УДК 629.7:534.1

И.Г. НЕМАН

Харьковский авиационный институт, Украина

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С НАКЛОННЫМИ ГЛАВНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ УПРУГОСТИ. ЧАСТЬ II. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ ПРИ СДВИГЕ И СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СЖАТИЯ И СДВИГА

Изложена реализация приближенного метода определения критических усилий в бесконечно длинной ортотропной пластине с наклонными главными направлениями осей упругости относительно действующих усилий при сдвиге и совместном действии сжатия и сдвига.
Результаты получены автором до 1946 года и до настоящего времени не были опубликованы.

устойчивость, бесконечно длинная ортотропная пластина, упругость, сжатие, сдвиг, критические усилия, приближенный метод.

§1. Случай действия касательной нагрузки

В случае действия изолированной касательной нагрузки дифференциальное уравнение равновесия принимает вид*):

$$K_t = (2\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)}+ \\ +6+s\beta^3-4s\beta\alpha+s\alpha^2+ \\ 6T\alpha^2\beta^2)/(2(\beta+\alpha)(\beta\alpha-1)). \quad (1)$$

Приравняем нулю первую производную α:

$$\frac{\partial K_t}{\partial\alpha} = \left(2\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\left[1-2\beta\alpha-\beta^2- \right.\right. \\ \left. -s\beta\alpha\left(1+\alpha^2\right)+T\alpha^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\alpha^2\right)\right]+ \\ +6\left(1-2\beta\alpha-\beta^2\right)+s\left(5\beta^2-\alpha^4+5\beta^2\alpha^2- \right. \\ \left. -\beta^4-2\beta\alpha-2\beta^3\alpha\right)+6T\beta^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\alpha^2\right)\Big)/ \\ /\left(2(\beta+\alpha)^2(\beta\alpha-1)^2\right)=0. \quad (2)$$

Из этого уравнения находим α, соответствующее заданному β. Определяем $\frac{\partial^2 K_t}{\partial\alpha^2}$ (уравнение (6), см. ниже). Если $\frac{\partial^2 K_t}{\partial\alpha^2}$ положительно, то вставив β и соответствующее ему из уравнения (2) α в выражение (1), получаем коэффициент критической касательной нагрузки K_t.

Заметим, что каждому β с соответствующими ему α, $\frac{\partial^2 K_t}{\partial\alpha^2}$, $K_{t\,\min}$ сопутствует $-\beta$ с соответствующими $-\alpha$, $-\frac{\partial^2 K_t}{\partial\alpha^2}$ и K_t с одинаковыми абсолютными значениями. $-K_t$ является максимум в отрицательной области значений касательных нагрузок. То есть это критическая нагрузка сдвига противоположного направления с K_t при зеркальном отображении главных жесткостей относительно геометрической оси пластины. Инженерно оба случая равноценны.

В дальнейшем будем рассматривать только одно значение β и соответственно искать K_t критическое как минимум функции K_t.

Для нахождения $K_t\max$ и $K_t\min$ коэффициентов критической нагрузки и соответствующих им

*) уравнение равновесия, полученное автором, приведено в предыдущей публикации журнала. В (1) обозначено: $s = 2\,(D_{xy} / D_x)$, $T = D_y / D_x$, где D_x – максимальная жесткость пластины в направлении оси x; D_y – минимальная жесткость пластины в направлении оси y; $D_{xy} = 2D_k + \mu_x D_y + \mu_y D_x$, D_k – жесткость кручения, μ_x, μ_y – коэффициенты Пуассона.

наклонов главного направления мы к уравнению (2) добавляем уравнение $\frac{\partial K_t}{\partial \beta}=0$, что дает:

$$\left(2\sqrt{\frac{1+s\alpha^2+T\alpha^4}{1+s\beta^2+T\beta^4}}\left[1-2\beta\alpha-\alpha^2-\right.\right.$$
$$\left.s\beta\alpha\left(1+\beta^2\right)+T\beta^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\beta^2\right)\right]+$$
$$+6\left(1-2\beta\alpha-\alpha^2\right)+s\left(5\alpha^2-\beta^2+5\beta^2\alpha^2-\right.$$
$$\left.-\alpha^4-2\beta\alpha-2\beta\alpha^3\right)+6T\alpha^2\left(\beta^2\alpha^2-\right. \tag{3}$$
$$\left.\left.-2\beta\alpha-\beta^2\right)\right)/\left(2(\beta+\alpha)^2(\beta\alpha-1)^2\right)=0.$$

