УДК 621.452.001.57:681.54

А.В. ОЛЕЙНИК

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЙ МОНИТОРИНГ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ДЕТАЛИ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ КАК ЗАДАЧА ДИНАМИКИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Задача мониторинга температуры деталей газотурбинного двигателя, недоступной прямому измерению, сформулирована как задача о наблюдении выхода тепловой системы, управляемой режимными и термодинамическими параметрами проточной части двигателя. Решение выражено через получаемые с помощью конечно-элементных моделей высокого уровня переходные и импульсные характеристики – изменения температуры при ступенчатом и импульсном изменении управляющих воздействий.

мониторинг температуры деталей, переходная функция, переходная характеристика

В связи с трудностями измерения температуры деталей авиационного двигателя в системе его диагностики проводится расчетный мониторинг температуры основных деталей на основе результатов контроля параметров двигателя в ходе полетов. Результаты мониторинга используются в подсистемах учета выработки ресурса двигателя, диагностики опасных режимов и для иных целей [1].

Для осуществления мониторинга создаются математические модели температурного состояния деталей, удовлетворяющие достаточно противоречивым требованиям – точности и полноты учета факторов, свойственных современным конечно-элементным моделям высокого уровня, а также алгоритмической надежности и системной совместимости, характерной для простых эмпирических зависимостей.

1. Модель теплопроводности

Расчет температурного состояния деталей, образующих конструктивный узел двигателя, требует в общем случае решения нестационарной пространственной, нелинейной задачи теплопроводности:

$$c\rho\frac{dt}{d\tau}=\frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)}{\partial z}, \qquad (1)$$

где $t = t(x,y,z,\tau)$ – температура в точке с координатами x, y, z в момент времени τ;

$c = c(x,y,z,t)$, $\lambda = \lambda(x,y,z,t)$ – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности;

$\rho = \rho(x,y,z)$ – плотность материала,

со следующими граничными условиями третьего рода:

$$\alpha\,(T_{r_{n=0}} - t) = \left(\lambda\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=0}, \qquad (2)$$

где $\alpha = \alpha(x,y,z,\tau)$ – коэффициент теплоотдачи от окружающей среды (потоков газа или воздуха) к детали;

$T = T(x,y,z,\tau)$ – локальная температура среды;

n – нормаль к поверхности.

Используя традиционный подход метода конечных элементов разобьем деталь на достаточно большое число симплекс-элементов и аппроксимируем температурное поле в пределах каждого элемента полиномом первой степени [2, 3]:

$$t^{(e)}(x,y,z) = N^{(e)}_{x,y,z}\,\vec{t}^{(e)}, \qquad (3)$$

где $\vec{t}^{(e)} = [t_i\ t_j\ t_k\ t_m]^T$ – вектор узловых температур элемента;

$$N^{(e)}_{x,y,z} = [1\ x\ y\ z]\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{bmatrix}^{-1}$$ – матрица формы элемента.

Для N узлов аппроксимации введем глобальный вектор температурного состояния (узловых температур) и глобальный вектор температурных условий (температур среды):

$$\vec{t} = \left[t_1 \ldots t_i \ldots t_N\right]^T,$$

$$\vec{T} = \left[T_1 \ \ldots \ T_i \ \ldots \ T_N\right]^T. \qquad (4)$$

Для каждого элемента установим матрицу связей $E^{(e)}$ так, чтобы с ее помощью можно было преобразовать глобальный вектор температуры в элементарный:

$$\vec{t}^{(e)} = E^{(e)}\,\vec{t}\,. \qquad (5)$$

Решение дифференциального уравнения (1) можно свести к нахождению минимума функционала [2, 3]:

$$J(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{(V)}\left\{\lambda\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + 2c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}t\right\}dxdydz + \int\limits_{(s)}\alpha t_s\left(\frac{1}{2}t_s - T\right)ds\,, \qquad (6)$$

Используя (3) и (5), найдем функционал типа (6) для конечного элемента:

$$J^{(e)}(\vec{t}) = \frac{1}{2}\vec{t}^{\,T}E^{(e)^T}\left\{\Lambda^{(e)}E^{(e)}\vec{t} + \right.$$
$$\left. + 2C^{(e)}E^{(e)}\frac{\partial \dot{\vec{t}}}{\partial \tau} + A^{(e)}E^{(e)}\vec{t} - A^{(e)}E^{(e)}\vec{T}\right\}, \qquad (7)$$

где $C^{(e)} = \int\limits_{(\Delta V)} N^{(e)^T}N^{(e)}c\rho dv$ – матрица теплопроводности;

$\Lambda^{(e)} = \int\limits_{(\Delta V)} N^{(e)^T}D^T\lambda DN^{(e)}c\rho dv$ – теплоемкости;

$A^{(e)} = \int\limits_{(\Delta S)} \alpha N^{(e)^T}N^{(e)}ds$ – конвекции конечных элементов;

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}$$ – матрица коэффициентов теплопроводности;

$$D = \left[\frac{\partial}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial}{\partial z}\right]^T$$ – матрица градиентов.

