УДК 330: 330.4

О. В. Іваницька,
к. е. н., доцент,доцент кафедри теоретичної та прикладної економіки,
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", м. Київ
Н. В. Рощина,
к. е. н., доцент,доцент кафедри теоретичної та прикладної економіки,
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", м. Київ
Р. С. Сербул,
Студент, Інститут прикладного та системного аналізу,
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", м. Київ

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

O. Ivanytskaya,
Ph.D., associate professor, associate Professor of the Department of theoretical and applied Economics,
National technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv
N. Roshchina,
Ph.D., associate professor, associate Professor of the Department of theoretical and applied Economics,
National technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv
R. Serbul,
student of the Institute for applied systems analysis,
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv

TRANSPORTATION PROBLEM OF LINEAR PROGRAMMING

У статті розглянуто методи складання опорного плану розв'язування транспортної задачі. Акцент зроблено на обгрунтування методів та наведено приклади застосувань цих методів. Крім того, у статті проведено порівняння представлених методів складання опорного плану та обрано найбільш ефективний. Стаття буде корисна студентам та викладачам, які цікавляться лінійним програмуванням, економічними задачами, а також для тих, хто працює у сфері автомобільних перевезень.

This article discusses the methods of preparing the reference plan of solving the transportation problem. Emphasis is placed on justification of the methods and examples of applications of these methods. In addition, the article presents a comparison of methods for the preparation of the basic plan and selected the most effective. The article will be useful to students and teachers who are interested in linear programming, economic problems, and also for those who work in the field of road transport.

Ключові слова: транспортна задача, опорний план, збалансована транспортна задача метод північно-західного кута, метод мінімальної вартості, метод подвійної переваги, метод апроксимації Фогеля.

Key words: transport problem, basic plan, balanced transportation problem method the North-West corner method, minimum cost method preference, the method Fogel approximation.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Вирішення широкого кола завдань більшості галузей народного господарства грунтується на оптимізації складної сукупності залежностей, описаних математично за допомогою лінійного програмування. На сьогодні, воно є одним з найбільш важливих напрямків удосконалення планування й аналізу діяльності компанії. Транспортна задача є однією з найрозповсюджених задач лінійного програмування. Застосування даної задачі полягає в знаходженні плану перевезення певних обсягів ресурсів від постачальників до споживачів, з урахуванням витрат на транспортування. Тому постає проблема: отримати оптимальний план між усіма складовими транспортного процесу для розподілу матеріальних, трудових і фінансових ресурсів. Для розробки планів такого типу використовують методи складання опорного плану транспортної задачі.

Дані методи дуже широко застосовуються в прикладній економіці, системах аналізу даних і в різних галузях прикладної математики.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У сучасній науковій літературі проблеми складання опорного плану розв'язування транспортної задачі розглядаються у роботах таких учених, як: О.Ю. Зайченко, Ю.П. Зайченко, О.М. Ісакова, О.М. Шевченка, С.І. Наконечного, С.С. Савіна.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою статті є дослідження структури та постановки транспортної задачі, а також визначення найбільш раціональних методів та способів транспортування товарів. До основних завдань дослідження можна віднести: розгляд основних методів складання опорного плану розв'язування транспортної задачі; демонстрація прикладів застосування цих методів.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Перш ніж перейти до розгляду основних методів складання опорного плану розв'язування транспортної задачі, визначимо основні принципи її формулювання. Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості C_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i-го постачальника до кожного B_j-го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad (1).$$

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною.

У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву транспортної задачі за критерієм вартості перевезень [6].

Отже, треба визначити множину змінних $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, що задовольняють умови:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(i = \overline{1,n}\right) \quad (3),$$

Таблиця 1. Загальний вид транспортної матриці

Постачальники		*Споживачі*			
		B_1	B_2	...	Bn
		b_1	b_2	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

і таких, де цільова функція досягає мінімального значення:

$$\min F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad (4).$$

При виконанні умови (2) продукт вивозиться з усіх пунктів виробництва, а умова (3) означає повне задоволення попиту в усіх пунктах споживання.

Тоді умови транспортної задачі зручно подавати у вигляді таблиці (табл. 1).

