УДК 681.51

Ю.А. РОМАНЕНКОВ[1], Л.Г. ШАХ[2]

[1]Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,Украина
[2]АОЗТ «Авионика», Украина

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ С ИНТЕРВАЛЬНО-ЗАДАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрены оптимизационные модели с интервально-заданными параметрами. Описаны методы получения и анализа различных эквивалентных детерминированных моделей. На примере показаны подходы к анализу моделей в зависимости от стратегии исследования.

оптимизация, детерминированная модель, интервальная неопределенность, производственная матрица, ресурсы, стратегия

Постановка проблемы и анализ литературы. Интервальное представление факторов неопределенности в последнее время привлекает все большее внимание исследователей как наименее ограничительное и отвечающее широкому классу практических задач. Во многих прикладных задачах часто нет оснований или недостаточно информации для того, чтобы рассматривать факторы неопределенности как случайные. Это приводит к необходимости учета неопределенности, когда относительно факторов неопределенности ничего не известно, кроме их свойства быть ограниченными.

В таких условиях наиболее общей и естественной моделью описания факторов является их представление в интервальной форме, когда задают диапазон возможных значений переменных или зависимостей [1], [2].

Одним из методов анализа оптимизационных моделей с интервальными параметрами является сведение интервальной модели к детерминированному эквиваленту.

Целью статьи является анализ задачи оптимизации в условиях интервальной неопределенности с помощью эквивалентных детерминированных моделей.

Пусть в ходе проведения оптимизационного исследования порождающая задача оптимизации редуцировалась к виду

$$\min\ [f(\mathbf{x})],\ \mathbf{x} \in X\ , \quad (1)$$

где

$$X = \{\mathbf{x} \in R^n :\ [\mathbf{A}]\mathbf{x} \le [\mathbf{b}],\ \mathbf{x} \ge 0\}\ ,$$

т.е. критерий и ограничения задачи заданы в интервальной форме.

Иначе говоря,

$$[f(\mathbf{x})] = (f^-(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}) \le f^+(\mathbf{x}))\ \forall \mathbf{x} \in X\ , \quad (2)$$

где $f(\mathbf{x})$ – неизвестная функция; $f^-(\mathbf{x})$, $f^+(\mathbf{x})$ – известные, точно заданные границы коридора ее возможных значений (рис. 1).

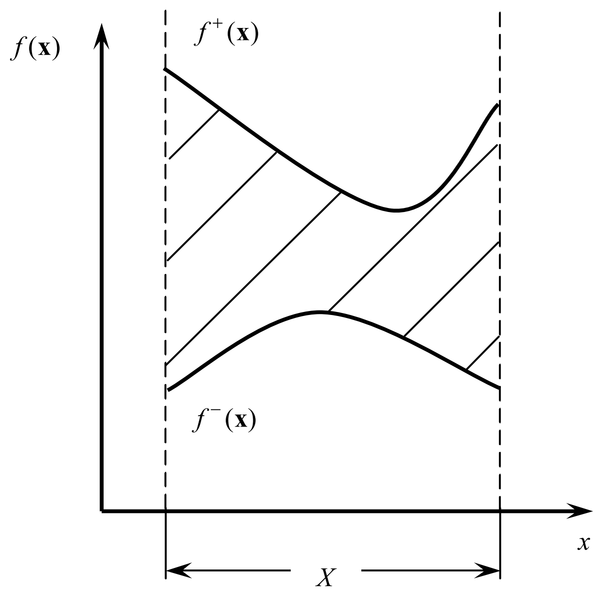

Рис 1. Интервально заданный критерий

Аналогично, элементы матрицы $\mathbf{A}$ размера ($m \times n$) и вектора $\mathbf{b}$ размерности ($m \times 1$) задаются интервалами своих возможных значений, т.е.

$$[\mathbf{A}] = \begin{vmatrix} [a_{11}] & \dots & [a_{1n}] \\ \dots & & \dots \\ [a_{m1}] & \dots & [a_{mn}] \end{vmatrix}, \ [\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} [b_1] \\ \dots \\ [b_m] \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

где $[a_{ij}] = (a_{ij}^- \le a_{ij} \le a_{ij}^+)$, $[b_j] = (b_j^- \le b_j \le b_j^+)$.

