УДК 519.87:517.55

О.М. ТРУНОВ

Миколаївський державний гуманітарний університет ім. Петра Могили

АДЕКВАТНІСТЬ МОДЕЛІ ЯК ЗАДАЧА БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Розглядається проблема багатокритеріальної ідентифікації. Розв'язок задачі багатокритеріальної ідентифікації приведено до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь.

ідентифікація, критерій декількох типів, адекватність, модель

Проблема співставлення та забезпечення адекватності між фізичним явищем і моделлю, що його описує є невід'ємною частиною будь якого фундаментального дослідження [1, 2]. Встановлення відповідності між явищем і його наближеним описом є задачею багатокритеріального і багато етапного аналізу [2]. Вона у більшості випадків розв'язується методами ідентифікації. Однак, не зважаючи на те, що проблема поставлена багато десятиріч тому, існуючи методи ідентифікації моделей теплових, газодинамічних та процесів динаміки будують розв'язок виходячи із одного типу критерію [3 – 8]. Відомі на сьогоднішній день прямі методи які шукають розв'язок задачі адекватності виходячи із нульового значення відхилення, або нульової величини значень інших функцій від відхилення [8 – 12]. Не менш ефективними є опосередковані методи, що розглядають розв'язок задачі про адекватність як задачу мінімізації, але теж одного типу значень критерію відхилення [6, 10, 11]. Слід відзначити, що електричні та механічні процеси, що моделюють поведінку окремих агрегатів, або систем устаткування для двигунів внутрішнього згорання суден та підводних апаратів різного призначення містять у своїй структурі похідні першого, другого, а іноді і більш високих порядків. Крім того, у переважній більшості до їх складу входять нелінійні елементи. Існують роботи в яких аналізуються різні види критеріїв, які дають найкращі результати з точки зору наближення. В роботі [8] наводяться деякі з них, що доцільно застосовувати для опису статичних об'єктів. Однак, там же вводяться поняття різних родів адекватності та демонструється і доводиться твердження, що забезпечити адекватність нульового і першого роду можна тільки задовольняючи декільком критеріям. В роботі [9] надані подальші докази, що для різних типів моделей забезпечити адекватність динамічних моделей можливо задовольняючи тільки декільком критеріям. В роботі [6] продемонстровано, що кускова ідентифікація спрощує модель та підвищує загальну адекватність. Однак, існування розривів нульового та першого роду на границях суміжних областей кожної з моделей утворює перехідні області в яких погіршується точність. З іншого боку забезпечити відсутність розривів це значить задовольнити умову зрощення по суміжних границях функцій та відповідних похідних. Існуючі методи найменших квадратів, найменших модулів нев'язки, мінімаксний чебишевский критерій, що застосовуються для розв'язку задачі кускової ідентифікації не дають змоги задовольняти декільком критеріям, в зв'язку з цим вони не вичерпують проблему забезпечення адекватності по областям розривів.

Таким чином, задача ідентифікації як задача розв'язок якої задовольняє декільком критеріям є актуальною задачею фундаментальних досліджень, *головною не розв'язаною проблемою* якої є необхідність задовольнити одразу декільком з типів критеріїв.

Метою даної статті є поставити та розв'язати задачу багатокритеріальної ідентифікації за декількома типами критеріїв.

Постановка задачі. Припустимо, що якісний опис моделі здійснено, але для забезпечення кількісного співпадіння необхідно визначити N констант. Крім того, аналіз адекватності задано вести за двома типами критеріїв: абсолютного співпадіння значень критерію для окремих станів та наближеного за умов мінімізації відхилень для усіх станів, що знаходяться у межах станів на які розповсюджується обрана модель.

Введемо N-вимірний вектор шуканих констант X, визначених на множині дійсних чисел $R^{(N)}$, позначимо стани системи m-вимірним вектором Y, що визначено у m- вимірній області дійсних чисел $R^{(m)}$. Позначимо також критерії першого типу $K_i(X,Y_i)=0; i=\overline{1,p}$, а другого $\min\limits_X\ E(X,Y)$, тоді задачу ідентифікації сформулюємо наступним чином

$$\begin{cases}\min\limits_X\ E(X,Y);\\ K_i(X,Y_i)=0; i=\overline{1,p}.\end{cases} \tag{1}$$

Слід зауважити, що для задачі кускової ідентифікації критерій першого типу трансформується до вигляду

$$\min_X\ E(X,Y)=\min_X\sum_{J=1}^{m}\chi(Y_j)E_j(X,Y_j),$$

де $\chi(Y_j)=\begin{cases}1, Y\in Y_j;\\ 0, Y\notin Y_j,\end{cases}$

крім того умова зрощення , тобто рівності функцій та її похідних приводиться до критеріїв першого типу.

