Научное наследие профессора И.Г. Немана (1903 – 1952)

Предисловие редколлегии журнала

Журнал публикует пятую статью по материалам докторской диссертации И.Г. Немана «Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости», защите которой помешала преждевременная смерть автора.

Как и в предыдущих сообщениях, ниже изложены научные результаты И.Г. Немана, полученные им в 1946-48 гг. и ранее не публиковавшиеся, практически без правок авторского текста.

Редколлегия предполагает знакомство читателя с предыдущими сообщениями автора), что исключает необходимость расшифровки в данной статье символов, уже встречавшихся в предыдущих публикациях.*

*) 1. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть 1. Приближенный метод. Устойчивость пластины при одностороннем сжатии // Авиационно-космическая техника и технология. – 2005. – №5 (21). – С. 87-95.

2. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Часть II. Приближенный метод. Устойчивость пластины при сдвиге и совместном действии сжатия и сдвига // Авиационно-космическая техника и технология. – 2005. – №6 (22). – С. 95-103.

3. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Точный метод. Часть I. Вывод общих уравнений для коэффициентов критической нагрузки. Устойчивость пластины при совместном действии двухстороннего сжатия и сдвига // Авиационно-космическая техника и технология.– 2006. – №1 (27). – С. 96-103.

4. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Точный метод. Часть 2. Частные случаи нагружения пластины // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – №3 (29). – С. 86-94.

УДК 629.7: 534.1

И.Г. Неман

Харьковский авиационный институт, Украина

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С НАКЛОННЫМИ ГЛАВНЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ УПРУГОСТИ. ТОЧНЫЙ МЕТОД. ЧАСТЬ 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ НАГРУЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Получены зависимости для определения коэффициентов нагрузки частных случаев нагружения бесконечно длинных ортотропных пластин сдвигом, односторонним продольным сжатием, при их совместном действии, а также при совместном действии поперечной распределенной нагрузки со сдвигом и односторонним сжатием в плоскости пластины. Обсуждается техника построения графиков совместного действия нагрузок. Результаты получены автором до 1946 года и ранее не публиковались.

устойчивость, бесконечно длинная ортотропная пластина, коэффициенты критических нагрузок, частные случаи нагружения

Введение

В статьях [1 – 2] получены общие уравнения для коэффициентов критической нагрузки и рассмотрены некоторые частные случаи нагружения бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости при реализации точного метода.

Ниже получены зависимости для определения коэффициентов нагрузки при других частных случаях нагружения. Использованы те же обозначения входящих параметров, что и в работах [1 – 2].

§ 1. Сдвиг в плоскости пластины

Формулу для коэффициента критической нагрузки искомого случая K_t можно получить из выражения (38) работы [1], разделив числитель и знаменатель на m^2, а затем положив $m=\infty$ и $n=0$:

$$K_t=\left\{\frac{c}{2}-\frac{AB}{2}-\frac{A^3\left(z^2-1\right)}{16}-\frac{Az}{16}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\left[4B-A^2\left(1-z^2\right)\right]^2-64D}\right\}\frac{\mu^2}{E}. \qquad (1)$$

Параметры ξ^2 и η^2 получим из формул (43) и (44) работы [1], тоже приняв в них $m=\infty$ и $n=0$:

$$\xi^2=\left[\frac{A^2}{16}(z-1)^2-\frac{B}{2}+\frac{A^2}{8}-\frac{A^2z^2}{8}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\sqrt{\left[4B-A^2\left(1-z^2\right)\right]^2-64D}\right]\mu^2, \qquad (2)$$

$$\eta^2=\left[\frac{A^2}{16}(z+1)^2-\frac{B}{2}+\frac{A^2}{8}-\frac{A^2z^2}{8}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\sqrt{\left[4B-A^2\left(1-z^2\right)\right]^2-64D}\right]\mu^2. \qquad (3)$$

Последние два уравнения удобнее представить в следующем виде:

$$\xi^2=\left[-\frac{B}{2}+\frac{3A^2}{16}-\frac{A^2z^2}{16}+\frac{A^2z}{8}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\sqrt{\left[4B-A^2\left(1-z^2\right)\right]^2-64D}\right]\mu^2, \qquad (4)$$

$$\eta^2=\left[-\frac{B}{2}+\frac{3A^2}{16}-\frac{A^2z^2}{16}+\frac{A^2z}{8}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\sqrt{\left[4B-A^2\left(1-z^2\right)\right]^2-64D}\right]\mu^2. \qquad (5)$$

§ 2. Одностороннее продольное сжатие пластины

Формулу для K_{q_2} легко получить из уравнения (17) работы [1].