Транспортну задачу називають збалансованою, або закритою, якщо виконується умова (5). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають незбалансованою, або відкритою.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень, який позначають матрицею $X = x_{ij}, i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}$. Значення невідомих величин — обсяги продукції, що мають бути перевезені від і-х постачальників до j-х споживачів, називають перевезеннями.

Розрізняють два типи транспортних задач: за критерієм вартості (план перевезень оптимальний, якщо досягнуто мінімальних витрат на його реалізацію) і за критерієм часу (план оптимальний, якщо на його реалізацію витрачається мінімум часу) [6].

Крім того, необхідною та достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (5).$$

Якщо при перевірці збалансованості (5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це здійснюється введенням фіктивного (умовного) постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i \right) \quad (6)$$

із ресурсним обсягом: $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ (7).

Таблиця 2. Умови транспортної задачі — метод північно-західного кута

Постачальники	*Запаси*	*Споживачі*			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
A_2	$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
A_3	$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right) \quad (8),$$

то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного (умовного) споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ (9).

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{m+1} (або фіктивного споживача B_{n+1}) до кожного зі споживачів (виробників) має дорівнювати нулю або бути набагато більшою за реальні витрати [1, с. 9—13; 4, с. 428—429; 6, с. 184—186].

Розв'язування транспортної задачі полягає не тільки в правильній постановці задачі, а й у цілеспрямованому виборі найбільш оптимального опорного плану. Початком такого процесу є побудова першого опорного плану.

Перший опорний план транспортної задачі можна побудувати графічним, симплексним методами, але це призводить до надто складних розрахунків. Позаяк існують інші методи побудови опорного плану, до яких відносять: метод північно-західного кута, метод мінімальної вартості, метод подвійної переваги та метод апроксимації Фогеля. Розглянемо кожний з наведених вище методів.

Ідея методу північно-західного кута полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці [2, с. 119; 5, с. 19].

Дослідимо цей процес детальніше на прикладі.

Спираючись на наведені вище принципи подання транспортної задачі, представимо умови обраного прикладу у таблиці 2. Спочатку, не враховуючи вартості перевезень, завжди задовольняють потреби першого споживача B_1, використовуючи запаси першого постачальника A_1. У нашому прикладі потреби споживача B_1 становлять $b_1 = 110$, а запаси постачальника — $a_1 = 150$ одиниць (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в клітинку A_1B_1 записуємо менше із значень, b_1, тобто 110.

Тепер потреби першого споживача повністю задоволені, переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача B_2. Обсяг його потреб $b_2 = 50$. Після задоволення потреб першого споживача залишок запасів першого постачальника становить 150-110 = 40. Отже, від першого виробника другому споживачеві можна перевезти лише 40 одиниць продукції, тому в клітину A_1B_2 записуємо число 40.

Після проведених операцій, запаси першого постачальника повністю вичерпані, переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2. Його запаси $a_2 = 60$, а незадоволені потреби другого споживача 50-40=10, тому в клітинку А2В2 записуємо число 10, і другий споживач у такий спосіб також повністю отримав необхідну кількість продукції.

Далі переходимо до задоволення потреб наступного споживача B_3. У результаті часткового використання запасів другого постачальника його залишок продукції становить 60 — 10 = 50. Отже, від другого виробника до третього споживача можна перевезти 50 одиниць продукції. Клітинка A_2B_3 міститиме зазначене число 50, і цим запаси постачальника A_2 будуть повністю вичерпані.

На кінець переходимо до розподілу запасів третього постачальника A_3. Залишились незадоволеними потреби третього споживача в обсязі 60 - 50 = 10. Для їх задоволення скористаємося запасами постачальника A_3. У клітинку A_3B_3 записуємо число 10, і потреби споживача B_3 також повністю задоволені. Переходимо до останнього споживача B_4 з потребами $b_4 = 80$, які повністю задовольняються за рахунок залишку запасів третього постачальника: 90 — 10 = 80.