Минимизация функционала (6) приводит к выражению:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{t}}\sum_{(e)} J^{(e)}(\vec{t}) = 0\,.$$

Подставив выражение элементарного функционала (7), и вводя глобальные матрицы теплоемкости, теплопроводности и теплоотдачи:

$$C = \sum_{(e)} E^{(e)^T}C^{(e)}E^{(e)};$$

$$\Lambda = \sum_{(e)} E^{(e)^T}\Lambda^{(e)}E^{(e)},$$

$$A = \sum_{(e)} E^{(e)^T}A^{(e)}E^{(e)},$$

получим конечно-элементную аппроксимацию уравнения нестационарной теплопроводности (1) и граничных условий (2) в виде единого векторно-матричного дифференциального уравнения:

$$C\,\dot{\vec{t}} = -(\Lambda + A)\,\vec{t} + A\,\vec{T}\,. \qquad (8)$$

В задачах мониторинга выработки ресурса интерес представляет не глобальный вектор температурного состояния, а лишь температура критической точки, в которой накопление повреждений идет с наибольшей скоростью. Поэтому уравнение (8) необходимо дополнить уравнением выхода, выделяющим из глобального вектора состояния температуру критической точки:

$$t_{кр}(\tau) = h\,\vec{t}(\tau). \tag{9}$$

Если критическая точка ($x_{кр}$, $y_{кр}$, $z_{кр}$) находится внутри элемента $e_{кр}$, то исходя из (3) и (5), следует полагать:

$$h = N^{(e_{кр})}_{x_{кр}, y_{кр}, z_{кр}} E^{(e_{кр})},$$

если критическая точка совпадает с узлом i, то i-й элемент матрицы h равен 1, остальные – 0.

2. Модель граничных условий

В качестве температур среды, входящих в граничные условия (2) уравнения теплопроводности (1) и являющихся элементами матрицы $\vec{T}$, обычно берутся локальные температуры торможения на внешней границе или локальные температуры восстановления внутри пограничного слоя [4]. (Для узлов, находящихся внутри детали, температура среды – любое число, в т.ч. нуль, коэффициент теплоотдачи – нуль). В условиях эксплуатации температуры торможения неизвестны и, следовательно, должны быть определены через контролируемые параметры двигателя.

При выполнении обычных условий – постоянства геометрических размеров, сохранения доли воздуха, отбираемого на самолетные нужды, отсутствия влияния числа Рейнольдса на течение газовых потоков и т.п., работа газотурбинных двигателей на верхних эксплуатационных режимах, определяющих выработку ресурса, сопровождается незначительным изменением степени понижения давления турбины низкого давления и еще меньшим – турбины высокого давления [5, 6]. Изменение, так называемых, приведенных параметров на этих режимах обычно не превышает 3% их значения. Влияние на них условий на входе в двигатель – на порядок меньше. Это позволяет использовать приведенные значения параметров проточной части в качестве основы математических моделей температурных условий.

Включим в вектор контролируемых параметров двигателя $\vec{R} \equiv \begin{bmatrix} r & T^*_H & M_\Pi \end{bmatrix}^T$ режимный (определяющий режим) параметр r, число Маха M_Π и температуру торможения на входе в двигатель T^*_H. Представим для i-й точки поверхности детали определение и иерархию точности моделей приведенной температуры среды в виде последовательности:

$$\overline{T}_i \equiv \frac{T^*_i}{n^2} = \overline{T}_i(\vec{R}) \cong \overline{T}_i(r) \approx idem, \tag{10}$$

где T^*_i – локальная температура торможения;

n – частота вращения ротора.

