УДК 621.391:517:518:510.52

В.А. ИГНАТОВ, С.А. КУДРЕНКО, В.И. НИКУЛИН, М.И. НОРИЦА

Национальный авиационный университет, Киев, Украина

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ВЫСОКОТОЧНЫХ СТРУКТУР СТРУКТУРНО-ИЗБЫТОЧНЫХ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ ИЗ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕТОЧНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены показатели эффективности комплексов неравноточных измерений, задача сравнения комплексов между собой и определения степени их близости к комплексам равноточных измерений. Приведен численный алгоритм решения поставленной задачи с помощью введения характеристического числа m_0.

способ оптимального комплексирования, неравноточная система, неравноточные измерения, характеристическое число

Введение

Концепция интегрирования неоднородных результатов МСУ (места расположения, скорости, ускорения) измерений (PVA measurements) в авиации не нова. Простейшим примером комплексирования двух систем является комплекс «GPS/INS integration» [1 – 3]. Более сложным является пример измерения высоты полета воздушного судна по результатам измерения его высоты шестью – семью различными МСУ системами (PVA systems). Например, бортовым датчиком барометрической высоты, бортовым радиовысотомером, наземной радионавигационной системой "Omega", спутниковой системой измерения местоположения Global Position System (GPS), первичным обзорным радиолокатором (PSR), вторичным обзорным радиолокатором (SSR), спутниковой системой мобильной связи (AMSS).

Как показали наши исследования, использование избыточного числа измерений, а по существу избыточного объема сигналов, позволяет успешно создавать высокоточные структурно-избыточные информационно-измерительные комплексы из относительно неточных систем.

Все известные методы комплексирования можно условно разделить на три класса:

– методы мажоритарной обработки избыточных неравноточных измерений;

– методы использования среднеарифметического значения, которые не учитывают различную точность датчиков;

– методы замещения результатами измерения более точными датчиками результатов измерения менее точными датчиками.

Каждый из указанных классов имеет свои достоинства и недостатки. Выбор подходящего метода комплексирования в каждом конкретном случае без теоретического обоснования представляет собой трудоемкую и малоизученную проблему.

Краткое рассмотрение предыстории МСУ комплексирования показывает актуальность, теоретическую ценность и практическую значимость решения проблемы оптимального управления обработкой сигналов в интегрированных навигационных системах.

Цель работы. Определить необходимые условия несмещенности, состоятельности и асимптотической эффективности комплексных оценок, оценить сравнительную эффективность применения оптимальных оценок, достоинства и недостатки предлагаемого способа оптимального комплексирования.

Постановка задачи. Известно, что высокоточные структурно-избыточные информационно-измерительные комплексы формируются из относительно неточных систем. Требуется определить такие собственные характеристики этих комплексов, которые позволяют сравнивать эффективность разнородных комплексов между собой.

Решение задачи

Для комплексов с неравноточными системами полезно ввести характеристическое число m_0 следующим образом. Обозначим дисперсии измерений так, чтобы выполнялось условие

$$D[Y_1] > D[Y_2].$$

Будем рассматривать эти дисперсии как первые два члена убывающей арифметической прогрессии с разностью

$$d = D[Y_1] - D[Y_2],$$

тогда из условия:

$$D[Y_1] - d(m_0 - 1) = 0$$

можно найти такой номер m_0 «виртуального канала», который обладает нулевой дисперсией измерения, т.е. имеет нулевую погрешность:

$$m_0 = 1 + \frac{D[Y_1]}{d} = \frac{2u-1}{u-1}. \qquad (1)$$

Исследуем предельные свойства функции $m_0(u)$:

$$\lim_{u\to 1} m_0(u) \to \infty, \qquad (2)$$

$$\lim_{u\to\infty} m_0(u) \to 2. \qquad (3)$$

Сингулярный случай (2) соответствует асимптотическому приближению d к нулю, т.е. приближению неравноточных измерений к равноточным измерениям. Сингулярный случай (3) соответствует асимптотическому приближению d к $D(Y_1)$. Он показывает приближение комплекса из большого числа неравноточных измерений к комплексу всего из двух систем. При этом одна система асимптотически приближается к эталонной так, что ее погрешность стремится к нулю. Это предельный случай грубо-точных измерений, когда одна система позволяет определить приближенное значение параметра, а вторая система позволяет оценить значение с высокой точностью. Так как $m_0 \in [2, \infty]$, это число удобно использовать как интегральную характеристику различных неравноточных комплексов, которая позволяет сравнивать их между собой.