Будем также предполагать, что возможным реализациям $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ внутри известных границ нельзя приписать никакой вероятностной функции распределения.

К виду (1) сводится довольно широкий класс практических задач, например, при соответствующем виде критерия $f(\mathbf{x})$ – задачи линейного и квадратичного программирования с интервально-заданными параметрами.

Интервальная форма описания может возникнуть как при использовании методов интервального анализа данных, так и при экспертных оценках неизвестных параметров.

Рассмотрим возможные способы задания допустимой области и модели критерия оптимизации в условиях интервальной неопределенности.

Модели ограничений. Для сравнения вариантов формирования допустимой области решения в условиях интервальной неопределенности целесообразно придать матрице $\mathbf{A}$ и вектору $\mathbf{b}$ какой-то содержательный смысл.

Если оптимизируется система производства продукта при ограниченных ресурсах, то матрицу $\mathbf{A}$ часто трактуют как описание способа производства, а вектор $\mathbf{b}$ – как ресурсы системы.

При такой интерпретации выражение (3) задает множество возможных способов производства и ресурсов. Выбор конкретных матрицы $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ и вектора $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$ определяет способ производства $\mathbf{A}$ и заданный ресурс $\mathbf{b}$ в системе.

Учитывая эти соображения, проанализируем следующие модели допустимой области системы:

$$X_1 = \{\mathbf{x} \ge 0 \mid \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \ \forall \mathbf{b} \in [\mathbf{b}] : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\}, \qquad (4)$$

$$X_2 = \{\mathbf{x} \ge 0 \mid \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \ \exists \mathbf{b} \in [\mathbf{b}] : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\},$$

$$X_3 = \{\mathbf{x} \ge 0 \mid \forall \mathbf{b} \in [\mathbf{b}], \ \exists \mathbf{A} \in [\mathbf{A}] : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\},$$

$$X_4 = \{\mathbf{x} \ge 0 \mid \exists \mathbf{A} \in [\mathbf{A}], \ \exists \mathbf{b} \in [\mathbf{b}] : \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}\}.$$

Сравнивая варианты между собой, можно обнаружить, что X_1 отвечает наиболее жестким требованиям, так как в соответствии с выражением (4) необходимо, чтобы условие $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$ выполнялось для любого способа производства и любого ресурса, определяемых заданными границами. Множество X_4 соответствует наиболее "либеральным" ограничениям, ибо требуется лишь, чтобы существовали способ производства $\mathbf{A} \in [\mathbf{A}]$ и ресурс $\mathbf{b} \in [\mathbf{b}]$ при которых $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$.

Учитывая, что $\mathbf{x} \ge 0$, можно выразить множества X_i ($i = 1, \dots, 4$) через граничные элементы интервальных матриц $[\mathbf{A}]$ и вектора $[\mathbf{b}]$:

$$X_1 = \{\mathbf{x} \ge 0 \mid \mathbf{A}^+ \mathbf{x} \le \mathbf{b}^-\}, \qquad (5)$$

$$X_2 = \{\mathbf{x} \ge 0 \mid \mathbf{A}^+ \mathbf{x} \le \mathbf{b}^+\}, \qquad (6)$$

$$X_3 = \{\mathbf{x} \ge 0 \mid \mathbf{A}^- \mathbf{x} \le \mathbf{b}^-\}, \qquad (7)$$

$$X_4 = \{\mathbf{x} \ge 0 \mid \mathbf{A}^- \mathbf{x} \le \mathbf{b}^+\}, \qquad (8)$$

где

$$\mathbf{A}^+ = \{a_{ij}^+\}, \ \mathbf{A}^- = \{a_{ij}^-\}, \ \mathbf{b}^+ = \{b_i^+\}, \ \mathbf{b}^- = \{b_i^-\}.$$

Если обозначить через $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{b}}$ матрицу и вектор, составленные из «среднеинтервальных» элементов, т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \{\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^+ + a_{ij}^-)/2\}, \\ \tilde{\mathbf{b}} &= \{\tilde{b}_i = (b_i^+ + b_i^-)/2\}, \end{aligned} \qquad (9)$$