Положив в нем $K_{q_1}=K_t=0$, запишем:

$$\frac{EK_{q2}}{\mu^2}=D-\left(\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]^2\frac{\left(z^2-1\right)}{4}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{c}{A}\right)^2+\frac{c}{A}\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]\right)/z^2, \qquad (6)$$

ξ^2 и η^2 получим из уравнений (35) и (36) работы [1]:

$$\xi^2=\left[\frac{A^2(z-1)^2}{16}-\frac{c+\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]\frac{A}{2}(z-1)}{Az}\right]\mu^2, \qquad (7)$$

$$\eta^2=\left[\frac{A^2(z+1)^2}{16}+\frac{c-\left[B+\frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]\frac{A}{2}(z+1)}{Az}\right]\mu^2. \qquad (8)$$

Простыми преобразованиями полученные формулы приводим к следующим выражениям:

$$K_{q_2}=\left\{D-\frac{cA}{4}-\left(\frac{B}{2}-\frac{A^2}{8}\right)\left(\frac{B}{2}-\frac{3A^2}{8}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{A^4z^2}{64}\left(z^2-1\right)+\frac{1}{z^2}\left(\frac{B}{2}-\frac{A^2}{8}-\frac{c}{A}\right)^2\right\}\frac{\mu^2}{E}; \qquad (9)$$

$$\xi^2=\left[-\frac{B}{2}+\frac{3}{16}A^2-\frac{A^2z^2}{16}+\frac{1}{z}\left(\frac{B}{2}-\frac{A^2}{8}-\frac{c}{A}\right)\right]\mu^2; \qquad (10)$$

$$\eta^2=\left[-\frac{B}{2}+\frac{3A^2}{16}-\frac{A^2z^2}{16}-\frac{1}{z}\left(\frac{B}{2}-\frac{A^2}{8}-\frac{c}{A}\right)\right]\mu^2. \qquad (11)$$

Определим область искомого z.

Согласно вышеизложенному в [1 – 2], знак z безразличен.

Поэтому, не интересуясь знаком значения

$$\left(\frac{B}{2}-\frac{A^2}{8}-\frac{c}{A}\right),$$

принимаем $\xi^2>0$. Отсюда:

$$\frac{B}{2}-\frac{3}{16}A^2+\frac{A^2z^2}{16}<\frac{1}{|z|}\left|\frac{B}{2}-\frac{A^2}{8}-\frac{c}{A}\right|$$

или

$$|z| < \frac{\left|\frac{B}{2} - \frac{A^2}{8} - \frac{c}{A}\right|}{\frac{B}{2} - \frac{3}{16}A^2 + \frac{A^2 z^2}{16}} < \frac{\left|\frac{B}{2} - \frac{A^2}{8} - \frac{c}{A}\right|}{\frac{B}{2} - \frac{3}{16}A^2}. \qquad (12)$$

§ 3. Совместное действие продольного сжатия и сдвига

В этом случае $K_{q_1} = 0$ и $K_t = mK_{q_2}$

Определяем K_{q_2} из уравнения (17) работы [1], которое в данном случае записывается в следующем виде:

$$-4m^2\left(\frac{EK_{q2}}{\mu^2}\right)^2 + \left\{4mc - 2Am\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] + \right.$$
$$\left. + A^2 z^2\right\}\frac{EK_{q2}}{\mu^2} + \left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]^2 \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4} - c^2 +$$
$$+ AC\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] - A^2 D z^2 = 0 \cdot \qquad (13)$$

Получаем K_{q_2} как явную функцию переменных z и μ:

$$K_{q_2} = \left\{\frac{c}{2m} - \frac{A}{4m}\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] + \frac{A^2 z^2}{8m^2} \pm \right.$$
$$\pm \frac{zA}{4m}\left(\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]^2 - \frac{A}{m}\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{A^2 z^2}{4m^2} + \frac{2c}{m} - 4D\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\frac{\mu^2}{E}. \qquad (14)$$

Вставив полученное выражение (14) в (35) и (36) работы [1], получаем:

$$\xi^2 = \left\{-\frac{B}{2} - \frac{z^2 A^2}{16} + \frac{3A^2}{16} - \frac{zA^2}{8} + \frac{zA}{4m} \pm \right.$$
$$\pm \frac{1}{2}\left(\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]^2 - \frac{A}{m}\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{A^2 z^2}{4m^2} + \frac{2c}{m} - 4D\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\mu^2, \qquad (15)$$

$$\eta^2 = \left\{-\frac{B}{2} - \frac{z^2 A^2}{16} + \frac{3A^2}{16} - \frac{zA^2}{8} + \frac{zA}{4m} \mp \right.$$
$$\mp \frac{1}{2}\left(\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right]^2 - \frac{A}{m}\left[B + \frac{A^2\left(z^2-1\right)}{4}\right] + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{A^2 z^2}{4m^2} + \frac{2c}{m} - 4D\right)\right\}\mu^2. \qquad (16)$$

Как видим, верхние знаки перед радикалом во всех трех уравнениях (14) – (16), взятые при одном значении z, обмениваются на нижние при том же z, взятом с обратным знаком. Одновременно обмениваются местами ξ и η. На основании соображений, высказанных выше, об отсутствии влияния знака z на K_q, можно брать только одну группу знаков.