В свою очередь, величину u можно рассматривать как обратную функцию для (1), т.е. как функцию характеристического числа комплекса:

$$u = \frac{m_0 - 1}{m_0 - 2}. \qquad (4)$$

Соотношения (1) и (4) образуют пару преобразований, которая полностью описывает комплексы неравноточных измерений, в которых отношения дисперсий соседних измерений одинаковы.

Установим связи и отношения введенных интегральных характеристик комплексов неравноточных измерений с показателями точности. Показатель точности h_i i-го измерения Y_i и его дисперсия $D[Y_i]$ связаны соотношениями:

$$h_i = 1/\sqrt{2D[Y_i]}, \qquad D[Y_i] = 1/h_i^2.$$

В классической теории неравноточных измерений вводят «нормальную меру точности»:

$$h = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^{m} g_i (X_0 - Y_i)^2}{m-1}} = \sqrt{2D[Z_m]},$$

весовые коэффициенты g_i находят из условия

$$g_i = \frac{h_i^2}{h^2}, i = 1, m,$$

оценку параметра ищут в виде:

$$Z(m) = \sum_{i=1}^{m} g_i Y_i \Big/ \sum_{i=1}^{m} g_i,$$

но при этом оставляют открытым вопрос выбора h для случая, когда g_i неизвестны.

В роли индексного показателя повышения точности измерения удобно использовать величину

$$W_4 = \frac{\max h_i}{\min h_i} = \frac{\sigma \min\left[Zopt(m)\right]}{\sigma(Y_1)} . \qquad (5)$$

Величина (5) показывает, какую долю составляет минимальное среднеквадратическое значение оптимальной комплексной оценки относительно среднеквадратического значения наихудшего измерения. Она показывает относительное уменьшение поля допуска оптимальной оценки по сравнению с полем допуска для первого измерения.

$$W_4 = \sqrt{\frac{1}{W_1}} = \sqrt{1 - \frac{1}{W_2}} = \sqrt{\frac{1}{1+u}} = \sqrt{\frac{m_0 - 2}{2m_0 - 3}} . \qquad (6)$$

Удобно учитывать оба знака корня в (6), чтобы наглядно иллюстрировать сужение поля допуска. На рис. 1 показаны графики $W_4(u)$, $W_4(m_0)$, отрицательная ветвь $W_4(u)$ обозначена как $W_5(u)$, отрицательная ветвь $W_4(m_0)$ обозначена как $W_5(m_0)$.

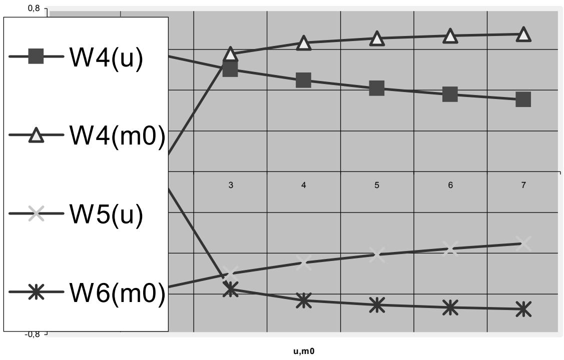

Рис. 1. Графики функций
$W_4(u)$, $W_4(m_0)$, $W_5(u)$, $W_6(m_0)$

Можно заметить, что как функция аргументов u и m_0 величина W_4 имеет следующие предельные свойства:

$$\lim_{u\to\infty} w_4(u) = 1/\sqrt{2};$$

$$\lim_{u\to\infty} W_4(u) = 0;$$

$$\lim_{u\to 2} w_4(m_0) = 0;$$

$$\lim_{u\to\infty} W_4(m_0) = 1/\sqrt{2}.$$

Перейдем к рассмотрению случая m>2.

