УДК 629.78.054

И.Н. БАНДУРА, В.Ф. СИМОНОВ

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ВЕКТОРА УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В данной статье синтезируется направление вектора управляющего момента, при котором обеспечивается минимизация расхода рабочего тела, необходимого для гашения или набора вектора угловой скорости, произвольно направленного относительно осей связанной системы координат O_{XYZ} космического аппарата (КА).

космический аппарат, управление угловым положением, вектор угловой скорости, оптимальное направление вектора управления, расход рабочего тела, принцип максимума Понтрягина

Введение

Одним из основных показателей качества систем управления угловым положением КА является расход рабочего тела. Минимизация расходов рабочего тела, необходимого для управления пространственным угловым положением КА с использованием реактивных микродвигателей, обеспечивается частично за счет реализации алгоритмов, оптимизирующих расход рабочего тела [1 – 3], частично за счет оптимального направления вектора управления. При этом второму направлению в литературе внимания практически не уделено.

В статье делается попытка восполнить этот пробел. При синтезе направления вектора управляющих моментов будем рассматривать управление вектором угловой скорости КА, так как последний определяет величину расхода рабочего тела, а управление положением КА вокруг центра масс (демпфирование, развороты и стабилизация) легко сводится к задаче набора или гашения суммарного вектора угловой скорости. Для упрощения выкладок будем рассматривать только процесс гашения вектора угловой скорости (результаты полностью применимы для случая набора скорости).

1. Формулирование проблемы

При пренебрежении возмущающими моментами уравнения движения КА [4, 5] в векторной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\omega}} &= \bar{f}(\overline{\omega}) + \overline{m}; \\ \overline{\omega}(t_0) &= \overline{\omega}_0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\overline{\omega}$ – вектор угловой скорости;

$\overline{m}$ – приведенный вектор управляющего момента.

Норма вектора управляющего момента ограничена по величине:

$$\|\overline{m}\| \le m_{\max} . \qquad (2)$$

Указанные допущения являются приемлемыми, так как на пассивных участках время гашения или набора вектора угловой скорости является незначительным и возмущающим импульсом можно пренебречь. При этом предполагается, что управляющий момент, создаваемый реактивными микродвигателями и ограниченный по величине, значительно больше возмущающего момента.

Задача ставится следующим образом: найти направление вектора управляющего момента, переводящего систему (1) из любого заданного исходного состояния $\overline{\omega}_0$ в начало координат фазового пространства при минимуме расхода рабочего тела. Другими словами, требуется найти вектор управляющего момента $\overline{m}$, уменьшающий норму $\|\overline{\omega}\|$ от $\overline{\omega}_0$ до 0 при минимуме расхода рабочего тела.

2. Синтез оптимального направления вектора управления

Производная от длины вектора $\overline{\omega}$, вычисляемая непосредственным дифференцированием

$$\|\omega\| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2},$$

определяется по формуле

$$\frac{d}{dt}\|\overline{\omega}\| = \frac{\langle\dot{\overline{\omega}}, \overline{\omega}\rangle}{\|\omega\|}, \tag{3}$$

где символ $\langle\dot{\overline{\omega}}, \overline{\omega}\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов $\dot{\overline{\omega}}$ и $\overline{\omega}$; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости на связанные оси.

Подставляя (1) в (3), получим

$$\frac{d}{dt}\|\overline{\omega}\| = \frac{\langle\bar{f}(\overline{\omega}), \overline{\omega}\rangle}{\|\overline{\omega}\|} + \frac{\langle\overline{m}, \overline{\omega}\rangle}{\|\overline{\omega}\|}. \tag{4}$$

Для осесимметричных $(I_y = I_z \neq I_x)$ и абсолютно симметричных $(I_x = I_y = I_z)$ объектов

$$\langle\bar{f}(\overline{\omega}), \overline{\omega}\rangle = 0,$$

где I_x, I_y, I_z – центральные моменты инерции космического аппарата.

В этом случае уравнение (4) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\|\overline{\omega}\| = \left\langle\overline{m}, \frac{\overline{\omega}}{\|\omega\|}\right\rangle. \tag{5}$$

Для асимметричных объектов

$$\langle\bar{f}(\overline{\omega}), \overline{\omega}\rangle = \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} + \frac{I_z - I_x}{I_y} + \frac{I_x - I_y}{I_z}\right)\times$$
$$\times\frac{\omega_x\omega_y\omega_z}{\|\overline{\omega}\|} \neq 0,$$

но так как здесь синтезируется управляющий момент, то и в этом случае можно рассматривать уравнение (5).