Точка пересечения дает искомый z.

По уравнению (44) (см. ниже) находится μ.

Уравнение (37) (см. ниже) после подстановки полученных z и μ дает K_{q1} для данного значения m.

Точки кривой, близкие к прямолинейному участку, должны подсчитываться с использованием точного уравнения связи.

Ожидаемые значения z получаем экстраполяцией значений, полученных для ближайших точек нижней части кривой.

§ 4. Совместное действие поперечной распределенной нагрузки и сдвига в плоскости пластины

В этом случае в уравнениях (40), (43) и (44) работы [1] принимаем $n = 0$. Кроме того, перед корнем, на основании высказанного выше соображения о знаках, оставляем только верхние знаки.

Тогда K_{q1}, ξ^2 и η^2 запишутся в следующем виде:

$$K_{q_1} = \frac{\mu^2}{E}\left\{B + \frac{A^2}{4}\left(z^2-1\right) - \left(\left(4m - A\right)\left[\left(4B - A^2\right)m - \right.\right.\right.$$
$$\left.-2c + A^2 mz^2\right] \pm Az\left(\left[\left(4B - A^2\right)m - 2c + A^2 mz^2\right]^2 - \right.$$

$$-4D\left[\left(4m-A\right)^2-A^2z^2\right]\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg)\Big/\left(\left(4m-A\right)^2-A^2z^2\right)\Bigg\};\quad(17)$$

$$\xi^2=\mu^2\left\{\frac{A^2}{16}\left(z^2-1\right)^2-\left(\left(4B-A^2\right)m-\right.\right.$$

$$-2c+A^2mz^2\pm\left(\left[\left(4B-A^2\right)m-2c+A^2mz^2\right]^2-\right.$$

$$\left.\left.-4D\left[\left(4m-A\right)^2-A^2z^2\right]\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\Big/\left(2\left[\left(4m-A\right)-Az\right]\right)\right\};\quad(18)$$

$$\eta^2=\mu^2\left\{\frac{A^2}{16}\left(z^2+1\right)^2-\left(\left(4B-A^2\right)m-\right.\right.$$

$$-2c+A^2mz^2\mp\left(\left[\left(4B-A^2\right)m-2c+A^2mz^2\right]^2-\right.$$

$$\left.\left.-4D\left[\left(4m-A\right)^2-A^2z^2\right]\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\Big/\left(2\left[\left(4m-A\right)-Az\right]\right)\right\}.\quad(19)$$

§ 5. Совместное действие поперечной распределенной нагрузки и одностороннего сжатия в плоскости пластины

В этом случае принимаем в уравнениях (40), (43) и (44) работы [1] $m=0$.

Сохранив только одну группу знаков перед корнем, получаем следующие выражения для K_{q1}, ξ^2 и η^2:

$$K_{q_1}=\left[B+\frac{z^2-1}{4}A^2-\left(2A^2z^2n-2Ac+\right.\right.$$

$$+2Az\left(A^2z^2n-2cAn-nA^2\left(z^2-1\right)\times\right.$$

$$\times\left(B+\frac{z^2-1}{4}A^2\right)+c^2+A^2\times$$

$$\left.\left.\times D\left(z^2-1\right)\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\Big/\left(A^2\left(z^2-1\right)\right)\right]\frac{\mu^2}{E};\quad(20)$$

$$\xi^2=\left[\frac{\left(z-1\right)^2}{16}A^2-\left(Azn+c+\left(A^2z^2n^2-2cAn-\right.\right.\right.$$

$$-nA^2\left(z^2-1\right)\left[B+\frac{z^2-1}{4}A^2\right]+c^2+$$

$$\left.\left.+A^2D\left(z^2-1\right)\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\Big/\left(A\left(z+1\right)\right)\right]\mu^2;\quad(21)$$

$$\eta^2=\left[\frac{\left(z+1\right)^2}{16}A^2-\left(Azn-c+\left(A^2z^2n^2-2cAn-\right.\right.\right.$$

$$-nA^2\left(z^2-1\right)\left(B+\frac{z^2-1}{4}A^2\right)+c^2+$$

$$\left.\left.+A^2D\left(z^2-1\right)\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\Big/\left(A\left(z-1\right)\right)\right]\mu^2.\quad(22)$$

§ 6. О технике построения кривой совместного действия нагрузок

Выше рассмотрены все встречающиеся на практике случаи нагружения пластин.

Докажем теперь несколько предложений, определяющих область существования отдельных, входящих в наши расчеты коэффициентов, и дающих возможности в ряде случаев упростить и ускорить расчет кривой совместного действия:

1. При m или n достаточно больших $\xi^2+\eta^2<0$.