то можно в дополнение к $X_1, \dots, X_4$ задать множество решений, допустимых в среднем:

$$X_5 = \{\mathbf{x} \ge 0 \mid \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} \le \tilde{\mathbf{b}}\}. \qquad (10)$$

Из анализа экстремальных допустимых областей X_1 и X_4, а также «средней» области X_5 следует естественное отношение включения

$$X_1 \subset X_5 \subset X_4.$$

Различные формы допустимых областей приведены на рис. 2 для случая, когда интервальные условия задаются в виде

$$X = \left\{ \mathbf{x} \ge 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} [1;\ 3]x_1 + [2;\ 4]x_2 \le [6;\ 9] \\ [-4;\ -2]x_1 + [1;\ 3]x_2 \le [3;\ 4] \end{array} \right\}.$$

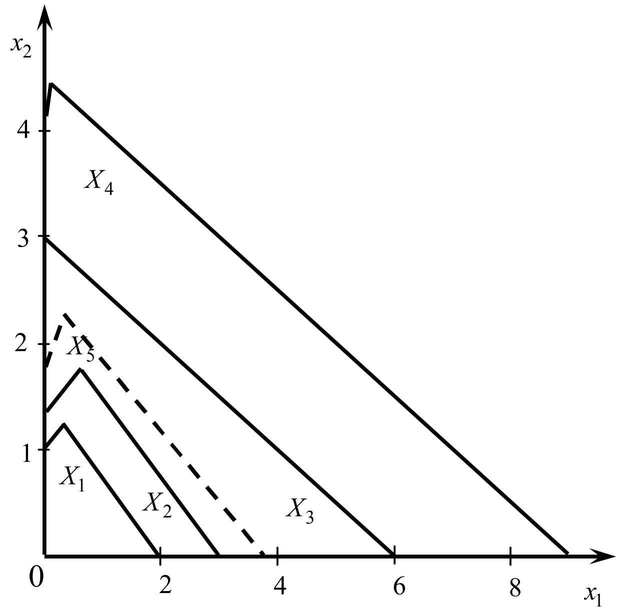

Рис 2. Допустимые области задачи с интервальными ограничениями

Приведенные выражения позволяют, используя содержательную интерпретацию и технологические требования к допустимому решению, определить детерминированную допустимую область задачи в форме одного из множеств $X_1, ..., X_5$, уже не охватывающего интервально заданные параметры.

Модели критерия. В качестве критерия оптимизации в задаче (1), вообще говоря, может быть взята любая функция $f(\mathbf{x})$, удовлетворяющая условию (2). При этом детерминированный эквивалент задачи интервального программирования (1) записывается в виде:

$$\min[f(\mathbf{x})],\ \mathbf{x} \in X_i\,, \tag{11}$$

где в качестве допустимой области X_i берется одно из детерминированных множеств $X_1, ..., X_5$, задаваемых выражениями (5)-(8), (10).

Оптимальное решение задачи (11)

$$\mathbf{x}^0 = \arg\ \min[f(\mathbf{x})],\ \mathbf{x} \in X_i$$

и оптимальное значение критерия

$$f(\mathbf{x}^0) = \min[f(\mathbf{x})],\ \mathbf{x} \in X_i$$

зависят от того, какая функция $f(\mathbf{x})$ выбрана внутри интервала.

Однако можно показать, что при любом выборе $f(\mathbf{x})$ согласно условию (2) вариация экстремального значения критерия ограничена пределами

$$f^-(\mathbf{x}_0^-) \le f(\mathbf{x}_0) \le f^+(\mathbf{x}_0^+) \quad \forall f(\mathbf{x}) \in [f(\mathbf{x})]\,, \tag{12}$$

где

$$\mathbf{x}_0^- = \arg\ \min f^-(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X_i\,,$$

$$\mathbf{x}_0^+ = \arg\ \min f^+(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in X_i\,.$$

Как можно заметить, границы неравенства (12) определяются как экстремальные значения границ интервала неопределенности критерия (рис. 3).

