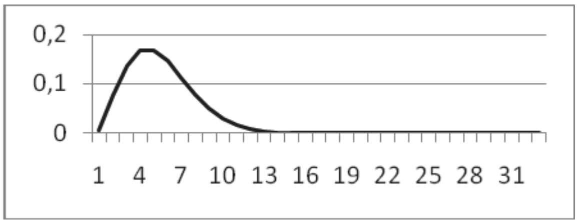


**Рис. 6. Щільність розподілу Вейбула**

Тепер детально розглянемо кожен з зазначених вище розподілів. Також необхідно з'ясувати причину розгляду тільки даних функцій розподілу і виключення інших, наприклад, нормального. Для цього розглянемо дійсні дані за останні шість років діяльності провідних українських компаній. У даній роботі для наглядності будуть наведені вхідні дані та результати для компанії, що входить в першу п'ятірку найбільших страхових компаній України.

Дослідивши основні показники діяльності страхової компанії, а саме величини її премій, тарифів та виплат, отримали такий вигляд гістограми для кожного данного показника:

Отже, щоб генеровані величини були адекватні, потрібно вибрати серед всіх наведених функцій розподілу ймовірностей таку, щільність якої відповідає даним ілюстраціям (рис. 1, 2). Аналізуючи ці діаграми можна так охарактеризувати шукану функцію щільності розподілу: додатньо визначена, значна дисперсія, додатна асиметрія, додатній ексцес, має довгий "хвіст".

Тепер порівняємо відповідність теоретичних розподілів реальним.

Лог-Нормальний розподіл.

Щільність логнормального розподілу має вигляд:

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}} \quad (1).$$

Функція розподілу:

$$F_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{lnx} e^{-\frac{(t-lna)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (2).$$

Величини розподілені по логнормальному закону з параметрами (a, σ), мають нормальний розподіл з параметрами (ln a, σ).

Характеристики логнормального розподілу:

Середнє значення (математичне очікування):

$$M(\eta) = ae^{\frac{\sigma^2}{2}} \quad (3).$$

Мода:

$$Mode(\eta) = ae^{-\sigma^2} \quad (4).$$

Медіана:

$$Median(\eta) = a \quad (5).$$

Графічний вигляд щільності даного розподілу (рис. 3, 4).

Як бачимо, логнормальний розподіл (рис. 3) об'єктивно застосовувати для моделювання параметрів страхування.

Розподіл Паретто.

Щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k*x_m^k}{x^{k+1}}, & x \geq x_m \\ 0, & x < x_m \end{cases} \quad (6).$$

Момент n-го порядку рівний:

$$E[X^n] = \frac{k*x_m^n}{k-n} \quad (7).$$

Графічний вигляд щільності даного розподілу на рис. 4.

Як бачимо, даний розподіл (рис. 4) не об'єктивно застосовувати для моделювання параметрів страхування.

Гамма розподіл

Щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} x^{k-1}\frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k\Gamma(k)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (8),$$

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx \quad (9).$$

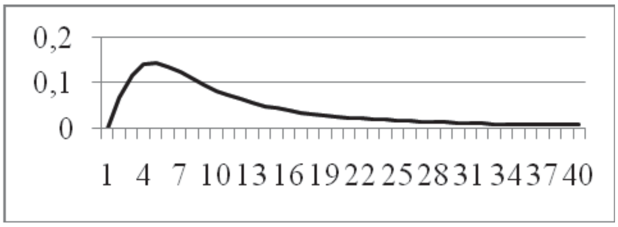


**Рис. 7. Щільність розподілу Бурра**

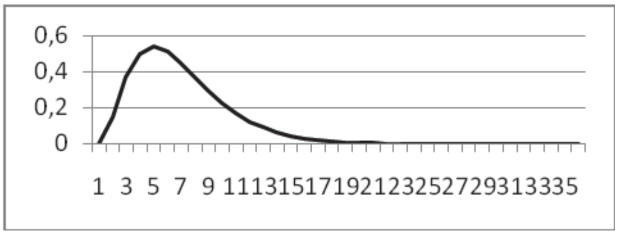


**Рис. 8. Графік функції розподілу**

Моменти:

$$E(X) = k\theta \qquad (10).$$

$$D(X) = k\theta^2 \qquad (11).$$

Графічний вигляд щільності даного розподілу рис. 5.