Рациональные члены уравнения (2) и (3) переносим в правую сторону и, разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left[1-2\beta\alpha-\beta^2-\right.$$
$$\left.-s\beta\alpha\left(1-\alpha^2\right)+T\alpha^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\alpha^2\right)\right]\times$$
$$\times\left\{6\left(1-2\beta\alpha-\beta^2\right)+s\left[5\alpha^2-\beta^2+5\beta^2\alpha^2-\alpha^4-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\beta\alpha\left(1+\alpha^2\right)\right]+6T\alpha^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\beta^2\right)\right\}-$$
$$-\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)\left[1-2\beta\alpha-\alpha^2-s\beta\alpha\left(1+\beta^2\right)+\right.$$
$$\left.+T\beta^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\beta^2\right)\right]\times \tag{4}$$
$$\times\left\{6\left(1-2\beta\alpha-\alpha^2\right)+s\left[5\beta^2-\alpha^2+\right.\right.$$
$$\left.+5\beta^2\alpha^2-\beta^4-2\beta\alpha\left(1+\beta^2\right)\right]+$$
$$\left.+6T\beta^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\alpha^2\right)\right\}=0.$$

После алгебраических операций уравнение (4) приведем к следующему виду:

$$(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)^3(\beta\alpha-1)\left\{4s+s^2\left(1-\right.\right.$$
$$\left.-\beta\alpha+\beta^2+\alpha^2\right)+s^3\beta\alpha(1+\beta\alpha)+$$
$$+12T\left(\beta^2+\alpha^2+\beta\alpha-1\right)+$$
$$+12T^2\beta\alpha\left[\beta^2+\alpha^2-\beta\alpha(\beta\alpha-1)\right]- \tag{5}$$
$$-4sT\left(\beta^2+\alpha^2-2\beta\alpha\right)(1+\beta\alpha)+$$
$$s^2T\beta\alpha\left[\beta\alpha(\beta\alpha-5)-\left(\beta^2+\alpha^2\right)\right]+$$
$$\left.+4sT^2\beta^3\alpha^3\right\}=0.$$

Это уравнение дает три возможных связи между β и α, в которые не входят S и T:

$$\beta-\alpha=0;\quad \beta+\alpha=0;\quad \beta\alpha-1=0.$$

Фигурные скобки дают четвертую связь

$$f(s,T,\beta,\alpha)=0.$$

Используя первую связь в уравнении (2), получим

$$8-24\beta^2-24T\beta^4+8T\beta^6=0.$$

Дискриминант этого кубического уравнения относительно β^2 больше нуля, что дает для β 3 вещественных корня:

$$\beta_1=\pm\sqrt{1+2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\cos\frac{1}{3}\left(\arccos\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)};$$

$$\beta_2=\pm\sqrt{1-2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\cos\left(60^\circ-\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)};$$

$$\beta_3=\pm\sqrt{1-2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\cos\left(60^\circ+\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)}.$$

Вторая связь дает нам уравнение

$$1+(1+s)\beta^2+(s+T)\beta^4+T\beta^6=0.$$

Так как все его коэффициенты положительные, то β не имеет вещественных корней.

Третья связь приводит уравнение (2) к следующему виду:

$$\left(1+\beta^2\right)\left[2\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}+\frac{T}{\beta^4}\right)}+\right.$$
$$\left.+6+\frac{s}{\beta^2}-4s+s\beta^2+6T\right]=0.$$

Так как $s \not> 2$ и

$$6+\frac{s}{\beta^2}-4s+s\beta^2+6T>6-2s+6T>0,$$

то данное уравнение дает только мнимые корни.

Рассмотрим полученные три корня β_1, β_2, β_3. Докажем, что β_1 и β_3 вещественны, а β_2 – мнимый.

Рассмотрим их подкоренное выражение:

а) для β_1 оно положительное;

б) для β_2 оно отрицательное, действительно:

$$1-2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\cos\left(60^\circ-\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)<$$
$$<1-2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\cos 60^\circ=1-\sqrt{\frac{1+T}{T}}<0;$$

в) для β_3 оно положительное, действительно, учтя, что $\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right) \le \frac{x}{2}$, получаем:

$$1-2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\cos\left(60^\circ+\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)=$$

$$=1-2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)>$$

$$>1-2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{1+T}}=0.$$

Таким образом, экстремумы получаем для двух значений β: β_1 и β_3.

Чтобы выяснить, какие экстремумы K_t дают эти значения β, берем вторые производные от K_t. Нас интересует значение вторых производных только для наших корней. Входящие в их выражение члены, имеющие множителем числитель первой производной, равны нулю. Эти вторые производные отмечаем звездочкой. Они имеют в знаменателе знаменатель первой производной, а в числителе – производную ее числителя:

$$\frac{\partial^2 K_e^*}{\partial\alpha^2}=\left(2\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\left[\frac{-s\alpha-2T\alpha^3}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}\times\right.\right.$$
$$\left.\times\left(1-2\beta\alpha-\beta^2-s\beta\alpha-s\beta\alpha^3+T\beta^2\alpha^4-2T\beta\alpha^3-T\alpha^4\right)\right]+$$
$$+2\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\left(-2\beta-s\beta-3s\beta\alpha^2+\right.$$
$$\left.+4T\beta^2\alpha^3-6T\beta\alpha^2-4T\alpha^3\right)-12\beta-2s\alpha- \qquad (6)$$
$$-2s\beta+10s\beta^2\alpha+-2s\beta^3+12T\beta^2\left(\beta^2\alpha-\right.$$
$$\left.\left.-\beta-\alpha\right)\right)\Big/2(\beta+\alpha)^2(\beta\alpha-1)^2,$$