Случай m>2. Пронумеруем дисперсии в порядке их убывания. Получим ранжированную последовательность $D[Y_1]$, $D[Y_m]$, для которой справедливо условие

$$D[Y_i] > D[Y_{i+1}],\ \text{i} = 1{,}m. \qquad (7)$$

Аппроксимируем убывающую последовательность дисперсий арифметической прогрессией по методу наименьших квадратов:

$$D_0(i) = D_0(1) + d_0(i-1), \qquad i = 1, m , \qquad (8)$$

где $D_0(i)$ – оптимальная оценка i-го члена прогрессии, полученная путем оптимизации $D_0(1)$ и d_0 из условия минимизации суммы:

$$S\left[D_0(1), d_0\right] = \sum_{i=1}^{m}\left[D_0(1) + d_0(i-1) - D(Y_i)\right]^2 .$$

Используем (8) для доказательства условий существования и единственности оптимального решения при неравноточных измерениях.

Теорема о существовании оптимальных решений.

Если:

A. Условия A-J теоремы о необходимых условиях выполняются для всех неравноточных измерений.

B. Ранжированную последовательность известных дисперсий, удовлетворяющих условию (7), можно аппроксимировать арифметической прогрессией (8).

C. Характеристическое число m_0 выборки из результатов неравноточных измерений удовлетворяет неравенству:

$$m_0 = 1 + \frac{D_0(Y_1)}{d_0} \ge 3 , \qquad (9)$$

то для всех m, которые удовлетворяют неравенству

$$3 \le m \le m_0 \qquad (10)$$

существуют оптимальные значения оценок истинного значения параметра:

$$Z_{opt}Y_{1,}Y_m = Z_{opt}(Y_{1,}Y_{m-1}) + \\ + \frac{D_{\min}\left[Z_{opt}(Y_1, Y_{m-1})\right]}{D_{\min}\left[Z_{opt}(Y_1, Y_{m-1})\right] + D(Y_m)}\left[Z_{opt}(Y_1, Y_{m-1})Y_m\right], \qquad (11)$$

которые имеют минимальные значения дисперсий:

$$D_{\min}\left[Z_{opt}(Y_1,Y_m)\right]=\frac{D(Y_m)}{D_{\min}\left[Z_{opt}(Y_1,Y_m)\right]}\times \times D_{\min}\left[Z_{opt}(Y_1,Y_{m-1})\right]. \quad (12)$$

Доказательство. Так как арифметическая прогрессия (8) является убывающей, для доказательства справедливости рекуррентных соотношений (11), (12) достаточно доказать, что минимальное значение дисперсии оптимальной оценки, полученное на предыдущем шаге, всегда меньше дисперсии неравноточного измерения на следующем шаге.

Покажем справедливость этого утверждения для первых трех измерений. Для этого необходимо доказать справедливость неравенства

$$D_{\min}\left[Z_{opt}(Y_1,Y_2)\right]=\frac{D_0(1)}{D_0(1)+D_0(2)}D_0(2)<D_0. \quad (13)$$

Учтем то, что аппроксимированные значения дисперсий неравноточных измерений связаны условием (8), тогда из (13) получим:

$$D_0(1)\left[D_0(1)-d_0\right]<\left[D_0(1)-2d_0\right]\left[2D_0(1)-d_0\right].$$

Раскрывая скобки и выполняя простейшие преобразования этого неравенства, получим окончательно:

$$(D_0(1)-2d_0)^2>0, \qquad D_0{}^2(3)>0. \quad (14)$$

Из справедливости неравенства (14) следует справедливость рекуррентных соотношений (11) и (12) при m=3. Применяя метод индукции для m>3 для всех m, которые удовлетворяют неравенству (10), получим аналоги неравенства (14) для дисперсий с этими номерами, что и требовалось доказать.

Рассмотрим результаты экспериментального цифрового имитационного моделирования неравноточных измерений. Оптимальное комплексирование результатов выполнено при следующих модельных исходных данных:

$$X_0=1{,}0;\ D_0(1)=0{,}04;\ d_0=-0{,}0025;$$

$$m_0=[D_0(1)/d_0]+1=9.$$

В табл. 1, которая содержит одиннадцать строк и десять столбцов, показаны результаты реализации неравноточных измерений и их оптимального комплексирования.