Действительно: из уравнения (9) работы [1] имеем:

$$\xi^2+\eta^2=-B\mu^2-\delta_1^2-4\delta_1\delta_2-\delta_2^2+EK_{q_1}=$$

$$=-\left(B-\frac{3}{8}A^2+\frac{z^2A^2}{8}\right)\mu^2+EK_{q_1},$$

$$B-\frac{3}{8}A^2=\frac{6\beta^2+\frac{D_{xy}}{D_x}\left(1-4\beta^2+\beta^4\right)+6\frac{D_y}{D_x}\beta^2}{1+\frac{2D_{xy}}{D_x}\beta^2+\frac{D_y}{D_x}\beta^4}-$$

$$-6\beta^2\times\frac{\left[-1+\frac{D_{xy}}{D_x}\left(1-\beta^2\right)+\frac{D_y}{D_x}\beta^2\right]^2}{\left[1+\frac{2D_{xy}}{D_x}\beta^2+\frac{D_y}{D_x}\beta^4\right]^2}=$$

$$=\left(\left(1+\beta^2\right)\left[2\frac{D_{xy}}{D_x}-2\left(\frac{D_{xy}}{D_x}\right)^2\beta^2+2\frac{D_{xy}}{D_x}\cdot\frac{D_y}{D_x}\beta^4+\right.\right.$$

$$\left.\left.+6\frac{D_y}{D_x}\beta^2\right]\right)\Big/\left(\left[1+2\frac{D_{xy}}{D_x}\beta^2+\frac{D_y}{D_x}\beta^4\right]^2\right).\quad(23)$$

Последняя величина всегда положительна, если принять во внимание, что в ортотропных пластинах $D_{xy}<\sqrt{D_xD_y}$. Следовательно, величина, стоящая в скобках в уравнении (13), существенно положительная. При больших m (или n) K_{q1}, имеет относительно малые значения. Поэтому, начиная с некоторого значения m (или n)

$$\xi^2+\eta^2<0. \qquad (24)$$

При этом условии возможны следующие варианты:

а) либо оба слагаемых отрицательны;

б) либо они разных знаков.

Введем следующие обозначения в случае отрицательных значений ξ^2 и η^2:

$$\xi=i\overline{\xi};\ \eta=i\overline{\eta}.$$

2. Если ξ^2 и η^2 оба отрицательны, то условное уравнение не имеет решения.

Действительно: а) условное уравнение (33) работы [1] запишется в новых обозначениях так:

$$ch2\overline{\xi}ch\overline{\eta}-\cos zA\mu+\left[\frac{\overline{\xi}^2+\overline{\eta}^2}{2\overline{\xi}\overline{\eta}}+\frac{\left(\overline{\xi}^2-\overline{\eta}^2\right)^2}{2\overline{\xi}\overline{\eta}\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2}\right]\times$$
$$\times Sh2\overline{\xi}\cdot Sh2\overline{\eta}=0. \qquad (25)$$

Но это равенство невозможно, ибо первое и третье слагаемые в сумме всегда больше единицы.

в) условное уравнение (34) работы [1] запишется так:

$$ch2\overline{\xi}\,ch2\overline{\eta}-\cos zA\mu-\left[\frac{\frac{z^2A^2\mu^2}{4}+\overline{\xi}^2+\overline{\eta}^2}{2\overline{\xi}\overline{\eta}}\right]\times$$
$$\times Sh2\overline{\xi}\cdot Sh2\overline{\eta}=0 \qquad (26)$$

Перепишем его в следующем виде*):

$$\frac{ch2\left(\overline{\xi}+\overline{\eta}\right)+ch2\left(\overline{\xi}-\overline{\eta}\right)}{2}-1+1-\cos zA\mu-$$
$$-\frac{z^2A^2\mu^2}{4\cdot 2\overline{\xi}\cdot\overline{\eta}}Sh2\overline{\xi}\cdot Sh2\overline{\eta}-\frac{\overline{\xi}^2+\overline{\eta}^2}{2\overline{\xi}\overline{\eta}}\times$$
$$\times\frac{ch2\left(\overline{\xi}+\overline{\eta}\right)-ch2\left(\overline{\xi}-\overline{\eta}\right)}{2}=0 \qquad (27)$$

или

$$-\frac{1}{4\overline{\xi}\overline{\eta}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\left[\left(\overline{\xi}+\overline{\eta}\right)^{2n-2}-\left(\overline{\xi}-\overline{\eta}\right)^{2n-2}\right]\left(\overline{\xi}^2-\overline{\eta}^2\right)^2-$$
$$-2\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2\left(\varepsilon_z+\varepsilon_\xi+\varepsilon_\eta\right)=0, \qquad (28)$$

$\varepsilon_z,\varepsilon_\xi$ и ε_η - положительные величины.

Данное равенство невозможно, ибо оба слагаемых отрицательны.

Следовательно, одно из слагаемых уравнения (24) положительное.

Примем $\xi^2>0$ и $\xi^2<0$.