$$\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\alpha\partial\beta}=(2\frac{s\beta+T\beta^3}{\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)}}\times$$
$$\times\left(1-2\beta\alpha-\beta^2-s\beta\alpha-s\beta\alpha^3+T\beta^2\alpha^4-\right.$$
$$\left.-2T\beta\alpha^3-T\alpha^4\right)+2\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\times$$
$$\times\left(-2\alpha-2\beta-s\alpha-s\alpha^3+2T\beta\alpha^4-2T\alpha^3\right)- \qquad (7)$$
$$-12\alpha-12\beta+S\left(10\beta-2\alpha+10\beta\alpha^2-\right.$$
$$\left.-6\beta^2\alpha-4\beta^5\right)+12T\left(2\beta^3\alpha^2-\right.$$
$$\left.\left.-3\beta^2\alpha-\beta\alpha^2\right)\right)\Big/2(\beta+\alpha)^2(\beta\alpha-1)^2.$$

Для разбираемых случаев $\alpha=\beta$. Поэтому:

$$\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\alpha^2}=\left(\beta\left[\frac{s\beta^2\left(1+\beta^2\right)\left(s+2T\beta^2\right)}{1+s\beta^2+T\beta^4}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-8-3s+s\beta^2+10T\beta^4-22T\beta^2\right]\right)\Big/$$
$$\Big/(2\beta)^2\left(\beta^2-1\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\alpha\partial\beta}=\left(\beta\left[\frac{-s\beta^2\left(1+\beta^2\right)\left(s+2T\beta^2\right)}{1+s\beta^2+T\beta^4}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-16+3s-s\beta^2-26T\beta^2+14T\beta^4\right]\right)\Big/$$
$$\Big/(2\beta)^2\left(\beta^2-1\right)^2.$$

Знак $\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\alpha^2}$ получаем произведением знака β и знака множителя, стоящего в квадратных скобах.

Предварительно найдем пределы изменения величин β_1 и β_3:

$$T<1;\ \ 0<\sqrt{\frac{T}{1+T}}<\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$0,965=\cos 15^\circ>\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)>$$
$$>\cos 30^\circ=0,865$$

и
$$1+1,93\sqrt{\frac{1+T}{T}}>\beta_1^2>1+1,73\sqrt{\frac{1+T}{T}},$$

а
$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{T}{1+T}}<\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)<$$
$$<0,366\sqrt{\frac{T}{1+T}}$$

и
$$\frac{1}{3}>\beta_3^2>0,268.$$

Вставив найденные предельные значения в квадратную скобку числителя $\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\alpha^2}$, убедимся, что она положительна при любом значении β_1, и отрицательна при любом значении β_3, а от их знака не зависит.

Отсюда заключаем, что для интересующего нас K_t, определяемого условием $\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\alpha^2}$, остаются только положительные значения β_1 и отрицательные β_3.

Найдем знак дискриминанта:

$$\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2=\Big(24\left(-1-2T\beta^2+\right.$$
$$\left.+T\beta^4\right)\ \Big[2\left(1-s+T\right)+\left(4s-s^2-4T\right)\beta^2+$$
$$+\left(s^2+2sT-2T-6T^2\right)\beta^4\Big]\Big)/$$
$$/\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(\beta^2-1\right)^2.$$

Первый множитель числителя положителен при $\beta=\beta_1$ и отрицателен при $\beta=\beta_3$.

Второй множитель – положителен при $\beta=\beta_3$. В этом случае дискриминант отрицателен. Отсюда следует, что β_3 дает K_t максимум.

При $\beta=\beta_1$ второй множитель может получать значения как положительное, так и отрицательное, в зависимости от значений s и T.

Этот множитель равен нулю при

$$S_0=\left(1-2\beta_1^2-T\beta_1^4\ +\sqrt{\left(1-2\beta_1^2-T\beta_1^4\right)^2-r}\right)/$$
$$/\left(\beta_1^4-\beta_1^2\right)=f\left(t\right),$$

где $r=2\left(1+T-2T\beta_1^2-T\beta_1^4-3T^2\beta_1^4\right)\left(\beta_1^4-\beta_1^2\right)$;

$$\beta_1^2=\varphi(T)=1+2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\cos\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{T}{1+T}}.$$

При $S>S_0$ второй множитель положительный, при $S<S_0$ – отрицательный.

Отсюда следует, что при $S>S_0$ β дает $K_{t\min}$, а при $S<S_0$ – еще один K_t максимум. Но отсюда приходится делать вывод, что в случае $S<S_0$ имеются еще экстремальные (минимумы) значения функции K_t и, следовательно, соответствующие им значения β, которые являются корнями наших уравнений (2) и (3).

Эти корни должны удовлетворять связи, которую дает четвертый множитель уравнения (5).