Приняв аналогичные модели для точек s_1 и s_2, в которых размещаются датчики контроля температуры среды, можно получить дополнительные модели:

$$\overline{\overline{T}}_i \equiv \frac{T^*_i}{T^*_{S1}} = \overline{\overline{T}}_i(\vec{R}) \cong \overline{\overline{T}}_i(r) \approx idem; \tag{11}$$

$$\overline{\Theta}_i \equiv \frac{T^*_i - T^*_{S1}}{n^2} = \overline{\Theta}_i(\vec{R}) \cong \overline{\Theta}_i(r) \approx idem; \tag{12}$$

$$\overline{\overline{\Theta}}_i \equiv \frac{T^*_i - T^*_{S2}}{T^*_{S1} - T^*_{S2}} = \overline{\overline{\Theta}}_i(\vec{R}) \cong \overline{\overline{\Theta}}_i(r) \approx idem. \tag{13}$$

Модели типа (10) – (13) предоставляют выбор зависимостей, связывающих локальную температуру среды с контролируемыми параметрами проточной части:

$$\begin{aligned} T^*_i &= \overline{T}_i\, n^2 = \overline{\overline{T}}_i\, T^*_{S1} = T^*_{S1} + \overline{\Theta}_i\, n^2 = \\ &= T^*_{S1} + \overline{\overline{\Theta}}_i (T^*_{S1} - T^*_{S2}). \end{aligned} \tag{14}$$

Из формулы (14) следует, что в общем случае глобальный вектор температурных условий (4) может быть представлен матричным выражением:

$$\vec{T} = G \cdot \vec{U}, \tag{15}$$

в котором G – ($N \times m$)-распределительная матрица и $\vec{U}$ – m-вектор входных сигналов формируются, исходя из выбранной модели температуры среды. Для четырех видов моделей (14) i-я строка матрицы G и вектор $\vec{U}$ соответственно имеют вид:

$$g_i = \overline{\overline{T_i}} \quad \text{и } U = n^2 \text{ (скаляр)};$$

$$g_i = \overline{\overline{T}}_i \quad \text{и } U = T^*_{s1} \text{ (скаляр)};$$

$$g_i = \left[1 \quad \overline{\Theta}_i \right] \text{ и } \vec{U} = \left[T^*_{s1} \quad n^2 \right]^{\text{т}};$$

$$g_i = \left[1 + \overline{\overline{\Theta}}_i \quad - \overline{\overline{\Theta}}_i \right] \text{ и } \vec{U} = \left[T^*_{s1} \quad T^*_{s2} \right]^{\text{т}}.$$

3. Система уравнений мониторинга

Задача мониторинга температурного состояния может быть представлена системой последовательно решаемых уравнений: температурных условий (15), динамики тепловой системы (8) и выхода (9):

$$\begin{cases} \vec{T}(\tau) = G\left(\vec{R}(\tau)\right) \cdot \vec{U}(\tau)\right); \\ C\,\dot{\vec{t}} = -(\Lambda + A)\,\vec{t} + A \cdot \vec{T}(\tau); \\ t_{\text{кр}}(\tau) = h \cdot \vec{t}(\tau). \end{cases} \tag{16}$$

Совмещая термины теории управления и диагностики двигателей, ее можно трактовать как задачу о наблюдении состояния (температуры критической точки) $t_{\text{кр}}(\tau)$ динамической системы {C, Λ, A, G}, управляемой штатно регистрируемыми параметрами проточной части $\vec{U}(\tau)$ и режимными параметрами $\vec{R}(\tau)$.

4. Решение уравнений мониторинга

Решение системы (16) при начальном состоянии $t_{\text{кр}}(\tau_0) = h\vec{t}(\tau_0) = t_0$, сформировавшемся при длительном отсутствии входного воздействия, имеет вид [7, 8]:

$$t_{\text{кр}}(\tau) = t_0 + h(\tau) \times \\ \times \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi(\tau,\eta)\, C^{-1}(\eta) A(\eta)\, G(\vec{R}(\eta))\, \vec{U}(\tau) d\eta, \tag{17}$$

где $\varphi(\tau,\eta)$ – $N \times N$-переходная матрица системы.

В общем случае переходная матрица может быть найдена как матрицант – ряд Неймана:

$$\varphi(\tau,\eta) = I - \int_{\eta}^{\tau} C^{-1}(\Lambda + A) d\tau + \\ + \int_{\eta}^{\tau} C^{-1}(\Lambda + A) \int_{\eta}^{\tau} C^{-1}(\Lambda + A) d\tau d\tau - \ldots \tag{18}$$

Если матрицы C, Λ и A не меняются во времени, то этот ряд превращается в матричную экспоненту:

$$\varphi(\tau - \eta) = (-1)^k \sum_{k=0}^{\infty} \left[C^{-1}(\Lambda + A)(\tau - \eta) \right]^k / k! = \\ = \exp\left\{ -C^{-1}(\Lambda + A) \cdot (\tau - \eta) \right\}.$$

Расчет переходных матриц – бесконечных матричных рядов для каждого момента времени часто требует большего объема вычислений, чем решение системы (16) методом конечных разностей. Это затрудняет прямое использование формул (17) и (18) для эксплуатационного мониторинга.