3. При $\xi^2\le\overline{\eta}^2$ для свободно опертой пластины нет решения в области $0<2\xi<\frac{\pi}{2}$.

Действительно. Уравнение (33) работы [1] запишется в следующем виде:

$$\varphi_c=\cos 2\xi ch2\overline{\eta}-\cos zA\mu+\left[\frac{\overline{\eta}^2-\xi^2}{2\xi\overline{\eta}}+\frac{\left(\xi^2-\overline{\eta}^2\right)^2}{2\xi\overline{\eta}\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2}\right]\times$$
$$\times\sin 2\xi\cdot sh2\overline{\eta}=0. \qquad (29)$$

а) Если $zA\mu\le\frac{\pi}{2}$, то

$$\varphi_c>\cos 2\xi ch2\xi-1+\frac{4\xi^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\cdot 2\cdot\frac{\sin 2\xi}{2\xi}\cdot\frac{sh2\xi}{2\xi}>$$
$$>\left[1-\frac{(2\xi)^2}{2!}\right]\left[1+\frac{(2\xi)^2}{2!}\right]-1+\frac{1}{2}(2\xi)^4=\frac{1}{4}(2\xi)^4>0.$$

б) Если $\frac{\pi}{2}<zA\mu<\frac{3\pi}{2}$, тоже имеем $\varphi_c>0$.

в) Если $zA\mu>\frac{3\pi}{2}$ можем написать:

$$\varphi_c>\cos 2\xi ch2\overline{\eta}-\cos zA\mu+\left(\overline{\eta}^2-\xi^2\right)2\frac{\sin 2\xi}{2\xi}\cdot\frac{sh2\overline{\eta}}{2\overline{\eta}};$$

Из уравнения (13) имеем:

$$\overline{\eta}^2-\xi^2=\left(B-\frac{3}{8}A^2+\frac{z^2A^2}{8}\right)\mu^2-EK_{q_1}>\frac{z^2A^2\mu^2}{8}-\frac{\pi}{4}. \qquad (30)$$

Поэтому:

$$\varphi_c>\cos 2\xi ch2\overline{\eta}-\cos zA\mu+\left(\frac{z^2A^2\mu^2}{8}-\frac{\pi^2}{4}\right)1=\psi_c;$$

*) В диссертации автором приведены промежуточные выкладки приведения (27) к виду (28). (прим. редколлегии).

$$\frac{\partial\psi_c}{\partial(zA\mu)} = \sin zA\mu + \frac{zA\mu}{4} > -1 + \frac{zA\mu}{4}.$$

При $zA\mu = \frac{3}{2}\pi$

$$\psi_c = \cos 2\xi \cdot ch 2\overline{\eta} - 0 + \frac{0,25}{8}\pi^2 > 0;$$

$$\frac{\partial\psi_c}{\partial(zA\mu)} > 0 \text{ при } zA\mu \geq \frac{3\pi}{2}.$$

Следовательно, $\psi_c > 0$. Значит и подавно $\varphi_c > 0$.

Таким образом, показано, что $\varphi_c > 0$ при любых значениях $zA\mu$, если только

$$0 < 2\xi < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, в этой области решения нет.

4. При $\xi^2 \leq \overline{\eta}^2$ для жестко заделанной пластинки нет решений в области $0 < 2\xi < \pi$.

Запишем уравнение (34) работы [1] в следующем виде:

$$\varphi_3 = \cos 2\xi ch 2\overline{\eta} - \cos zA\mu - \left[\frac{\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2}{2\xi\overline{\eta}} + \frac{\overline{\eta}^2 - \xi^2}{2\xi\overline{\eta}}\right] \times$$

$$\times \sin 2\xi \cdot sh 2\overline{\eta} = 0 \qquad (31)$$

Пусть ξ, $\overline{\eta}$ и z – независимые переменные, причем $\xi < \overline{\eta}$.

Рассмотрим (31), в котором положим $\xi = \overline{\eta}$:

$$\varphi(\xi, \xi, z) = \cos 2\xi \cdot ch 2\xi - \cos zA\mu -$$

$$-\frac{(zA\mu)^2}{2}\frac{\sin 2\xi}{2\xi}\frac{sh 2\xi}{2\xi}. \qquad (32)$$

а) в области $0 < 2\xi < \frac{\pi}{2}$ положительными могут быть только первые два члена с суммой не больше 2.

Следовательно, при

$$\frac{(zA\mu)^2}{2}\frac{\sin 2\xi}{2\xi}\frac{sh 2\xi}{2\xi} \geq 2$$

имеем $\varphi(\xi, \xi, z) < 0$.

При этом

$$\frac{\sin 2\xi}{2\xi}\frac{sh 2\xi}{2\xi} = 1 - \kappa > 0,93.$$

Отсюда для $zA\mu > \frac{2}{0,965}$ высказанное утверждение доказано.