Наведено приклад розподілу при $\theta = 2$, $k = 2$, а отже A>0, E>0. Як бачимо, даний розподіл відносно об'єктивно застосовувати для моделювання параметрів страхування.

Розподіл Вейбулла

Щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (12).$$

Графічний вигляд щільності даного розподілу на рис. 6.

Наведено приклад розподілу при $\lambda = 5$, $k = 2$, а отже A>0, E>0. Як бачимо, даний розподіл абсолютно об'єктивно застосовувати для моделювання параметрів страхування.

Розподіл Бурра

Щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} \tau\alpha\lambda^{\alpha} \frac{x^{\tau-1}}{(\lambda + x^{\tau})^{\alpha+1}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (13).$$

Графічний вигляд щільності даного розподілу на рис. 7.

Наведено приклад розподілу при $\tau = 2$, $\alpha = 0{,}5$, $\lambda = 7$, а отже A>0, E>0. Як бачимо, даний розподіл абсолютно об'єктивно застосовувати для моделювання параметрів страхування.

У результаті визначено, що розподіл Пуассона не адекватно застосовувати у моделювання страхової діяльності та актуарних розрахунках. З-поміж усіх розподілів виділяються розподіли Бурра та Вейбулла, як найбільш близькі до дійсного розподілу страхових параметрів. Та потрібно пам'ятати, що в кожній страховій компанії є свої особливості та відмінності, а отже, унікального розподілу просто не існує.

Переважна більшість дослідників використовує один з перелічених вище розподілів, хоча як показано їхнє застосування не завжди буде виправданим. Тому постає необхідність у виробленні методики побудови власного розподілу, для кожного окремо взятого випадку. Тобто, ми маємо раніше сформовані умови щодо форми, а тепер додаємо ще загальні умови для функцій розподілу ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)dx = m, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right)^2 = \sigma^2 \quad (14),$$

де m — математичне сподівання, $\sigma^2$ — дисперсія.

Тепер взявши певну функція, що відповідає умовам форми розподілу, наприклад:

$$f(x) = x^2 e^{-x} \qquad (15).$$

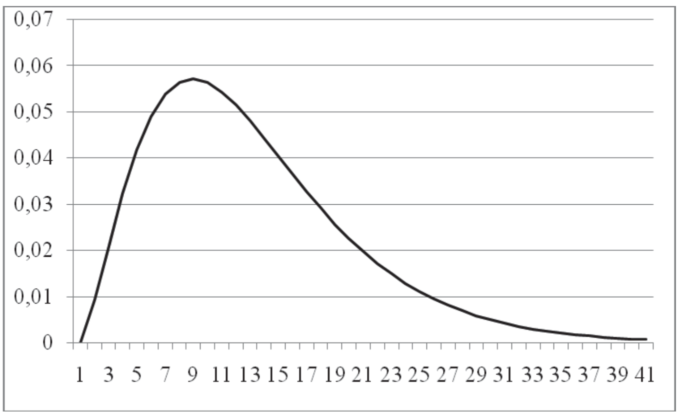


**Рис. 9. Графік апроксимованої функції розподілу**

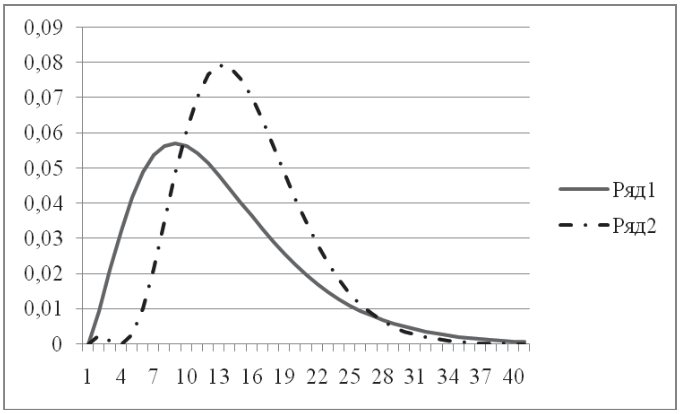


**Рис. 10. Співвідношення двох щільностей функцій розподілу**

Графічний вигляд даної функції рис. 8.

