

УДК 519.876.5 : 620.178.16(045)

**М.О. ХОДАК, О.А. ВИШНЕВСЬКИЙ, О.С. ДАВИДОВ**

*Київський національний авіаційний університет, Україна*

## **МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛЕННЯ НАВАНТАЖЕННЯ ПРИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ВИПРОБОВУВАННІ МАТЕРІАЛІВ НА АБРАЗИВНУ ЗНОСОСТІЙКІСТЬ**

У даній роботі наведена одна з можливих моделей зносу поверхонь деталей, при терті об нежорстко закріплені абразивні частинки, яка розроблена на підставі математичних методів обчислення середнього навантаження вздовж поверхні прилягання гумового ролика та досліджуваної поверхні матеріалу зразка.

**математичне моделювання абразивного зносу поверхонь матеріалів, розподілення вертикального зосередженого навантаження, середнє навантаження, лінійний знос, абразивний знос за масою при нежорстко закріплених частинках, програмна реалізація моделювання**

### **Загальна постановка проблеми і її зв'язок з науково-практичними задачами**

Питанням побудови моделей абразивного зносу завжди приділялась значна увага через важливість поставленої задачі й одночасно складність її вирішення. Важливість задачі моделювання впливає з можливості передбачення результатів зносу за наперед заданими параметрами, що фактично визначає можливість конструювання покриттів з наперед заданими властивостями. Складність задачі виявляється в тім, що моделей, які охоплюють все різноманіття параметрів, що впливають на знос, не існує.

**Огляд публікацій і аналіз невирішених проблем.** Проблемам побудови моделей абразивного зносу приділялося багато місця в наукових публікаціях [1, 2].

Основою одних існуючих моделей є ймовірностно-статистичний підхід [1], в інших існуючих моделях абразивного зносу, не відбите все різноманіття складних фізичних процесів, що відбуваються при абразивному зносі з нежорстко закріпленим абразивом [2]. Недоліком моделей є громіздкість і незручність у використанні в поєднанні з обмеженістю набору параметрів, які впливають на зносостійкість. Немає універсальності у побудові цих моделей для різних матеріалів і різних умов застосування.

**Мета дослідження.** У процесі експлуатації зносостійких покриттів для деталей різного функціонального призначення важливим питанням є передбачення величини зносу при взаємодії зразка з нежорстко закріпленими абразивними частинками різної твердості і величини. У зв'язку з цим необхідно розробити математичну модель процесу абразивного зносу, яка б включала в себе основні впливові параметри. При наявності моделі зносу об нежорстко закріплені абразивні частинки можна передбачити величину зносу по масі в залежності від параметрів, які впливають на зносостійкість лінійного зносу, площі поверхні стикання гумового ролика зі зразком, навантаженого вертикальною силою  $P_0$ , твердості, пластичності і температури, електромагнітної взаємодії молекул та атомів. На рис. 1 показана схема установки експериментального дослідження матеріалів на абразивний знос при нежорстко закріплених абразивних частинках.

### **Результати досліджень**

На рис. 2 схематично показаний процес проникнення ролика в зразок при терті об нежорстко закріплені абразивні частинки [3], де  $P_0$  – початкове вертикальне навантаження, що при куті  $\alpha = \arccos(1 - h/R)$ ,

створює середнє навантаження  $P_{cp}$  по всій поверхні зіткнення гумового ролика зі зразком.