Таблица 1

Результаты эксперимента
и их оптимального комплексирования

m	1	2	3
Y_{m}	0,98	1,02	0,95
$D(m)$	0,04	0,035	0,03
$V(m)$,%	20	18,7	17,32
$Z(m)$	0,98	0,998666	0,980000
$D_{min}(m)$	0,04	0,01867	0,01151
$V_0(m)$,%	20,4	13,68	10,9
$V_0(m)/V(m)$	1,02	0,7355	0,62933
W_4,%	100	68,32	53,6
E_m,%	–2	2	–5
E_0,%	–2	–0,133	–1,999

m	4	5	6
Y_m	1,04	1,01	1,005
$D(m)$	0,025	0,02	0,015
$V(m)$,%	15,81	14,1	12,25
$Z(m)$	0,998912	1,002046	1,002854
$D_{min}(m)$	0,00788	0,005653	0,004105
$V_0(m)$,%	8,88	7,5	6,389
$V_0(m)/V(m)$	0,56167	0,53191	0,52155
W_4,%	44,3	37,59	32,03
E_m,%	4	1	0,5
E_0,%	–0,1088	0,204	0,285

m	7	8	9
Y_m	0,996	0,999	1,000
$D(m)$	0,01	0,005	0,000
$V(m)$,%	10,0	7,07	0,000
$Z(m)$	1,000889	1,000194	1,000
$D_{min}(m)$	0,002911	0,00184	0,000
$V_0(m)$,%	5,39	4,288	0,000
$V_0(m)/V(m)$	0,539	0,6065	0,000
W_4,%	26,9	21,44	0,000
E_m,%	–0,4	–0,1	0,00
E_0,%	0,0889	0,0194	0,000

Первая строка, как обычно, содержит номер измерения m. Реализации неравноточных измерений, сглаженные значения их дисперсии и коэффициентов вариации отображены, соответственно, во второй – четвертой строках.

В пятой – седьмой строках отражены, соответственно, результаты оптимального комплексирования с помощью рекуррентных соотношений (11), (12): $Z_{opt}(m)$, $D_{min}(m)$, $V_0(m)$.

В восьмой строке дано отношение коэффициентов вариации оптимальных оценок и измерений.

В девятой строке показано изменение показателя эффективности оптимального комплексирования. Десятая и одиннадцатая строки показывают, как изменялись значения относительных погрешностей в этой реализации эксперимента.

Анализ этих экспериментальных результатов показывает, во-первых, справедливость предложенных теоретических положений, а во-вторых, высокую эффективность оптимального комплексирования даже при относительно низкой точности первичных измерительных систем.

Заключение

1. Заслуживает особого внимания использование понятия характеристического числа m_0 (1) комплекса неравноточных измерений. Это число однозначно связано со всеми показателями эффективности комплекса и позволяет не только успешно сравнивать такие комплексы между собой, но и определять степень их близости к комплексам равноточных измерений.

2. Условия ABC, (9), (10) теоремы о существования оптимальных решений для общего случая $2<m<m_0$ позволяют построить рекуррентные соотношения (11), (12). Они полезны не только для оптимального управления обработкой результатов неравноточных измерений, но и могут найти применение в решении задач приближенных вычислений, контроля, диагностирования, оценивания надежности и других. Очевидные преимущества применения (11), (12) заключаются в сокращении объемов памяти вычислительных устройств и в возможности выбора требуемого числа систем в зависимости от условия обеспечения заданной точности измерений.

Литература

1. Richard E. Phillips, George T. Schmidt GPS/INS Integration // System Implications and Innovative Applications of Satellite Navigation, AGARD – LS – 207, Advisory Group for Aerospace Research and Development, Neuilly – sur – Seine, France, June 1996.
2. Greenspan R.L. GPS/Inertial Overview // Aerospace Navigation Systems, AGARD – AG – 331, Advisory Group for Aerospace Research and Development, Neuilly – sur – Seine, France, June 1995.
3. Игнатов В.А., Маркевич С.К. Динамический логико-вероятностный метод исследования особых ситуаций в полете // Методы обоснования характеристик технологических процессов эксплуатации радиоэлектронного оборудования воздушных судов гражданской авиации. – К.: КИИГА, 1988. – С. 3-14.
4. Игнатов В.А., Боголюбов Н.В. Управление информационной избыточностью систем диагностирования и контроля // Контроль и управление техническим состоянием авиационного и радиоэлектронного оборудования воздушных судов гражданской авиации. – К.: КИИГА, 1990. – С. 3-13.

Поступила в редакцию 1.12.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.Ф. Конахович, Национальный авиационный университет, Киев.