Тепер вводимо у функцію параметри, та підбираємо їх таким чином, щоб виконувались всі умови та сума квадратів похибок між значеннями отриманими за допомогою даного розподілу і дійсними даними були найменшими. Розв'язавши систему рівнянь отримано:

$$f(x) = x*(x+a)*e^{-\frac{x}{b}}/(b^2*(a+2b)) \quad (16)$$

де

$$a = \frac{-\frac{1}{3}m(3m+\sqrt{3}\sqrt{m^2-2v})+\frac{1}{6}(3m+\sqrt{3}\sqrt{m^2-2v})^2}{m+\frac{1}{3}(-3m-\sqrt{3}\sqrt{m^2-2v})} \quad (17)$$

$$b = \frac{1}{6}(3m+\sqrt{3}\sqrt{m^2-2v}) \quad (18).$$

m — математичне сподівання, а v — дисперсія.

Остання щільність (рис. 9) виконує всі поставлені умови, і, як бачимо, при підстановці реальної середньої величини премій та дисперсії, теоретична щільність має таку ж форму, як і практична. Тобто можна зробити висновок, що розподіл є адекватним.

Останній пункт щодо щільності, розглянуто внаслідок специфічності природи страхового ризику і його суб'єктивності, тобто при моделюванні оптимально застосовувати апроксимовану функцію розподілу для кожної окремо взятої страхової компанії, ніж одну загальну для всіх. Це підвищує точність прогнозів в середньому на 20%, а отже і точніша оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії.

Але це ж звичайно не межа точності. Далі розглянемо ще декілька проблем, з якими зустрічається дослідник протягом моделювання параметрів діяльності страхової компанії. Розглянемо наступну ілюстрацію:

Отже, наведено наступні дві щільності функцій розподілу:

Ряд 1 — $f(x) = x*(x+a)*e^{\left(-\frac{x}{b}\right)}$ (19),

Ряд 2 —

$$f(x) = x*\ln(x+\alpha)^2*(x-\beta)^2*e^{-\frac{x^\wedge\gamma}{\delta}} \quad (20),$$

де a, b, α, β, γ, δ — параметри.

Дані функції характеризуються однаковими математичними сподіваннями та дисперсіями, тобто задовольняють раніше висунуті умови. Опираючись на це можна зробити висновок, що обидві функції чудово підходять для моделювання страхової діяльності. В той ж час, очевидно, що одна з двох зазначених функцій розподілу забезпечить меншу похибку при моделюванні окремо взятої страхової компанії. Даний факт спричинений різним характером форми "хвостів" розподілів. У результаті моделювання, наприклад, страхових премій обома функціями по черзі ми отримаємо відносно однакові загальні суми премій, але абсолютно різні частки премій величиною до 1000 грн. і премій більших за 100000 грн.

Тоді, орієнтирами при виборі більш відповідної функції розподілу можуть бути такі способи:

— орієнтація на показники асиметрії та ексцесу;

— мінімізація відхилень ймовірностей по стратам.

Перший спосіб є фактичним додаванням до умови (14) двох умов рівності показників асиметрії та ексцесу нового розподілу ймовірностей раніше розрахованим аналогічним показникам для історичних даних компанії. Це дозволяє зробити більш усвідомлений та оптимальний вибір функції розподілу ймовірностей в більшості випадків, але не завжди.

Розглянемо більш детально рис. 10. Бачимо, що функція, проілюстрована рядом 2 має два локальні екстремуми. Таких екстремумів може бути декілька. Яка їхня практична природа? Компанія може зосереджувати свої зусилля на декількох основних стратах споживачів. Це призводить до виникнення таких піків. Наприклад, компанія концентрується на найбільш широкій страті споживачів — середній, а також на преміум класі. Виникне пік розподілу у "хвості" зправа. Це, звичайно ж, також потрібно змоделювати, в іншому разі можливе виникнення катастрофічних похибок, бо саме непередбачені страхові випадки в межах преміум-класу можуть стати катастрофічними для компанії.