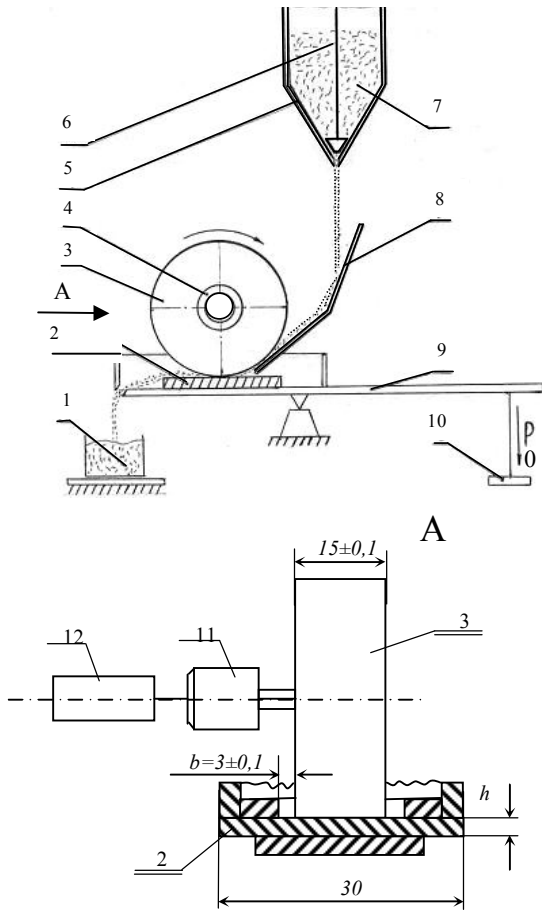


Рис. 1. Схема експериментальної установки "Бринеля":

- 1 – бункер для збору відпрацьованого абразиву;
- 2 – зразок досліджуваного матеріалу;
- 3 – гумовий ролик;
- 4 – втулка для ролика;
- 5 – бункер для вільного абразиву;
- 6 – важіль для регулювання швидкості подання абразиву;
- 7 – вільний абразив;
- 8 – лоток для подачі абразиву;
- 9 – важіль для регулювання зусилля притискування ролика до поверхні зразка;
- 10 – навантаження  $P_0$ .
- 11 – привід, який забезпечує обертання навколо горизонтальної осі гумового ролика 3;
- 12 – пристрій для контролю сумарної кількості обертів ролика в процесі випробувань, який виконано у вигляді шестирозрядного механічного рахівника з кулачковим механізмом

Реальний ваговий знос зразка створює складова початкового навантаження  $\vec{P}_H$ , що змінюється в залежності від величини кута  $\alpha$ , тому доцільно ви-

значити середнє навантаження на поверхню зіткнення гумового ролика і зразка.

Для продовження дослідження прив'яжемо до схематичного малюнка ролика зі зразком прямокутну систему координат показану на рис. 3.

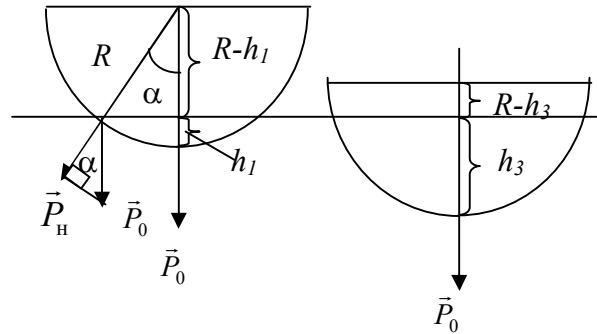


Рис. 2. Навантаження поверхні зразка при терті об нежорстко закріплені абразивні частинки, де  $R$  – радіус гумового ролика;  $h$  – максимальна глибина лунки;  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{P}_0$  і  $\vec{P}_H$

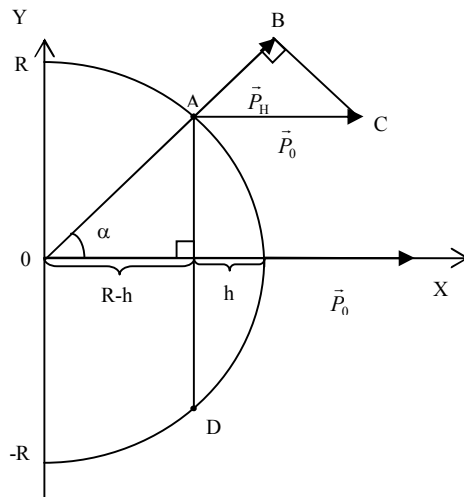


Рис. 3. Прив'язка ролика експериментальної установки на абразивний знос і поверхні зразка до декартової системи координат, де пряма AD відповідає рівню поверхні зразка, а точка O – проекція осі ролика на площину XOY

З прямокутного трикутника ABC представленого на рис. 3 маємо

$$P_H = P_0 \cos \alpha = P_0 (R - h)/R . \quad (1)$$

Величину середнього навантаження знайдемо, враховуючи [4], за формулою

$$P_{cp} = \frac{\int P_H(l) dl}{l} , \quad (2)$$

де  $l$  – довжина дуги AD.