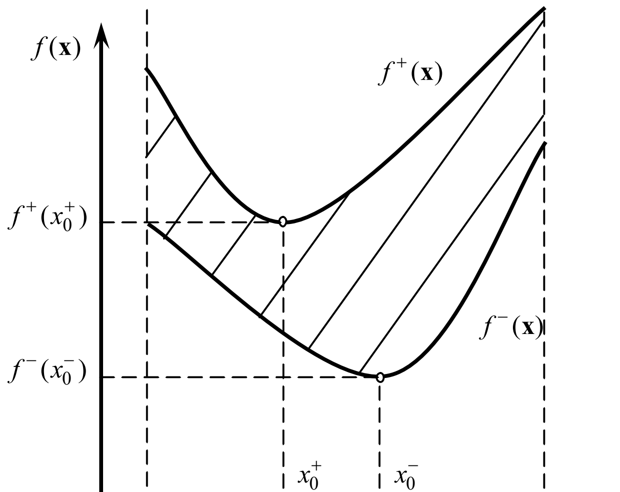

Рис 3. Пределы изменения экстремума в условиях интервальной неопределенности

Выбор модели критерия $f(\mathbf{x})$ внутри интервала зависит от специфики оптимизируемой системы и информации о виде функции.

Рассмотрим возможные варианты.

Максиминная модель (пессимистический подход). Когда необходимо обеспечить гарантированный результат, используется модель

$$\max_{f\in[f(\mathbf{x})]} \min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}).$$

Очевидно, что она ориентирована на наихудший случай, особенно, если в качестве допустимой области задано множество X_1, и соответствует самым жестким ограничениям.

Миниминная модель (оптимистический подход). Другая экстремальная стратегия исследователя ориентирована на получение самого минимального значения критерия из всех возможных. Используемая при этом модель имеет вид

$$\min_{f\in[f(\mathbf{x})]} \min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}), \qquad (13)$$

где в качестве допустимого множества X может быть взято любое из множеств $X_1, ..., X_5$. Однако, учитывая, что X_4 отвечает наименее жестким ограничениям, его использование в задаче (13) обеспечивает минимально возможное значение критерия.

«Средняя» модель. При ее формировании ориентируются на промежуточную между двумя рассмотренными экстремальными некоторую усредненную ситуацию, например, принимая в качестве модели критерия функцию

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0.5(f^-(\mathbf{x}) + f^+(\mathbf{x})),$$

проходящую посередине между границами коридора $[f(\mathbf{x})]$. Детерминированный эквивалент задачи (1) при этом записывается в виде

$$\min_{\mathbf{x}\in X} \tilde{f}(\mathbf{x}).$$

Наиболее естественно при ориентации на средние условия в качестве допустимого множества использовать множество X_5, построенное на основе «среднеинтервальных» значений параметров матрицы $[\mathbf{A}]$ и вектора $[\mathbf{b}]$.

Пример. Необходимо распределить капитал между инвестиционными проектами таким образом, чтобы получить максимальную прибыль. При этом риски инвестиций не должны превышать заданных величин [3].

В результате проведения оптимизационного исследования получена следующая интервальная модель[3]:

$$F(\mathbf{x}) = D_1 x_1 + D_2 x_2,$$

$$R_1 x_1 + R_2 x_2 \le R,$$

где D_1, D_2 – доходности первого и второго инвестиционных проектов; R_1, R_2 – количественные меры рисков первого и второго инвестиционных проектов; R_1 – средневзвешенный допустимый риск; x_1, x_2 – долевые части капитала в каждом из проектов.