Таблиця 3. Умови транспортної задачі — метод мінімальної вартості

a_i	b_j			
	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	4 70	4	2	5 80
$a_2 = 60$	5	3	1 60	2
$a_3 = 90$	2 40	1 50	4	2

Отже, у таблиці 2, у заповнених клітинках, знаходяться числа, що означають можливий план перевезень продукції. Сума чисел (перевезень) по рядках дорівнює обсягам запасів постачальників, а сума чисел по стовпцях — обсягам потреб відповідних споживачів.

Аналогічний результат можна отримати, починаючи розподіл поставок з лівого нижнього кута і рухаючись до правого верхнього по діагоналі. В такому разі спосіб розподілу перевезень можна було б назвати методом південно-західного кута, тому цей метод ще називають діагональним [6].

Визначимо загальну вартість перевезень згідно з початковим опорним планом. Від першого постачальника до першого споживача необхідно перевезти 110 одиниць продукції за ціною 4 ум. од. (ціна записана в правому верхньому куті кожної клітини), отже, це коштуватиме $110 \times 4 = 440$ (ум.од.). Крім того, необхідно перевезти від першого постачальника 40 одиниць продукції до другого споживача за ціною 4 ум. од. і т. д. У такий спосіб визначимо загальну вартість усіх перевезень:

$$F = 110 \times 4 + 40 \times 4 + 10 \times 3 + $$
$$+ 50 \times 1 + 10 \times 4 \times 80 \times 2 = 880 \text{ (ум. од).}$$

Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним. Тому що отримане рішення транспортної задачі, швидше за все, виявиться не оптимальним, оскільки в ньому не враховуються ціни доставки [6, с. 195—197; 7].

Ідея методу мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами [6, с. 198].

Даний метод відрізняється від методу північно-західного кута тільки порядком заповнення клітин транспортної таблиці. На кожному кроці методу заповнюється не викреслена клітина, якій відповідає найменше значення транспортних витрат (спосіб заповнення клітин залишається тим самим). Тому слід очікувати, що в більшості випадків при використанні методу мінімального елемента отримаємо більш економічний опорний план у порівнянні з методом північно-західного кута [3, с. 23].

Складемо за допомогою цього методу план розглянутої вище задачі. Для подання умов другого прикладу транспортної задачі використаємо таблицю 3.

Найменшу вартість мають перевезення, які здійснюються від A_2 до B_3 та від A_3 до B_2 (ціна перевезення одиниці продукції — 1 ум. од.). Заповнимо будь-яку з них, наприклад, A_2B_3. Оскільки постачальник має 60 одиниць продукції, а споживач потребує саме такої її кількості, то в клітину A_2B_3 ставимо значення 60. У такий спосіб запаси другого постачальника повністю вичерпані, а потреби третього споживача повністю задоволені. Також мінімальною є вартість перевезень від третього постачальника до другого споживача, тому заповнимо також клітину A_3B_2.

З клітинок таблиці, що залишились незаповненими, вибираємо наступне мінімальне значення вартості перевезень, яке дорівнює 2 ум. од. — для клітин A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 та A_3B_4. Заповнення клітин A_2B_4 та A_1B_3 неможливе, оскільки постачальник A_2 вже повністю вичерпав власний обсяг запасів, задовольняючи потреби споживача B_3, а споживач B_3 повністю задовольнив свої потреби. Отже, можна заповнити тільки клітину A_3B_1 чи

Таблиця 4. Умови транспортної задачі — метод подвійної вартості

a_i	b_j			
	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	4 110	4	2 *	5 40
$a_2 = 60$	5	3	1 ** 60	2 *
$a_3 = 90$	2 *	1 ** 50	4	2 * 40

Таблиця 5. Умови транспортної задачі — метод апроксимації Фогеля

a_i \ b_j	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	Різниці по рядках		
$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5	2	2	0
$a_2 = 60$	5	3	1 60	2	1	2	
$a_3 = 90$	2	1 10	4	2 80	1	1	1
Різниці по стовпцях	2	2	1	3			
	2	2	1				
	2	3					

A_3B_4. Заповнимо A_3B_1. Обсяг запасів а3 = 90, причому 50 одиниць продукції вже надано другому споживачеві. Отже, маємо залишок 90 — 50 = 40, а потреби b1 = 110, тому від третього постачальника до першого споживача плануємо перевезти 40 одиниць продукції. Тепер у клітину A_3B_4 не можна записати будь-який обсяг постачання, оскільки запаси третього постачальника вже повністю вичерпані.