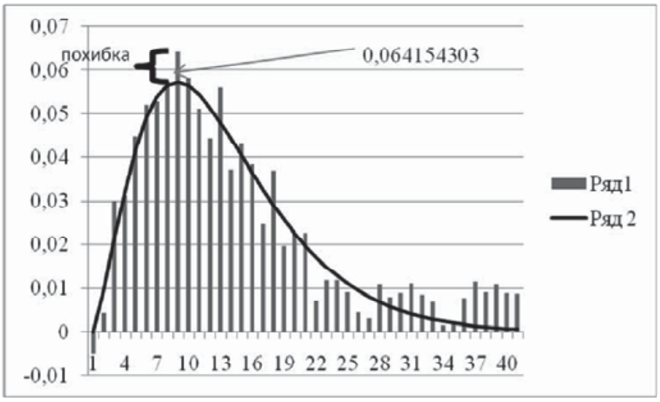


Рис. 11. Побудова щільності функції розподілу та гістограми для страхових премій

**Таблиця 1. Рівень якості застосування розподілу для моделювання**

| Вид розподілу | Сума квадратів похибок по стратам |
|---|---|
| Лог-Нормальний розподіл | 0,0117 |
| розподіл Паретто | 0,0152 |
| розподіл Пуассона | 0,0083 |
| Гамма розподіл | 0,0077 |
| розподіл Вейбулла | 0,0058 |
| Розподіл Бурра | 0,0054 |
| Виведений розподіл | 0,0043 |

Такі проблеми можна вирішити скориставшись наступним способом мінімізація відхилень ймовірностей по стратам. Весь спектр показника, що моделюється, наприклад, страхових премій розбивається на страти (проміжки). Найбільш загальною ознакою стратифікування є величина премій. Тоді будуємо гістограму страхових премій, де отримаємо показник частоти даної премії, який можна інтерпретувати як ймовірність надходження середньої по даній страті премії.

На рис. 11. зображено гістограму для страхових премій — ряд 1 та щільність функції розподілу, описаний співвідношенням (20) — ряд 2. Можемо побачити, що для страхових премій даної компанії є характерним локальний екстремум праворуч.

Страта № 9 має частоту рівну 5,8%, а відповідна ймовірність середньої премії по страті є рівною 5,7%. Отже, похибка для даної страти склала 0,1%. Можна поставити додаткові до (14) умови по кожній страті, що квадрат похибки є меншим ε (ε=0,0001 як приклад). Але це значно збільшує розмірність такої системи умов і не завжди можна знайти розв'язок такої системи. Як показує практика, таким чином можна поступати при існуванні двох-трьох найважливіших страт, для них і додаються такі умови. Якщо ж таких страт більше, то доцільно мінімізувати суму квадратів похибок по стратах.

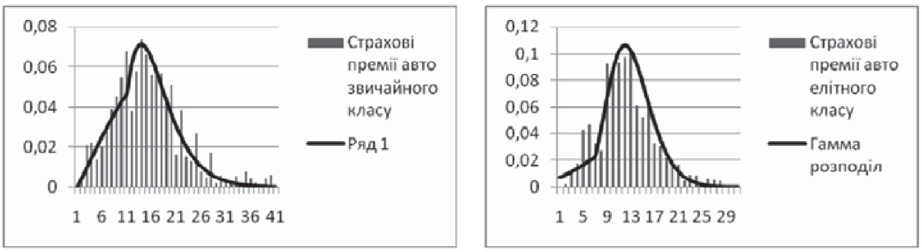


Рис. 12. Щільності функції розподілу та гістограми для страхових премій по авто звичайного (а) та елітного класу (b)

**Таблиця 2. Похибки моделювання страхових портфелів**

| Портфель | Сума квадратів похибок |
|---|---|
| Неоднорідний загальний | **0,001101** |
| Звичайне авто | **0,002806** |
| Елітне авто | **0,004646** |

Якщо на гістограмі показника локальний екстремум один, то перший та другий спосіб абсолютно не суперечать, а доповнюють один одного. Тому можна користатись ними і одночасно для більшої достовірності інформації.