Заметим, что в рассматриваемой области

$$\cos 2\xi \cdot ch 2\xi \leq \frac{\sin 2\xi}{2\xi} \cdot \frac{sh 2\xi}{2\xi},$$

поэтому

$$\varphi(\xi, \xi, z) <$$

$$< \frac{\sin 2\xi}{2\xi} \cdot \frac{sh 2\xi}{2\xi} - \cos zA\mu - \frac{(zA\mu)^2}{2} \cdot \frac{\sin 2\xi}{2\xi} \times \frac{sh 2\xi}{2\xi} =$$

$$= 1 - \kappa - \left[1 - \frac{(zA\mu)^2}{2!} + \frac{(zA\mu)^4}{4!} - \ldots\right] - \frac{(zA\mu)^2}{2} \times$$

$$\times (1 - \kappa) = -\kappa - \frac{(zA\mu)^4}{4!} + \frac{(zA\mu)^6}{6!} - \ldots + \frac{(zA\mu)^2}{2!}\kappa < 0,$$

$$\kappa < 0,07$$

при $zA\mu < \frac{2}{0,965}$.

Следовательно, в этой области всегда

$$\varphi(\xi, \xi, z) < 0.$$

в) в области $\frac{\pi}{2} < 2\xi < \pi$ положительным может быть только член

$$-\cos zA\mu \leq 1$$

начиная со значений

$$zA\mu > \frac{\pi}{2}.$$

При $1,2\frac{\pi}{2} < 2\xi < \pi$ имеем

$$\cos 2\xi \cdot ch 2\xi < -1.$$

При $2\xi < 1,2\frac{\pi}{2}$ имеем

$$\frac{\sin 2\xi}{2\xi} \cdot \frac{sh 2\xi}{2\xi} > 0,875$$

и

$$\frac{(zA\mu)^2}{2}\frac{\sin 2\xi}{2\xi}\frac{sh 2\xi}{2\xi} > \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 0,875 > 1.$$

Следовательно, и в этой области всегда

$$\varphi(\xi, \xi, z) < 0.$$

$$\frac{\partial\varphi(\xi,\overline{\eta},z)}{\partial\eta}=2\cos 2\xi sh2\overline{\eta}-\frac{2\overline{\eta}^2-\left(\overline{\eta}-\xi^2\right)}{2\xi\overline{\eta}^2}\times$$

$$\times\sin 2\xi sh2\overline{\eta}-\frac{\left(\overline{\eta}^2-\xi^2\right)}{2\xi\overline{\eta}}\sin 2\xi 2ch2\overline{\eta}-\frac{(zA\mu)^2}{2}\frac{\sin 2\xi}{2\xi}\times$$

$$\times\frac{2\overline{\eta}ch2\overline{\eta}-sh2\overline{\eta}}{2\overline{\eta}^2}.$$

Первые три члена перепишем в следующем виде:

$$2\cos 2\xi sh2\overline{\eta}-\frac{2\overline{\eta}^2-\left(\overline{\eta}^2-\xi^2\right)}{2\xi\overline{\eta}^2}\sin 2\xi sh2\overline{\eta}-$$

$$-\frac{\overline{\eta}^2-\xi^2}{2\xi\overline{\eta}}\times\sin 2\xi 2\overline{\eta}ch2\overline{\eta}<$$

$$<2\cos 2\xi sh2\overline{\eta}-\frac{2\overline{\eta}^2}{2\xi\overline{\eta}^2}\sin 2\xi sh2\overline{\eta}=$$

$$=2\cos 2\xi sh2\overline{\eta}-2\frac{\sin 2\xi}{2\xi}\sin 2\overline{\eta}<0.$$

Имеем:

$$\varphi(\xi,\overline{\eta},z)\big|_{\overline{\eta}=\xi}<0 \ \text{ и } \ \frac{\partial\varphi(\xi,\overline{\eta},z)}{\partial\overline{\eta}}<0.$$

Следовательно, $\varphi(\xi,\overline{\eta},z)<0$ во всем интервале $0<2\xi<\pi$.

5. При $\xi^2\le\overline{\eta}^2$ для свободно опертой пластины существует решение в области

$$\frac{\pi}{2}<2\xi<\pi.$$

Нами доказано, что $\varphi_c>0$ при $2\xi=\frac{\pi}{2}$.

При $2\xi=\pi$ получаем:

$$\varphi_c=-ch2\overline{\eta}-\cos zA\mu<0.$$

Следовательно, условное уравнение (33) работы [1] имеет решение в области $\frac{\pi}{2}<2\xi<\pi$.

6. При $\xi^2\le\overline{\eta}^2$ для жестко заделанной пластины существует решение в области

$$\pi<2\xi<\frac{3\pi}{2}.$$

Нами доказано, что $\varphi_3<0$ при $2\xi=\pi$.