Для нахождения этих дополнительных корней перемножаем уравнения (2) и (3). Получаем:

$$32\left[1-4\beta\alpha+5\beta^2\alpha^2-\left(1-2\beta\alpha\right)\left(\beta^2+\alpha^2\right)\right]+$$
$$+8s\Big[-2\beta\alpha\left(1-2\beta\alpha+7\beta^2\alpha^2\right)+$$
$$+\left(3-6\beta\alpha-\beta^2\alpha^2\right)\left(\beta^2+\alpha^2\right)+\beta\alpha\left(\beta^2+\alpha^2\right)^2\Big]-$$
$$-4T[20\beta^2\alpha^2\left(1-4\beta\alpha+\beta^2\alpha^2\right)+$$
$$+\left(\beta^2+\alpha^2\right)^3-\left(1-4\beta\alpha+\beta^2\alpha^2\right)\left(\beta^2+\alpha^2\right)^2+$$
$$+4\beta\alpha\left(4-13\beta\alpha+4\beta^2\alpha^2\right)\left(\beta^2+\alpha^2\right)+$$
$$+s^2\Big[12\beta^2\alpha^2\left(3-4\beta\alpha+3\beta^2\alpha^2\right)+ \tag{8}$$
$$+\left(\beta^2+\alpha^2\right)^3-\left(5-4\beta\alpha+5\beta^2\alpha^2\right)\times$$
$$\times\left(\beta^2+\alpha^2\right)-2\beta\alpha\left(4-6\beta\alpha+4\beta^2\alpha^2\right)\times$$
$$\times\left(\beta^2+\alpha^2\right)\Big]+32T^2\beta^3\alpha^3\left[\beta\alpha\left(5-4\beta\alpha+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta^2\alpha^2\right)+\left(2-\beta\alpha\right)\left(\beta^2+\alpha^2\right)\right]-$$
$$-8sT\beta\alpha\Big[2\beta^2\alpha^2\left(7-2\beta\alpha+\beta^2\alpha^2\right)+$$
$$+\beta\alpha\left(1+6\beta\alpha-3\beta^2\alpha^2\right)-\left(\beta^2+\alpha^2\right)^2\Big]=0.$$

Приравняв нулю множитель в фигурных скобках уравнения (5), получаем

$$\beta^2+\alpha^2=(4s+s^2\left(1-\beta\alpha\right)-$$
$$-s^3\beta\alpha\left(1+\beta\alpha\right)+12T\left(\beta\alpha-1\right)+$$
$$+12T^2\beta^2\alpha^2\left(\beta\alpha-1\right)+ \tag{9}$$
$$+8sT\left(1+\beta\alpha\right)\beta\alpha+sT^2\beta^2\alpha^2\left(\beta\alpha-s\right)+$$
$$+4sT^2\beta^3\alpha^3)/(s^2T\beta\alpha+4sT\left(1+\beta\alpha\right)-$$
$$-12T^2\beta\alpha-12T-s^2).$$

Вставив в эти уравнения конкретные значения s и T и заменив в уравнении (8) $\beta^2+\alpha^2$ выражением (9), получаем уравнение не выше 9[й] степени относительно $\beta\alpha$. Определив β и α, проверяем, удовлетворяют ли они условиям $\frac{\partial K_t}{\partial\alpha}=0$ и $\frac{\partial K_t}{\partial\beta}=0$. Потом отбираем те из них, которые дают $\frac{\partial^2 K_t}{\partial\alpha^2}>0$ и проверяем знак дискриминанта

$$\frac{\partial^2 K_t}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 K_t}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 K_t}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2.$$

Заметим, что всякой паре значений $\beta = a$ и $\alpha = в_1$, удовлетворяющей нашим условиям, сопутствует пара $\beta = в$ и $\alpha = a_1$, дающая ту же величину $\beta\alpha$. Отсюда следует требование, чтобы

$$\frac{\partial^2 K_t^*}{\partial\beta^2} > 0.$$

Отсюда следует вывод, что коэффициент критической касательной нагрузки K_t, принимая различные значения при различных наклонах главного направления, имеет максимальное значение при

$$\beta_3 = -\sqrt{1-2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)} \qquad (10)$$

и минимальное значение при

$$\beta_1 = \sqrt{1+2\sqrt{\frac{1+T}{T}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{T}{1+T}}\right)}, \qquad (11)$$

если $S > S_0$.

Если $S < S_0$, то β_1 дает второе значение $K_{t\max}$, которое меньше значения $K_{t\max}$ при β_3, а $K_{t\min}$ определяется другими значениями, которые находятся из уравнений (8) и (9).

Для значений β_3 и β_1 значения K_{t_3} имеют следующее выражение:

$$K_{t_3} = \frac{2\left(1+T\beta^4\right)}{\beta\left(\beta^2-1\right)}. \qquad (12)$$

Отметим, что β_3 дает $5,65 \ge K_{t\max} > 5,2$ – верхнее значение для $\frac{D_y}{D_x} = 1$, нижнее – для $\frac{D_y}{D_x} = 0$.