Вводя следующие обозначения:

$$x = \|\overline{\omega}\|; \tag{6}$$

$$u = \langle\overline{m}, \frac{\overline{\omega}}{\|\overline{\omega}\|}\rangle, \tag{7}$$

запишем уравнение (5) в виде:

$$\dot{x} = u. \tag{8}$$

Таким образом, исходная трехмерная система сведена к одномерной (8). Определим ограничения, накладываемые на u, используя неравенство Шварца $\left(|\langle\bar{x}, \bar{y}\rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|\right)$ для уравнения (7), получим

$$|u| = \left|\left\langle\overline{m}, \frac{\overline{\omega}}{\|\overline{\omega}\|}\right\rangle\right| \leq \|\overline{m}\| \cdot \left\|\frac{\overline{\omega}}{\|\overline{\omega}\|}\right\| \leq m_{\max}. \tag{9}$$

Расход рабочего тела характеризуется функционалом $I = \int_0^T |u| dt$, где T не задано.

Найдем u, минимизирующее функционал I, применяя принцип максимума Понтрягина [6, 7]. Гамильтониан H для этой задачи имеет вид:

$$H = |u| + u\varphi,$$

где φ – неопределенный множитель Лагранжа.

Переменная φ определяется из уравнения

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

поэтому $\varphi = c_1$, где c_1 – константа; так как $x_0 = \|\overline{\omega}_0\| > 0$, то оптимальное управление имеет следующий вид:

$$u = -m_{\max} \text{ для } t \in [0, T]. \tag{10}$$

Величина расхода рабочего тела при этом равна

$$G_{опт} = |\overline{\omega}_0| \cdot c, \tag{11}$$

где c – константа.

Из неравенства (9) видно, что $m = m_{\max}$ в том случае, если векторы $\overline{m}$ и $\frac{\overline{\omega}}{\|\overline{\omega}\|}$ коллинеарны.

На основании полученных результатов можно сделать следующее заключение.

Расположение управляющего исполнительного органа системы управления угловым положением космического аппарата является оптимальным с точки зрения расхода рабочего тела, если вектор управляющего момента коллинеарен и направлен противоположно вектору угловой скорости.

Положение вектора $\overline{\omega}$, направленного по оси x_ω относительно осей связанной системы координат будем характеризовать направляющими косинусами.

Вектор $\overline{\omega}$ составляет угол δ_1 с осью x, угол δ_2 с осью y и δ_3 с осью z.

Замеряя составляющие угловой скорости на осях связанной системы координат, можно определить направление $\overline{m}$ с помощью следующих формул:

$$\delta_1' = \arccos\frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}} + \pi;$$
$$\delta_2' = \arccos\frac{\omega_y}{\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}} + \pi; \qquad (12)$$
$$\delta_3' = \arccos\frac{\omega_z}{\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}} + \pi,$$

где $\delta_1', \delta_2', \delta_3'$ – углы между вектором $\overline{m}$ и осями x, y, z соответственно.

Следует подчеркнуть, что указанное управление обеспечивает еще и минимальное значение времени гашения вектора угловой скорости. Следовательно, незаданное T – минимально возможное. При этом реализовать такое управление, чтобы вектор управляющего момента в течение всего времени управления был бы направлен по оси x_ω, технически сложно.

Однако знание требуемого положения управляющего двигателя позволяет построить систему, близкую к оптимальной, а также оценить увеличение расходов рабочего тела для реальных систем.

Заключение

В данной статье приведен синтез направления вектора управляющего момента, при котором обеспечивается минимизация расхода рабочего тела, необходимого для гашения или набора вектора угловой скорости космического аппарата.

На основании полученных результатов можно сделать следующее заключение: расположение управляющего исполнительного органа системы управления угловым положением космического аппарата является оптимальным с точки зрения расходов рабочего тела, если вектор управляющего момента коллинеарен и противоположно направлен вектору угловой скорости.

Литература

1. Разоренов Г.Н., Бахрамов Э.А., Титов Ю.Ф. Системы управления летательными аппаратами (баллистическими ракетами и их головными частями) / Под ред. Г.Н. Разоренова. – М.: Машиностроение, 2003. – 584 с.

2. Микрин Е.А. Бортовые комплексы управления космическими аппаратами и проектирование их программного обеспечения. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 336 с.

3. Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. – М.: БИНОМ: Лаборатория знаний, 2004. – 375 с.

4. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Наука, 1961. – 824 с.

5. Разыграев А.П. Основы управления полетом комических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1990. – 780 с.

6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.

7. Методы классической и современной теории автоматического управления: В 5-ти т.; 2-е изд., перераб. и доп. – Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.

Поступила в редакцию 18.02.2005

Рецензент: д-р техн. наук В.А. Батаев, НПП «Хартрон-Аркос», Харьков.