Для обчислення середнього навантаження зробимо заміни

$$x = R - h = R \cos \alpha; \quad y = R \sin \alpha, \quad (3)$$

де  $(x, y)$  – координати точки А.

Підставивши (1) і заміну (3) у формулу (2) одержимо на підставі [3] формулу

$$P_{cp} = \frac{\int_0^{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)} P_0 \cos \alpha R d\alpha}{\alpha R}. \quad (4)$$

Виконуючи алгебраїчні перетворення, одержимо:

$$P_{cp} = \frac{P_0 \sin\left(\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)\right)}{\alpha}. \quad (5)$$

Формула (5) еквівалентна формулі

$$P_{cp} = \frac{P_0 \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)\right)}}{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)}. \quad (6)$$

Після виконання перетворень над формулою (6) одержимо аналітичний вираз залежності середнього навантаження від  $P_0$  і  $h$ .

$$P_{cp} = \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)}. \quad (7)$$

Перевіримо поведінку моделі (7) для граничних умов:

- $h \rightarrow 0$  – початковий момент зносу;
- $h \rightarrow R$  – половина гумового ролика стикається з поверхнею зразка.

Для випадку (а) знайдемо

$$\lim_{h \rightarrow 0} P_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)}. \quad (8)$$

Після підстановки у формулу (8) замість  $h$  нуля, одержимо невизначеність виду  $0/0$ .

Для того, щоб позбутися від невизначеності застосуємо правило Лопітала (тобто взяти похідну від чисельника і знаменника дробу, що стоїть під знаком границі у виразі (8)). Тоді маємо

$$\lim_{h \rightarrow 0} P_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_0 \cdot \frac{\frac{2}{R} - 2\frac{h}{R^2}}{\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}}{\frac{1}{R\sqrt{1 - \left(1-\frac{h}{R}\right)^2}}}. \quad (9)$$

Після перетворення виразу (9) одержимо вираз

$$\lim_{h \rightarrow 0} P_{cp} = \lim_{h \rightarrow 0} P_0 \left(1 - \frac{h}{R}\right) = P_0. \quad (10)$$

Тобто в початковий момент досліді середнє значення навантаження дорівнює  $P_0$ .

Для випадку (b) одержуємо

$$\lim_{h \rightarrow R} P_{cp} = \lim_{h \rightarrow R} \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)}. \quad (11)$$

Після підстановки в (11) замість  $h$  значення  $R$ , одержимо значення границі

$$\lim_{h \rightarrow R} P_{cp} = \frac{2P_0}{\pi}. \quad (12)$$

У такий спосіб при  $h = R$  одержуємо середнє значення навантаження  $2P_0 / \pi$ .

При  $h \geq R$  значення середнього навантаження залишається постійним і рівним  $2P_0 / \pi$ . Середнє навантаження відіграє визначальну роль при визначенні вагового зносу, а саме ваговий знос можна визначити по формулі

$$I_m = kP_{cp}. \quad (13)$$

Тобто ваговий знос пропорційний навантаженню з коефіцієнтом пропорційності  $k$ , що залежить від властивостей матеріалу: твердості, щільності, пластичності та інших факторів.

Таким чином, враховуючи (7) маємо формулу

$$I_m = k \frac{P_0 \sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}}{\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right)}. \quad (14)$$

Для визначення залежності вагового зносу від площі поверхні стикання ролика зі зразком розглянемо рис. 4.