При $2\xi=\frac{3\pi}{2}$ получаем

$$\varphi_3=-\cos zA\mu+\left[\frac{\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2}{\frac{3\pi}{2}\overline{\eta}}+\frac{\overline{\eta}^2-\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2}{\frac{3\pi}{2}\overline{\eta}}\right]sh2\overline{\eta}>$$

$$>-\cos zA\mu+\frac{\left(\frac{zA\mu}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}\pi}\cdot\frac{sh2\overline{\eta}}{2\overline{\eta}}>-\cos zA\mu+\frac{(zA\mu)^2}{3\pi}\times$$

$$\times\frac{sh\frac{3}{2}\pi}{\frac{3}{2}\pi}=-\cos zA\mu+\frac{(zA\mu)^2}{3\pi}11,7. \qquad (33)$$

Последнее выражение положительно при $zA\mu>0,76$.

Примечание к п.п. 5 и 6. Для свободно опертой пластины могут быть решения при $\frac{(2\kappa-1)\pi}{2}<2\xi<\kappa\pi$, а для жестко заделанной – при $\kappa\pi<2\xi<\frac{(2\kappa-1)\pi}{2}$, где $\kappa=1,2,3...$ Но минимальное значение K_{q1} получается всегда только при $\kappa=1$, а остальные решения нас не интересуют.

7. Приближенные уравнения связи для больших m или n.

В случае больших значений m или n K_{q1} мало.

На основании (30) ожидаем, что в большом диапазоне изменения m или n:

$$\overline{\eta}^2-\xi^2>\frac{(zA\mu)^2}{8}.$$

Тогда для множителя в квадратных скобках в уравнении (33) работы [1] можем записать следующее неравенство:

$$[K]=\left[\frac{\overline{\eta}^2-\xi^2}{2\xi\overline{\eta}}+\frac{\left(\overline{\eta}^2+\xi^2\right)^2}{2\xi\overline{\eta}\frac{(zA\mu)^2}{4}}\right]>\frac{\overline{\eta}^2-\xi^2}{2\xi\overline{\eta}}+$$

$$+\frac{\left(\overline{\eta}^2+\xi^2\right)^2}{2\left(\overline{\eta}^2-\xi^2\right)2\xi\overline{\eta}}=\frac{3}{4}\frac{\overline{\eta}^2-\xi^2}{\xi\overline{\eta}}+\frac{\xi\overline{\eta}}{\overline{\eta}^2-\xi^2}. \qquad (34)$$

Последнее выражение имеет минимум, равный $\sqrt{3}$ при $\frac{\overline{\eta}}{\xi}=\sqrt{3}$.

Следовательно, при $\frac{\overline{\eta}}{\xi} = \sqrt{3}$ $[K] > \sqrt{3}$.

Из уравнения (29), если даже принять $\cos zA\mu = 1$, получим $2\xi > 2,6$ и $2\overline{\eta} > 4,5$.

Для всех значений $\frac{\overline{\eta}}{\xi} > \sqrt{3}$ и подавно $2\overline{\eta} > 4,5$.

Беря $\frac{\overline{\eta}}{\xi} < \sqrt{3}$, получаем $\sqrt{3} < [K] < \infty$ и $2,6 < 2\xi < \pi$, а $4,5 > 2\overline{\eta} > \pi$.

Таким образом, для свободно опертой пластины всегда $2\overline{\eta} > \pi$.

Для жестко заделанной пластины согласно уравнению (34) работы [1] при $2\xi \to \pi$ $[K] \to \infty$. Последнее возможно только при $\overline{\eta} \to \infty$.

С ростом 2ξ $[K]$ должно падать, и при $2\xi \to 1,5\pi$ $[K] \to 0$, не становясь равным нулю, так как $zA\mu \neq 0$.

При этом $2\overline{\eta}$ падает от $2\overline{\eta} \to \infty$ до $2\overline{\eta} > 2\xi = 1,5\pi$, так как $\overline{\eta}^2 - \xi^2 > \frac{(zA\mu)^2}{8}$.

Отсюда следует, что для жестко заделанной пластины всегда $2\overline{\eta} > 1,5\pi$.

При $2\overline{\eta} > 1,5\pi$

$$ch2\overline{\eta} \approx sh2\overline{\eta} >> \cos zA\mu .$$

Пренебрегая членом $\frac{\cos zA\mu}{sh2\overline{\eta}}$, получаем приближенные уравнения:

а) для свободно опертой пластины

$$tq2\xi = -\frac{2\xi\overline{\eta}}{\overline{\eta}^2 - \xi^2 + \frac{4\left(\xi^2 + \overline{\eta}^2\right)^2}{(zA\mu)^2}} = f_c(z); \quad (35)$$

б) для жестко заделанной пластины

$$tq2\xi = -\frac{2\xi\overline{\eta}}{\frac{(zA\mu)^2}{4} + \overline{\eta}^2 - \xi^2} = f_3(z) \quad (36)$$

(в этом случае нужно 2ξ брать в третьей четверти).