Знову вибираємо найменшу вартість для клітин таблиці, що залишилися пустими, і продовжуємо процес доти, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби — задоволені.

У результаті ми отримуємо початковий опорний план, загальна вартість перевезень для якого становить:

$$F = 70 \times 40 + 80 \times 5 + 60 \times 1 + 50 \times 1 + 40 \times 2 = 870 \text{ (ум. од.)}.$$

Значення цільової функції менше за попередній варіант, значить цей план ближчий до оптимального [2, с. 120; 6, с. 198—199].

Якщо розмірність задачі досить велика, то перебір за методом мінімальної вартості ускладнюється. В такому разі спростити пошук клітин з найменшими вартостями можна, застосовуючи метод подвійної переваги.

Ідея методу подвійної вартості полягає в тому, що перед початком заповнення таблиці необхідно позначити будь-якими символами клітинки (позначимо символом *), які містять найменшу вартість у рядках, а потім — у стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (які містять вартості, що є мінімальними і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (що містять мінімальні вартості або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості [6]. Для подання умов другого прикладу транспортної задачі використаємо таблицю 4.

$$F = 110 \times 4 + 40 \times 5 + 60 \times 1 + 50 \times 1 + 40 \times 2 = 830 \text{ (ум.од.)}.$$

Застосування для побудови опорного плану даного методу уможливлює отримання найменшого у зіставленні з розглянутими вище значення цільової функції. Отже, такий план є найближчим до оптимального [6, с. 199—200].

Ідея методу апроксимації Фогеля полягає в тому, що на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці — знизу та справа у кілька рядків та стовпчиків, що відповідають крокам заповнення таблиці. З-поміж усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості [6].

Даний метод побудови опорного плану враховує не лише маршрути з мінімальними витратами перевезень продукції, але й співвідношення витрат у рядку чи стовпчику, тобто розраховується наскільки, може збільшитися вартість постачання на наступних кроках процедури, якщо не здійснити на поточному кроці постачання в клітину з мінімальною вартістю.

Метод апроксимації Фогеля дає змогу, особливо для задач великих розмірностей, скласти найкращий опорний план. Розглянемо застосування цього методу на прикладі. Для подання умов другого прикладу транспортної задачі використаємо таблицю 5.

У таблиці 5 навпроти кожного рядка і стовпчика записані величини, які знайдені як різниці між мінімальним значенням вартості та наступним за ним по рівню. Максимальне значення такої різниці на першому кроці відповідає четвертому стовпчику і означає, що у разі, коли не буде задоволена потреба четвертого споживача перевезенням продукції від третього постачальника за ціною 2 ум. од. за одиницю, то на наступних кроках вартість перевезення може бути на 3 ум. од. більшою. Тобто інакше може статися, що потребу четвертого споживача необхідно буде задовольняти перевезенням продукції від першого постачальника, що призведе до збільшення вартості цього перевезення в 2,5 рази. Водночас для всіх інших споживачів та постачальників такі різниці є меншими. Отже, найдоцільніше на першому кроці заповнити клітину A_3B_4. Після цього потреби B_4 повністю задоволені, і всі клітини четвертого стовпчика виключаються з наступного розрахунку різниць по рядках і стовпцях.

На другому кроці максимальна різниця дорівнює 2 і відповідає першому і другому рядкам та першому і другому стовпчикам, тому можна заповнювати будь-яку їх клітину з мінімальною вартістю, наприклад, A_2B_3. Після цього з розгляду виключаються одразу всі клітини другого рядка та третього стовпця, оскільки потреби третього споживача повністю задоволені, а запаси другого постачальника вичерпані.