§2. Совместное действие сжимающей и касательной нагрузок

В случае совместного действия сжатия со сдвигом принимаем $K_{t_c} = mK_{q_c}$, и тогда дифференциальное уравнение равновесия, полученное в (1), записываем в следующем виде:

$$K_{q_c} = \Big(2\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)}+ +6+s\beta^2-4s\beta\alpha+s\alpha^2+6T\beta^2\alpha^2\Big)/ /\Big(\left(\beta+\alpha\right)^2+m2\left(\beta+\alpha\right)\left(\beta\alpha-1\right)\Big). \qquad (13)$$

Приравниваем нулю первую производную по α:

$$\frac{\partial K_q}{\partial\alpha} = \Bigg(\Bigg[2\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\left(s\alpha+2T\alpha^3\right)- -4s\beta+2s\alpha+12T\beta^2\alpha^2\Bigg]\Big[\left(\beta+\alpha\right)^2+ +2m\left(\beta+\alpha\right)\left(\beta\alpha-1\right)\Big]- -\Big[2\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^2\right)\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)}+ +6+s\beta^2-4s\beta\alpha+6T\beta^2\alpha^2\Big]\Big[2\left(\alpha+\beta\right)+ +2m\left(2\beta\alpha-1+\beta^2\right)\Big]\Bigg)/ /\Big[\left(\beta+\alpha\right)^2+2m\left(\beta+\alpha\right)\left(\beta\alpha-1\right)\Big]^2 = 0. \qquad (14)$$

Из этого уравнения находим α, соответствующее заданному β, при принятом значении $m = t/q$.

Рассмотрим взаимозависимость K_{q_c} и K_{t_c} при совместном действии сжатия и сдвига.

Для практических целей необходимо иметь связь между K_{q_c} и K_{t_c} при любом наклоне главного направления упругости.

Для составления такой зависимости разрешаем уравнение (14) относительно m:

$$m = \Bigg(\Bigg[\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\left(2-s\beta\alpha+s\alpha^2- -2T\beta\alpha^3\right)+3\left(2-s\beta\alpha+s\beta^2-2T\beta^3\alpha\right)\Bigg]\times \times\left(\beta+\alpha\right)\Bigg)/\Bigg(2\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\times \times\Big[1-2\beta\alpha-\beta^2-s\beta\alpha\left(1+\alpha^2\right)+ +T\alpha^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\alpha^2\right)\Big]+R\Bigg), \qquad (15)$$

где $R = 6\left(1-2\beta\alpha-\beta^2\right)+s\left(5\beta^2-\alpha^2+ +5\beta^2\alpha^2-\beta^4-2\beta\alpha-2\beta^3\alpha\right)+ +6T\beta^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\alpha^2\right).$

Вставив это значение m в уравнение (13), получаем K_{q_c} и K_{t_c}, выраженные через параметр α:

$$K_{q_c}=\Bigg(2\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\Big[1-2\beta\alpha-\beta^2- -s\beta\alpha\left(1+\alpha^2\right)+T\alpha^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha-\alpha^2\right)\Big]+ +6\left(1-2\beta\alpha-\beta^2\right)+s\left(5\beta^2-\alpha^2+5\beta^2\alpha^2- -\beta^4-2\beta^3\alpha\right)+6T\beta^2\left(\beta^2\alpha^2-2\beta\alpha- -\alpha^2\right)\Bigg)\Big/\left(-\left(1+\beta^2\right)(\beta+\alpha)^2\right); \tag{16}$$

$$K_{t_c}=\Bigg(2\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+s\alpha^2+T\alpha^4}}\left(2-s\beta\alpha+ +s\alpha^2-2T\beta\alpha^3\right)+3\left(2-s\beta\alpha+s\beta^2- -2T\beta^3\alpha\right)\Bigg)\Big/\left(-\left(1+\beta^2\right)(\beta+\alpha)\right). \tag{17}$$

Задавшись определенным β, вставляем в (16) и (17) значения α от α_β до $-\alpha_{-\beta}$, понимая под α_β значение, соответствующее критической нагрузке чистого сдвига.

Откладываем K_{q_c} по вертикали и K_{t_c} по горизонтали. Соединив точки плавной линией, получим график зависимости от K_{t_c} для принятого β.

§3. β-оптимум – наивыгоднейшее отношение касательной нагрузки и сжимающей

В изотропных пластинах при совместном действии критические значения сжимающей и касательной нагрузок меньше, чем при изолированно действующей нагрузке.

В ортотропной пластине могут быть случаи повышения $q_{крит}$ при добавлении касательной нагрузки. Для нахождения условий, дающих повышение $q_{крит}$ совместного действия по сравнению с чистым сжатием, проанализируем влияние m. Для этого к уравнению (14) добавим еще уравнение $\frac{\partial K_{q_c}}{\partial m}=0$. Получаем следующую зависимость:

$$2(\beta+\alpha)(\beta\alpha-1)=0. \tag{18}$$

Условие $\beta+\alpha=0$ дает $K_{qc}=\infty$. Поэтому оно отпадает. Остается $\alpha=1/\beta$.