§ 7. Уравнения, определяющие $K_{q_{1min}}$

Уравнение для коэффициента нагрузки K_{q_1} (40) работы [1] запишем в следующей форме:

$$EK_{q_1} = \varphi_z \mu^2 . \quad (37)$$

В уравнение связи входят переменные z, μ, ξ и η. Можно ξ и η представить таким образом:

$$\xi = \xi_z \mu \text{ и } \eta = \eta_z \mu , \quad (38)$$

где ξ_z и η_z являются функциями одного z.

Уравнение связи является функцией z и μ.

$$\psi(z, \mu) = 0 . \quad (39)$$

Определив μ из (37), вставим его значение в (39). Получим:

$$\psi\left(z, K_{q_1}\right) = 0 . \quad (40)$$

Мы получили K_{q_1} в виде неявной функции переменного z. Тогда можно написать:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial K_{q_1}} \frac{\partial K_{q_1}}{\partial z} = 0 . \quad (41)$$

При $K_{q_{1\min}}$ $\frac{dK_{q_1}}{dz} = 0$ и (41) обретает вид

$$\frac{\partial\psi\left(z, K_{q_1}\right)}{\partial z} = 0 . \quad (42)$$

K_{q_1}, удовлетворяющим уравнениям (40) и (42), является $K_{q_{1\min}}$.

В тех случаях, когда можно пользоваться приближенным уравнением связи, $K_{q_{1\min}}$ находится еще легче.

Уравнение связи (35) или (36) запишется так:

$$tq2\xi_z \mu = f(z) . \quad (43)$$

Отсюда

$$\mu = \frac{1}{2\xi_z} arctgf(z) . \quad (44)$$

Вставив данное значение μ в (37), получаем K_{q_1} как явную функцию от z.

$$EK_{q_1} = \frac{\varphi_z \left[arctgf(z)\right]^2}{4\xi_z^2} . \quad (45)$$

Приравняем первую производную (45) нулю:

$$\frac{dEK_{q_1}}{dz}=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\varphi_z}{\xi_z^2}\right)_z^{'}\left[arctgf(z)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi_z}{\xi_z^2}2\left[arctgf(z)\right]\left[arctgf(z)\right]_z^{\prime}\right\}=0,$$

$$arctgf(z)\neq 0,$$

отсюда получаем:

$$\frac{\left(\dfrac{\varphi_z}{\xi_z^2}\right)^2}{\dfrac{\varphi_z}{\xi_z^2}}+2\frac{\left[arctgf(z)\right]^{\prime}}{arctgf(z)}=0. \qquad (46)$$

Определив z из данного уравнения, находим μ из (44), и уравнение (37) дает

$$K_{q_1\min}.$$

Примечание. Следует пояснить, что для свободно опертой пластины $arctgf(z)$ лежит во втором квадранте, а для жестко заделанной – в третьем кванд-ранте.

§ 8. Порядок построения графика совместного действия K_{q_1}, K_{q_2} и K_t

Кривые коэффициентов совместного действия строятся в координатах K_{q_1} и K_t для фиксированных n.

1. Для каждого n определяется граница прямолинейного участка по уравнению (66) работы [2] для свободно опертой пластины и по уравнению (74) работы [2] для жестко заделанной и вычерчиваем отрезок прямой с ординатой $K_{q_1}=\frac{\pi^2}{4E}$ до значения $K_t=m\frac{\pi^2}{4E}$ для свободно опертой пластины и с $K_{q_1}=\frac{\pi^2}{E}$ до $t_к=m\frac{\pi^2}{E}$ для жестко заделанной, где m получено соответственно из уравнения (66) или (74) работы [2].

2. Точку $/0,K_t/$ подсчитываем, пользуясь формулами (1), (4) и (5) и приближенным уравнением связи.

3. Точки кривой совместного действия близкие, и точка $/0,K_t/$ подсчитываются, пользуясь формулами (40), (43) и (44) работы [1] приближенными уравнениями связи, дающими для этих точек большую точность.

Задавшись определенным значением m, строятся кривые φ_z, ξ_z^2 и $\frac{\varphi_z}{\xi_z^2}$ и $arctgf(z)$.

Проведя в нескольких точках касательные к последним двум кривым, вычисляем и строим кривые:

$$\frac{\left(\dfrac{\varphi_z}{\xi_z^2}\right)^{\prime}}{\dfrac{\varphi_z}{\xi_z^2}} \text{ и } 2\frac{\left[arctgf(z)\right]_z^{\prime}}{arctgf(z)}.$$

Литература

1. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Точный метод. Часть I. Вывод общих уравнений для коэффициентов критической нагрузки. Устойчивость пластины при совместном действии двухстороннего сжатия и сдвига // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – №1 (27). – С. 96-103.

2. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Точный метод. Часть 2. Частные случаи нагружения пластины // Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – №3 (29). – С. 86-94.