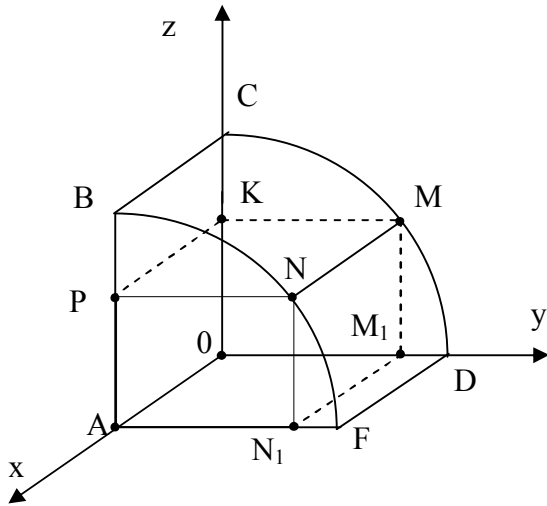


Рис. 4. Прив'язка ролика експериментальної установки до прямокутної системи координат

Відрізок  $KC = h$  (де  $h$  – максимальний лінійний знос зразка). Нехай  $OK = z_0$ , тоді  $CK = R - z_0$ , тому що  $OC = R$  (де  $R$  – радіус гумового ролика). Ширина ролика  $OA = a$ . Частина ролика  $BCKMNP$  відповідає об'єму лунки, яка залишається після зносу. Половина площі поверхні лунки відповідає частині циліндричної поверхні  $BCMN$ , а її проекція на площину  $XOY$  є прямокутник  $AOM_1N_1$ . З рівняння циліндричної поверхні ( $BCMN$ )

$$z^2 + y^2 = R^2. \quad (15)$$

Отримаємо вираз змінної  $z$  через змінні  $y$ .

$$z = \sqrt{R^2 - y^2}. \quad (16)$$

Використовуючи [3] знайдемо площу  $Q$  циліндричної поверхні  $BCMN$ , яка буде виражена через максимальний лінійний знос і радіус ролика.

$$Q = \iint_{D_x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad (17)$$

де  $D_x$  – проекція циліндричної поверхні  $D$  на площину  $XOY$ ;  $z(x, y) = \sqrt{R^2 - y^2}$  – рівняння поверхні  $D$ .

Після перетворення з формули (17) маємо

$$Q = 2aR \arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}. \quad (18)$$

З формули (18) виражаємо  $\sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}$  через  $Q$

$$\sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} = \sin \frac{Q}{2aR}. \quad (19)$$

З рівняння (19), як квадратного відносно  $h/R$ , знайдемо  $h/R$

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 2 \frac{h}{R} + \sin^2 \frac{Q}{2aR} = 0. \quad (20)$$

Піднесемо обидві частини рівняння (20) до квадрату і отримаємо рівняння, яке рівносильне системі

$$\begin{cases} \frac{2h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2 = \sin^2 \frac{Q}{2aR}; \\ \frac{2h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2 \geq 0; \\ \sin^2 \frac{Q}{2aR} \geq 0. \end{cases} \quad (21)$$

Систему (21) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \left(\frac{h}{R}\right)^2 - 2 \frac{h}{R} + \sin^2 \frac{Q}{2aQ} = 0; \\ \frac{h}{R} \left(2 - \frac{h}{R}\right) \geq 0; \\ Q \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Розглянемо перше рівняння системи (22)

$$(h/R)^2 - 2h/R + \sin^2(Q/2aR) = 0. \quad (23)$$

Нехай  $h/R = t$ , отримаємо з рівняння (23) рівняння:

$$t^2 - 2t + \sin^2(Q/2aR) = 0. \quad (24)$$

Дискримінант рівняння (24) має вигляд

$$\frac{D}{4} = 1 - \sin^2 \frac{Q}{2aR} = \cos^2 \frac{Q}{2aR}. \quad (25)$$

Знайдемо корені квадратного рівняння (24)

$$t = 1 \pm \left| \cos \frac{Q}{2aR} \right|, \text{ так як } \frac{Q}{2aR} < 1, \text{ то } \cos \frac{Q}{2aR} > 0,$$