Вставив это значение α в уравнение (13) или (16) и в (17), получаем максимально возможное значение $K_{q_{co}}$ для данного β и соответствующее ему значение $K_{t_{co}}$:

$$K_{q_{co}}=\left(2\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}+\frac{T}{\beta^4}\right)}+ +6+s\left(\beta^2-4+\frac{1}{\beta^2}\right)+6T\right)\Big/\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2, \tag{19}$$

$$K_{t_{co}}=\left(\sqrt{\frac{1+s\beta^2+T\beta^4}{1+\frac{s}{\beta^2}+\frac{T}{\beta^4}}}\left(2-s+\frac{s}{\beta^2}-\frac{2T}{\beta^2}\right)+ +3\left(2+s\beta^2-s-2T\beta^2\right)\right)\Big/\left(-\beta\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2\right). \tag{20}$$

При $D_y<D_{xy}<D_x$ числитель выражения $K_{t_{co}}$ всегда положительный.

Отсюда $SiqnK_{t_{co}}=-Siqn\beta$, т.е. касательная нагрузка должна быть приложена под тупым углом к главному направлению упругости.

Докажем, что при этом

$$-\beta\left(\beta^2-1\right)6(1-s+T)\times K_{q_{c0}}>Kq_{из}.$$

Для $Kq_{из}$ мы получаем, как минимум выражение,[*)]

$$K_q=\left(2\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(1+s\alpha^2+T\alpha^4\right)}+ +6+s\beta^2-4s\beta\alpha+s\alpha^2+6T\alpha^2\beta^2\right)/(\beta+\alpha)^2. \tag{21}$$

$K_{q_{c0}}$ получаем, приняв $\alpha\beta=1$ в выражении (13). Но последнее условие обращает в тождество уравнения (21) и (13). Значит, $K_{q_{из}}$ мы получаем как абсолютный минимум, а $K_{q_{c0}}$ получаем как условный минимум (связь $\alpha\beta=1$) одного и того же вы-

*) Это выражение получено автором в предыдущей публикации данного журнала: см формулу (13) этой публикации (прим. ред.).

ражения. Отсюда и следует написанное выше неравенство.

Это неравенство верно не только для одного значения $K_{t_{c0}}$, но и для близких к нему значений K_{t_c}.

На этом основании формулируем следующее:

В бесконечно-длинной ортотропной пластине с наклонным главным направлением упругости, нагруженной сжимающей нагрузкой, при добавлении касательной нагрузки, действующей под тупым углом к главному направлению упругости, мы в некотором диапазоне касательной нагрузки получаем критическую нагрузку сжатия большую, чем в случае изолированного сжатия.

Найдем условие, при котором получается максимально возможная критическая сила сжатия.

$K_{q_{c0}}$ является функцией одного неизвестного β уравнения (19).

Берем $\dfrac{dK_{q_{c0}}}{d\beta}=0$:

$$\frac{dK_{q_{c0}}}{d\beta}=\Big(-\beta\left(\beta^2-1\right)\Big[2\beta^2\left(1+s^2+T^2\right)+ +s(1+T)\left(\beta^2-1\right)^2-4T\left(\beta^4+\beta^2-1\right)\Big]- -\beta\left(\beta^2-1\right)6(1-s+T)\times \tag{22}$$
$$\times\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(\beta^4+s\beta^2+T\right)}\Big)/\Big(\left(\beta^2+1\right)^3\times \times\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(\beta^4+s\beta^2+T\right)}\Big)=0.$$

Это уравнение имеет следующие вещественные корни: $\beta=\pm1$; $\beta=0$ и $\beta=\infty$.

Знак второй производной $\dfrac{d^2K_{q_{c0}}}{d\beta^2}$ для случаев $\beta=\pm1$ и $\beta=0$ одинаковый со знаком производной от числителя уравнения (22). Отсюда записываем:

$$Siqn\frac{d^2K_{qc_0}}{d\beta^2}=Siqn\Big\{-\left(1+s^2+T^2\right)\beta^2\left(10\beta^2-\right. \left.-6\right)-s(1+T)\left(\beta^2-1\right)\left(7\beta^2-1\right)+ +4T\left(7\beta^6-6\beta^2+1\right)-3\left(\beta^2-1\right)\times$$
$$\times6(1-s+T)\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(\beta^4+s\beta^2+T\right)}- \tag{23}$$
$$-\Big(6\beta^2\left(\beta^2-1\right)\Big[2\beta^2\left(1+s^2+T^2\right)+s(1+ +T)\left(3\beta^4+1\right)+4T\beta^4\Big]\Big)/ /\Big(\sqrt{\left(1+s\beta^2+T\beta^4\right)\left(\beta^4+s\beta^2+T\right)}\Big)\Big\}.$$