Функція (16)—(18) була виведена використовуючи як перший так і другий спосіб для моделювання страхових премій однієї української компанії. Для наочності, порівняємо показник суми квадратів похибок по стратах при моделюванні премій проаналізованими функціями розподілу (таблиця 1).

Як бачимо, порядок значень досліджуваного показника повністю підтверджує раніше зроблені висновки.

Альтернативним шляхом є розбиття портфелю при моделюванні на два окремих. Тобто, якщо розглядаємо автострахування, то на звичайне страхування і страхування преміум-авто. Страхові випадки з авто елітного класу несуть в собі завищений ризик ліквідності, а тому контракти в преміум класі характеризуються вищим тарифом. Саме через зміну тарифів і виникає другий екстремум.

У результаті розбиття отримаємо:

У випадку, коли розглядається окремо портфель страхування, авто звичайно, класу (рис. 12 а), то для моделювання використовується функція (20). Для моделювання портфеля страхування преміум-авто (Рис. 12 b) використано Гамма-розподіл.

Розрахуємо суму квадратів похибок для кожного випадку (моделювання неоднорідного загального портфелю і розділених портфелів) (таблиця 2).

Як бачимо, розбиття портфелю абсолютно не знизило похибку моделювання, а навпаки сума похибок моделювання окремих портфелів значно перевищує похибку моделювання загального неоднорідного портфелю.

Враховуючи і вищу складність аналізу та моделювання окремих портфелів отримаємо обгрунтований результат переваги моделювання загального неоднорідного портфелю виведеною суб'єктивною функцією розподілу ймовірностей.

Описані підходи мають практичне застосування при моделюванні перестрахувальної діяльності компанії, бо саме в цій сфері є важливим співвідношення прогнозних значень по стратам, для розробки та аналізу різних програм перестрахування, використання "лейарів".

Використання таких підходів підвищує точність моделювання на 20—30%, а отже дає змогу більш обгрунтовано приймати управлінські рішення.

Дані результати дають можливість проводити рейтингування даних компаній, але при складанні рейтингу поряд рівнем ризику потрібно розглядати прибуток страхової компанії.

Достатньо високий рівень ймовірності краху свідчить про деякі викривлення у відображенні власного капіталу страхових компаній. Це зумовлено частим ототожненням банківського та страхового капіталу.

Тепер, використовуючи методи та моделі, описані в роботі, маємо можливість обгрунтовувати рішення при стратегічному плануванні. Посилити позиції на ринку, здобути конкурентні переваги.

## ВИСНОВКИ

Результати роботи несуть в собі значну практичну та наукову новизну. Наукова полягає в отриманні нових моделей аналізу страхового бізнесу. А практична — у отриманих результатах, що можуть прямо використовуватись при розробленні управлінських рішень.

Література:

1. Базилевич В.Д. Страховий ринок України: монографія // В.Д. Базилевич. — К.: Товариство "Знання КОО", 1998. — 374 с.
2. N. Bowers Actuarial Mathematics Society of Actuaries / N. Bowers, H. Gerber, J. Hickman, D. Jones C. Nesbitt‖ Itasca — 1986. — № 3 — p. 31—38.
3. Черняк О.І. Техніка вибіркових досліджень: монографія О.І. Черняк. — К.: МІВВЦ, 2011. — 248 с.
4. Річні звіти Держфінсполуг [Електронний ресурс]: Державна комісія з регулювання фінансових послуг України / Режим доступу http://www.dfp.gov.ua/742.html

References:

1. Bazylevych, V.D. (1998), *Strakhovyj rynok Ukrainy* [Ukrainian Insurance market], Znannia, Kyiv, Ukraine.
2. Bowers, N. (1986), "Actuarial Mathematics Society of Actuaries", *Itasca,* vol. 3, p. 31—38.
3. Cherniak, O.I. (2011), *Tekhnika vybirkovykh doslidzhen* [Technique of sample surveys], MIVVTs, Kyiv, Ukraine.
4. The official site of the state commission for regulation of financial services markets of Ukraine (2013), "Annual reports", available at: http://www.dfp.gov.ua/742.html (Accessed 3 August 2013).

*Стаття надійшла до редакції 21.08.2013 р.*