$$\text{тому } t = 1 \pm \cos \frac{Q}{2aR}.$$

Розглянемо другу нерівність системи (22)

$$\frac{h}{R} \left(2 - \frac{h}{R}\right) \geq 0. \quad (26)$$

Нехай  $h/R = t$ , тоді нерівність (26) можна записати у вигляді

$$t(2-t) \geq 0. \quad (27)$$

Розв'язком рівняння (27) буде відрізок  $t \in [0;2]$ , тобто  $0 \leq h/R \leq 2$ , але в умовах даного експерименту  $0 < h/R \leq 1$ , тому розв'язком рівняння (24) буде

$$t = 1 - \cos(Q/2aR). \quad (28)$$

Розкриваючи заміну  $h/R = t$ , отримаємо

$$\frac{h}{R} = 1 - \cos \frac{Q}{2aR}. \quad (29)$$

Підставляємо (18) і (20) у формулу (14). Тоді отримаємо

$$I_m = k \left( P_0 \sin \frac{Q}{2aR} \right) / \frac{Q}{2aR}. \quad (30)$$

Після перетворень формули (30) маємо

$$I_m = \frac{2kaRP_0 \sin \frac{Q}{2aR}}{Q}. \quad (31)$$

Формула (31) виражає обернено пропорційну залежність вагового зносу від площі поверхні стикування. При  $Q \rightarrow 0$  маємо першу визначну границю

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\sin \alpha) / \alpha = 1$ . Для нашого випадку

$$\lim k \left( P_0 \sin \frac{Q}{2aR} \right) / \frac{Q}{2aR} = kP_0, \quad (32)$$

тобто на початку експерименту

$$I_m = kP_0. \quad (33)$$

Початковий фрагмент програмної реалізації математичних моделей абразивного зносу поверхонь матеріалів за масою (14) і (31) має вигляд (34) і (35) відповідно:

```
FUNCTION WM1(H,K,PØ,R)
WM1=K*PØ*SQRT(2*H/R-(H/R)**2)/
/ARCCOS(1-H/R)
RETURN
END
```

(34)

```
FUNCTION WM2(K,Q,PØ,A,R)
WM2=2*K*A*R*PØ*SIN(Q/(2*A*R))/Q
RETURN
END
```

(35)

### Висновки

В результаті проведених досліджень отримана формула (7), що виражає залежність середнього на-

вантаження, розподіленого по поверхні зіткнення гумового ролика зі зразком від початкового навантаження  $P_0$  і максимальної глибини лунки  $h$ .

Модель (7) перевірена для граничних умов.

Модель (14) встановлює зв'язок між залежність вагового зносу від максимального лінійного зносу.

Модель (20) встановлює зв'язок між величиною максимального лінійного зносу та площею поверхні стикування ролика зі зразком.

Визначено залежність впливу геометричних форм поверхні робочої частини експериментальної установки на ваговий та об'ємний абразивний знос при терті об нежорстко закріплені абразивні частинки.

Завершальна модель (31) дає можливість визначити залежність вагового зносу від початкового навантаження  $P_0$ , площі поверхні  $Q$  стикування ролика зі зразком, радіуса та ширини ролика.

Представлена програмна реалізація моделей абразивного зносу поверхонь матеріалів за масою (34,35).

### Література

1. Сорокатый Р.В. Моделирование поведения трибосистем методом трибоэлементов // Трение и износ. – 2002. – Т. 23, № 1. – С. 16 – 22.
2. Федоров С.В. Обобщенная модель трения // Трение и износ. – 1993. – Т. 14, № 3. – С. 460 – 470.
3. Вишневський О.А. Фізична модель зносу поверхні деталей при терті об нежорстко закріплені абразивні частки // Матеріали 6 міжнародної науково-технічної конференції „Авіа-2004”. – Т. 2. – С. 26.71 – 26.74.
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 890 с..

Надійшла до редакції 17.06.2005

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.П. Юрчук, Національний технічний університет України „КПІ”, Київ.