При нахождении знака производной для $\beta=\infty$ учтем, что в каждом множителе уравнения (22) мы можем оставить только член с высшей степенью β, что превращает (для этого случая) уравнение (22) в следующее:

$$\left[\frac{вK_{qc0}}{d\beta}\right]_{\beta=\infty}=\left(-\beta^3[s(1+T)\beta^4-4T\beta^4+ +6(1-s+T)\beta^4\sqrt{T}]\right)/\left(\beta^6\sqrt{T}\cdot\beta^4\right)= =-\frac{s(1+T)-4T+6(1-s+T)\sqrt{T}}{\beta^3\sqrt{T}};$$

$$Siqn\left[\frac{d^2K_{q_{c0}}}{d\beta^2}\right]_{\beta=\pm1}=Siqn\Big\{-\left(1+s^2+T^2\right)4- -\ 12(1-s+T)(1+s+T)+8T\Big\}. \tag{24}$$

Для $\beta=\pm1$ из уравнения (23) получаем:

$$Siqn\left[\frac{вK_{q\,c0}}{d\beta}\right]_{\beta=\infty}= =Siqn\frac{3\left[s(1+T)-4T+6(1-s+T)\sqrt{T}\right]}{\beta^4\sqrt{T}}.$$

При встречающихся в практике значениях $\dfrac{D_{xy}}{D_x}<\sqrt{\dfrac{D_y}{D_x}}$ знак всегда отрицательный.

Для $\beta=0$ из уравнения (23) получаем:

$$Siqn\left[\frac{d^2K_{q_{c0}}}{d\beta^2}\right]_{\beta=0}= =Siqn\Big\{-s(1+T)+4T+6(1-s+T)\sqrt{T}\Big\}.$$

При встречающихся в практике значения x $\dfrac{D_{xy}}{D_x}$ и $\dfrac{D_y}{D_x}$ знак $\dfrac{d^2K_{q_{c0}}}{d\beta^2}$ всегда положительный.

Для $\beta=\infty$ из уравнения (24) получаем

$$Siqn\left[\frac{d^2K_{q_{c0}}}{d\beta^2}\right]_{\beta=\infty} =$$

$$= Siqn\left\{+s(1+T)-4T+6(1-s+T)\sqrt{T}\right\}$$

также всегда положительный.

Отсюда при $\beta = \pm 1$ имеем $K_{q_{c0}}$ – максимум, при $\beta = 0$ и $\beta = \infty$ $K_{q_{c0}}$ – минимум.

Поставляя $\beta = 1$ в выражение (19), получаем:

$$K_{q_{c0}\max} = 2(1+T) = 2\left(1+\frac{D_y}{D_x}\right).$$

Если сравнить с критической силой сжатия при нормально направленном главном направлении, то получаем повышение ее в

$$2\left(1+\frac{D_y}{D_x}\right)\Bigg/\left(\frac{2D_{xy}}{D_x}+2\sqrt{\frac{D_y}{D_x}}\right) \text{ раза.}$$

При малых D_{xy}/D_x и D_y/D_x (случай тонкого листа, подкрепленного частыми высокими стрингерами) повышение критической нагрузки сжатия получается очень большим.

По выведенным формулам мы подсчитали коэффициенты критических нагрузок для трехслойной березовой фанеры, как для ортотропного материала, обладающего следующими физическими константами:

$$T = \frac{D_y}{D_x} = \frac{1}{12};\ S = \frac{2D_{xy}}{D_x} = 0,42.$$

(эти данные взяты из книги [1]).

Все подсчитанные нами случаи встречаются в практике, поэтому они одновременно являются и справочным материалом для инженерных расчетов (рис.1, 2).