Останній розрахунок різниць (найбільше значення 3 відповідає другому стовпчику) свідчить про доцільність введення поставки від третього постачальника до другого споживача. Решту клітин заповнимо методом мінімальної вартості та визначимо загальну вартість перевезень:

$$F = 110 \times 40 + 40 \times 4 + 60 \times 1 + $$
$$+ 10 \times 1 + 80 \times 2 = 830 \quad \text{(ум. од.)}.$$

Результат збігся із значенням цільової функції для опорного плану, що складений за попереднім методом. Ефективність методу апроксимації Фогеля є очевидною для задач більшої розмірності [6, с. 200—202].

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуті найбільш, на думку авторів, ефективні методи складання опорного плану транспортної задачі:
— метод північно-західного кута;
— метод мінімальної вартості;
— метод подвійної переваги;
— метод апроксимації Фогеля.

Отже, порівнюючи дані методи було встановлено, що метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним, адже при заповненні таблиці для складання опорного плану, спочатку завжди задовільняють потреби споживачів, а вже потім враховують вартість перевезень. Слід зауважити, що метод мінімальної вартості дозволяє знайти опорний план транспортної задачі, при якому загальна вартість перевезень вантажу менша, ніж загальна вартість перевезень при плані, знайденому для даної задачі за допомогою північно-західного кута. Тому найбільш доцільно використовувати опорний план транспортної задачі складений методом мінімальної вартості. Використовуючи метод подвійної переваги у порівнянні з попередніми методами, можна отримати найменше значення цільової функції. Метод Фогеля є найбільш ефективним, адже при його застосуванні можна скласти опорний план для задач великих розмірностей, а також даний метод враховує співвідношення витрат та маршрути з мінімальним перевезенням продукції. Для кожного методу було розроблено програму і протестовано на багатьох прикладах, результати роботи програм показали що, дійсно, метод Фогеля має найкращий результат порівняно з іншими методами.

Для кожного методу наведено математичне обгрунтування, та показано корисність застосування опорних планів для розв'язування транспортної задачі.

Література:
1. Гюльштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа: учебник / Е.Г. Гюльштейн, Д.Б. Юдин / Издательство "Наука", Москва, 1969. — 384 с.
2. Зайченко О.Ю. Дослідження операцій. Збірник задач / О.Ю. Зайченко, Ю.П. Зайченко. — К.: Видавничий Дім "Слово", 2007. — 472 с.
3. Крас М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М.С. Крас, Б.П. Чупрынов / 6-е изд., испр. — М.: Издательство "Дело" АНХ, 2008. — 720 с.
4. Кузнецов А.В. Высшая математика. Математическое программирование: учебник / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. — Минськ "Вышэйшая школа", 1994.
5. Наконечний С.І. Н-22 Математичне програмування: навч. посіб. / С.І. Наконечний, С.С. Савіна. — К.: КНЕУ, 2003. — 452 с.
6. Розв'язування задач лінійного програмування [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://www.vevivi.ru/best/Rozvyazannya-zadach-lninogo-programuvannya-ref193370.html

References:
1. Hiul'shtejn, E.H. (1969), Zadachy lynejnoho prohrammyrovanyia transportnoho typa [linear programming problems of transport type], Nauka, Moscow, Russia.
2. Zajchenko, O.Yu. (2012), Doslidzhennia operatsij [Research of operations], Vydavnychyj Dim "Slovo", Kyiv, Ukraine.
3. Kras, M.S. (2008), Osnovy matematyky y ee prylozhenyia v ekonomycheskom obrazovanyy [Fundamentals of mathematics and its application in economic education], Yzdatel'stvo "Delo" ANKh, Moscow, Russia.
4. Kuznetsov, A.V. (1994), Vysshaia matematyka. Matematycheskoe prohrammyrovanye [Higher mathematics. Mathematical programming], "Vyshejshaia shkola", Minsk, Belarus.
5. Nakonechnyj, S.I. (2003), N-22 Matematychne prohramuvannia [N-22 Mathematical Programming], KNEU, Kyiv, Ukraine.
6. Vinnytsia National Technical University (2007), "Solution of linear programming task", available at: http://www.vevivi.ru/best/Rozvyazannya-zadach-lninogo-programuvannya-ref193370.html (Accessed 15 July 2015).

Стаття надійшла до редакції 16.07.2015 р.