Другая традиционная форма представления решения уравнений типа (16) имеет вид:

$$t_{\text{кр}}(\tau) = t_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega(\tau, s)\, \vec{U}(\tau) ds, \tag{19}$$

где $\Omega(\tau,\eta) \equiv \left[\omega_1(\tau,\eta) \ldots \omega_j(\tau,\eta) \ldots \omega_m(\tau,\eta) \right]$ – $1 \times m$ – импульсная матричная характеристика, j-й элемент которой – изменение температуры критической точки при изменении j-го элемента вектора $\vec{U}$ в виде единичного импульса (дельта-функции) в момент η при равновесном начальном распределении температуры.

Будем называть переходной характеристикой по j-му входу изменение температуры в критической точке

$$t_{\text{кр}}(\tau) = \Pi_j(\tau, \eta),$$

когда оно является результатом единичного ступенчатого изменения j-го элемента вектора $\vec{U}$ в момент τ = η при равновесном начальном распределении температуры.

Из скалярных переходных характеристик можно образовать переходную матричную характеристику размером $1 \times m$:

$$\Pi(\tau,\eta) \equiv \left[\pi_1(\tau,\eta)...\pi_j(\tau,\eta)...\pi_m(\tau,\eta)\right],$$

которая связана с импульсной матричной характеристикой известными соотношениями [8]:

$$\Pi(\tau,\eta) = \int_{\eta}^{\tau} \Omega(\tau,\eta) d\eta;$$

$$\Omega(\tau,\eta) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\Pi(\tau,\eta)h(\tau). \qquad (20)$$

Для уравнений мониторинга (16) переходная и импульсная матричные характеристики связаны с переходной матрицей соотношениями:

$$\Pi(\tau,\eta) = h\int_{\eta}^{\tau} \varphi(\tau,\eta)C^{-1}(\eta)A(\eta)\,G(\vec{R}(\eta))d\eta,$$

$$\Omega(\tau,\eta) = h\varphi(\tau,\eta)C^{-1}(\eta)A(\eta)\,G(\vec{R}(\eta)).$$

Подставив равенство (20) в формулу (19) и выполнив в ней интегрирование по частям, получим представление решения через переходную матричную характеристику:

$$t_{кр}(\tau) = t_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \Pi(\tau,\eta)\,d\vec{U}(\eta), \qquad (21)$$

где дифференциал $d\vec{U}(\eta) = \frac{\partial\vec{U}(\eta)}{\partial\eta}d\eta$ – следует рассматривать как обобщенную функцию, которая может содержать конечные скачки значений.

Количество регистрируемых параметров, "управляющих" тепловым состоянием, обычно невелико ($m = 1...3$), и если матрицы C, Λ, A, G постоянны, то для ведения мониторинга необходимы соответственно 1...3 скалярные переходные характеристики $\pi_j(\tau, \eta)$. В общем случае характеристики должны быть получены предварительно, например расчетом ступенчатых переходных процессов по конечно-элементным моделям высокого уровня.

Доводом в пользу использования переходных характеристик является то, что они являются идеализацией реальных переходных процессов, протекающих при изменении режимов работы двигателя, и их расчетные значения могут быть уточнены по результатам экспериментальных исследований. В отличие от переходного, режим импульсного нагрева деталей практически нереализуем даже при испытаниях двигателей в стендовых условиях.

Литература

1. Комплекс программно-методических средств для учета выработки ресурса авиационных ГТД в системах диагностической обработки его параметров/ Д.Ф. Симбирский, А.В. Олейник, В.И. Колесников и др. // Авіаціоно–космічна техніка і технологія. – Харьков: ХАИ, 2001. – Вып. 26. Двигатели и енергоустановки. – С. 163 – 166.
2. Копелев С.З., Слитенко А.Ф. Конструкции и расчет систем охлаждения ГТД. – Харьков: Изд–во «Основа», ХГУ, 1994. – 240 с.
3. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.
4. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – М.: Машгиз, 1962. – 456 с.
5. Кулагин В.В. Теория газотурбинных двигателей: Кн. 2. Совместная работа узлов, характеристики и газодинамическая доводка выполненного ГТД. – М.: Изд–во МАИ, 1994. – 304 с.
6. Теория двухконтурных реактивных двигателей/ Под ред. С.М. Шляхтенко, В.А. Сосунова. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
7. Симбирский Д.Ф. Температурная диагностика двигателей. Пленочная термометрия оптимальные оценки. – К.: Техніка, 1976. – 207 с.
8. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления (для инженеров). – М.: Наука, 1970. – 620 с.

Поступила в редакцию 20.05.2004

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Д.Ф. Симбирский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.