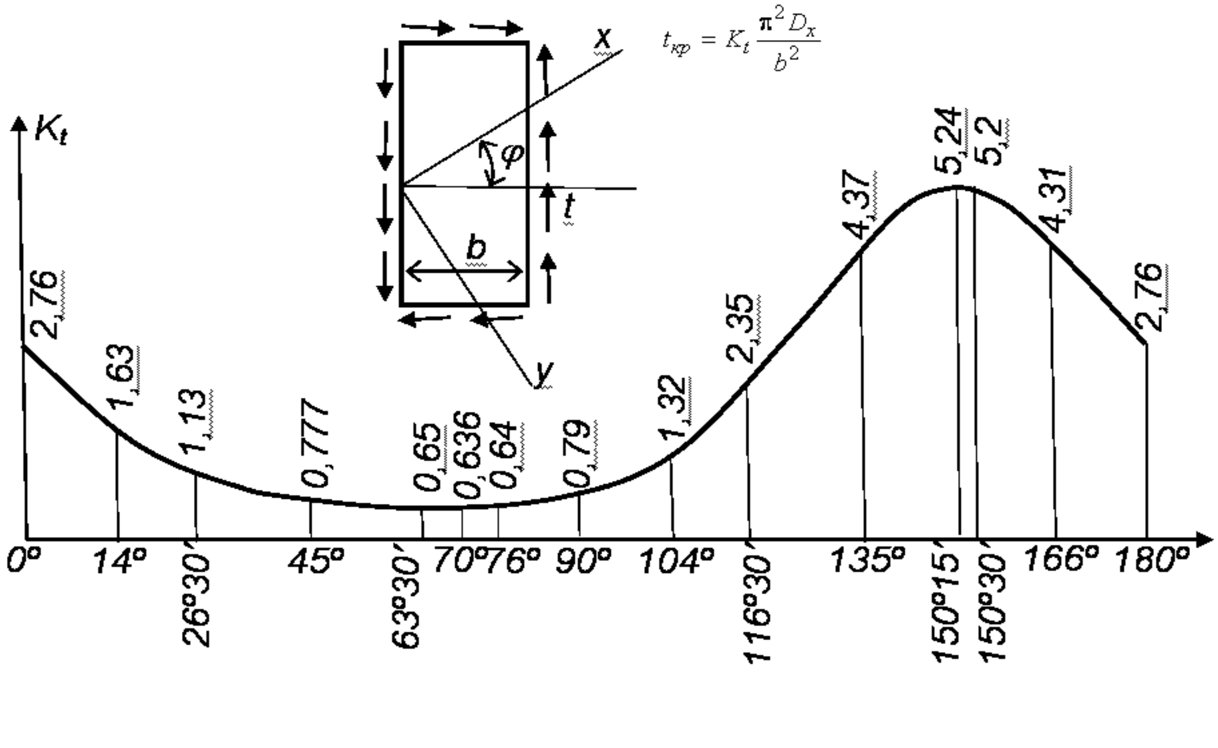

Рис. 1. Коэффициент критической силы при сдвиге

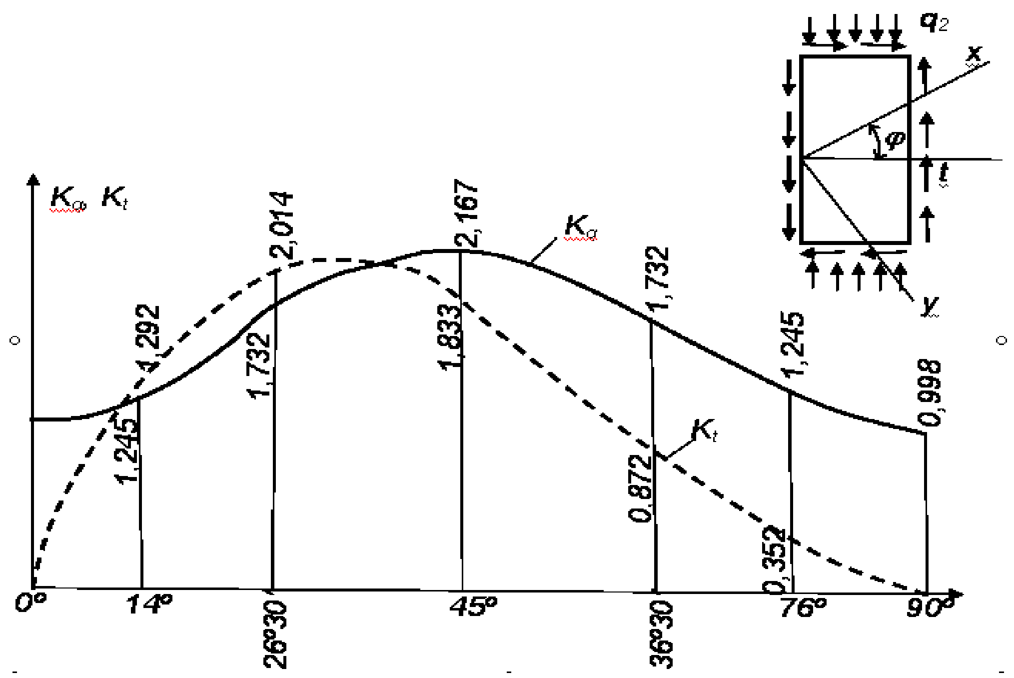

Рис. 2. Коэффициент критической силы K_q и K_t при совместном действии сжатия и сдвига

Выводы

1. Критическая нагрузка сжатия ортотропной пластины с наклонно-расположенной главной осью упругости, при совместном действии зависит не только от величины приложенной касательной нагрузки, но и от направления последней.

2. Касательная нагрузка определенной величины, приложенная под тупым углом к главному направлению упругости, дает критическую силу сжатия большую, чем при действии ее под острым углом (обратное направление).

3. Касательная нагрузка, приложенная под тупым углом в определенном диапазоне (величина последнего зависит от наклона главной оси), дает большую критическую силу сжатия, чем при изолированном сжатии.

4. Максимально возможная критическая нагрузка сжатия получается для главного направления, наклоненного под углом 45°. В этом случае повышение критической нагрузки сжатия получается в

$$\frac{2\left(1+\dfrac{D_y}{D_x}\right)}{\dfrac{2D_{xy}}{D_x}+2\sqrt{\dfrac{D_y}{D_x}}} \text{ раза.}$$

При этом должна быть приложена касательная нагрузка под тупым углом величиной

$$t = 2\left(1-\frac{D_y}{D_x}\right)\frac{\pi^2 D_x}{в^2}.$$

Литература

1. Справочник авиаконструктора. Т. III. – М.: ЦАГИ, 1939.