Задача оптимизации в этом случае имеет вид задачи интервального программирования

$$\max_{\mathbf{x}}([8;\ 10]x_1 + [11;\ 12]x_2)$$

при условиях

$$[0.28;\ 0.30]x_1 + [0.39;\ 0.43]x_2 \le 0.35,$$

$$0.8 \le \sum_{i=1}^{2} x_i \le 1,$$

$$0 \le x_i \le 1, \quad (i = 1,\ 2).$$

Учитывая, что неопределенность условий появляется только в левой части неравенств, можно получить следующие выражения для множеств X_1 («жесткие» ограничения), X_4 («мягкие» ограничения) и X_5 (ограничения в среднем):

$$X_1 = \begin{cases} 0 \le x_i \le 1 \\ 0.8 \le (x_1 + x_2) \le 1 \\ 0.3x_1 + 0.43x_2 \le 0.35 \end{cases},$$

$$X_4 = \begin{cases} 0 \le x_i \le 1 \\ 0.8 \le (x_1 + x_2) \le 1 \\ 0.28x_1 + 0.39x_2 \le 0.35 \end{cases},$$

$$X_5 = \begin{cases} 0 \le x_i \le 1 \\ 0.8 \le (x_1 + x_2) \le 1 \\ 0.29x_1 + 0.41x_2 \le 0.35 \end{cases}.$$

Как и следовало ожидать, из указанных множеств X_1 – самое «узкое», X_4 – самое «широкое» из них, а X_5 – занимает промежуточное положение.

Если использовать модели критерия, введенные ранее, можно легко получить следующие результаты:

максиминная модель

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X} f_a(\mathbf{x}) = -10x_1 - 12x_2$,

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X_1} f_a(\mathbf{x}_{a1}) = -10.769$, $\mathbf{x}_{a1} = [0.615,\ 0.385]$,

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X_4} f_a(\mathbf{x}_{a2}) = -11.27$, $\mathbf{x}_{a2} = [0.364,\ 0.636]$,

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X_5} f_a(\mathbf{x}_{a3}) = -11$, $\mathbf{x}_{a3} = [0.5,\ 0.5]$;

миниминная модель

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X} f_b(\mathbf{x}) = -8x_1 - 11x_2$,

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X_1} f_b(\mathbf{x}_{b1}) = -9.154$, $\mathbf{x}_{b1} = [0.615,\ 0.385]$,

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X_4} f_b(\mathbf{x}_{b2}) = -9.909$, $\mathbf{x}_{b2} = [0.364,\ 0.636]$,

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X_5} f_b(\mathbf{x}_{b3}) = -9.5$, $\mathbf{x}_{b3} = [0.5,\ 0.5]$;

модель критерия в среднем

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X} f_c(\mathbf{x}) = -9x_1 - 11.5x_2$,

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X_1} f_c(\mathbf{x}_{c1}) = -9.962$, $\mathbf{x}_{c1} = [0.615,\ 0.385]$,

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X_4} f_c(\mathbf{x}_{c2}) = -10.59$, $\mathbf{x}_{c2} = [0.364,\ 0.636]$,

$\min\limits_{\mathbf{x}\in X_5} f_c(\mathbf{x}_{c3}) = -10.25$, $\mathbf{x}_{c3} = [0.5,\ 0.5]$.

Выводы

Как видно из полученных результатов, различные подходы к построению эквивалентных детерминированных моделей позволяют получить оптимальные решения для граничных ситуаций. В процессе принятия управленческих решений руководителю зачастую приходится иметь дело с нечеткой информацией, которая с помощью может быть выражена в интервальной форме. Интервальный анализ позволяет оценить весь спектр оптимальных решений и в наглядной форме представить состояние исследуемой экономической системы.

Заключение

Рассмотренный подход к анализу оптимизационных интервальных моделей позволяет свести интервальную задачу к группе детерминированных, решение которых легко получить с помощью стандартных прикладных программ. Полученные оптимальные решения отражают стратегию исследования и могут быть использованы для анализа предельных состояний интервальных моделей.

Литература

1. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 222 с.

2. Алиев Р.А., Церковный А.Э., Мамедова Г.А. Управление производством при нечеткой исходной информации. – М.: Эноргоатомиздат, 1991. – 240 с.

3. Романенков Ю.А., Федоренко Н.М., Чумаченко И.В. Аналитический подход к управлению инвестициями // Системи обробки інформації. Збірник наукових праць. Вип. 1. – Харків: ХВУ, 2003. – с. 88-91

Поступила в редакцию 23.09.2003 г.

Рецензент: Вартанян В.М., д-р. техн. наук, проф., АОЗТ "Авионика"