Приведення задачі багатокритеріальної ідентифікації до системи рівнянь

Припустимо, що усі функції рівнянь системи (1) диференціальні по компонентам вектора X, а компоненти вектора X можна представити через першу компоненту використовуючи рівняння для критерію першого типу

$$x_i=V_i(x_1,V_2,...V_p,Y_i); i=\overline{2,N},$$

тоді згідно із відомою теоремою математичного аналізу про неявну функцію можна записати

$$\frac{dE}{dx_1}=\frac{\partial E}{\partial x_1}+\frac{\partial E}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+...+\frac{\partial E}{\partial x_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_1}...+\frac{\partial E}{\partial x_p}\frac{\partial V_p}{\partial x_1}.$$

Аналогічні співвідношення запишемо для похідних від критеріїв першого типу

$$\frac{dK_i}{dx_1}=\frac{\partial K_i}{\partial x_1}+\frac{\partial K_i}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_1}+...+$$
$$+\frac{\partial K_i}{\partial x_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_1}...+\frac{\partial K_i}{\partial x_p}\frac{\partial V_p}{\partial x_1}; i=\overline{1,p}.$$

Тепер записуючи необхідні умови для мінімуму критерію $E(X,Y)$ з урахуванням, що критерії $K_i(X,Y_i)=0; i=\overline{1,p}$ є константами, тому всі похідні від них теж дорівнюють нулю, і разом ці умови утворюють систему, яку запишемо компактно у матричній формі

$$A\times\begin{bmatrix}1\\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1}\\ ......\\ \frac{\partial V_i}{\partial x_1}\\ ......\\ \frac{\partial V_p}{\partial x_1}\end{bmatrix}=0, \tag{2}$$

де позначено

$$A = \begin{bmatrix} \nabla E(X,Y) \\ \nabla K_1(X,Y_i) \\ \ldots\ldots \\ \nabla K_i(X,Y_i) \\ \ldots\ldots \\ \nabla K_p(X,Y_p) \end{bmatrix}$$

Оскільки вектор

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial V_i}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial V_p}{\partial x_1} \end{bmatrix} \neq 0$$

не дорівнює нулю, то розв'язком системи (2) є

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \nabla E(X,Y) \\ \nabla K_1(X,Y_i) \\ \ldots\ldots \\ \nabla K_i(X,Y_i) \\ \ldots\ldots \\ \nabla K_p(X,Y_p) \end{bmatrix} = 0 .$$

Останнє справджується тільки за умов, коли вектори рядки матриці A є лінійно залежними, тобто існують N скалярів $a_i, i = \overline{1,p}$ не всі з яких дорівнюють нулю, що

$$a_0 \nabla E(X,Y) + \sum_{i=1}^{p} a_i \nabla K_i(X,Y_i) = 0 .$$

Скаляр a_0 не може дорівнювати нулю, бо за умов задачі критерії першого типу визначені в різних станах і тому є лінійно незалежними. Після ділення рівняння на a_0 дістанемо

$$\nabla E(X,Y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla K_i(X,Y_i) = 0 .$$

Таким чином, для розв'язку задачі системи (1) треба знайти стаціонарну точку функції штучно утвореної із критеріїв адекватності двох типів

$$H(X,Y,\Lambda) = E(X,Y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i(X,Y_i) = 0 ,$$

де $\Lambda = \left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p\right]^T$ вектор множників, що визначають вплив критеріїв на значення вектора X .

Останнє твердження еквівалентно розв'язку системи

$$\begin{cases} \frac{\partial H(X,Y,\Lambda)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1,N}; \\ \frac{\partial H(X,Y,\Lambda)}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1,p}. \end{cases} \tag{3}$$

Розв'язок задачі

Введемо $N+p$ компонентний вектор функцію F від вектора Z , перші N компонент якого співпадають з компонентами вектора X , а інші p компонент співпадають із компонентами вектора Λ . Представимо систему (3) у векторному вигляді

$$F(Z) = 0 , \tag{4}$$

тоді її наближений розв'язок відповідно до методу рекурентної апроксимації [13 – 14] для n -го наближення подамо

$$Z_n = Z_{n-1} - J(Z_{n-1})^{-1} F(Z_{n-1}) , \tag{5}$$

де позначено $J(Z_{n-1})$ матрицю розклад вектор функції $F(Z_{n-1})$, елементи якої, якщо обмежитись другими похідними у розкладі, мають такий вигляд

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial F_i(Z)}{\partial Z_j}\right|_{Z=Z_{n-1}} + \left.\left[\frac{\partial}{\partial Z_j} \sum_{l=1}^{N+p} \frac{\partial F_i(Z)}{\partial Z_l} \frac{\Delta z_{ln-1}}{2}\right]\right|_{Z=Z_{n-1}} .$$

Тип збіжності розв'язку (5) системи (4), умови існування та її швидкість вивчалась у роботах [13 – 16].

Там же [16] досліджувались шляхи зменшення обсягів інформації, що підлягають збереженню у пам'яті машини для забезпечення ітераційного процесу.

Якщо виконані умови існування похідних від вектор функції $F(Z_{n-1})$ для наближення Z_{n-1} та їх обмеженості, то послідовність (5), як правило, збігається на третій-четвертій ітерації.

Однак, враховуючи, що розв'язок системи (5) задовольняє тільки необхідну умову мінімуму зосередимо увагу на визначені умов за яких розв'язок є саме мінімумом і задовольняє критеріям апроксимації другого типу.

Для цього перепишемо систему (1), скориставшись необхідною умовою мінімуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E(X,Y)}{\partial x_j} = 0; j = \overline{1,N}; \\ K_i(X,Y_i) = 0; i = \overline{1,p}. \end{cases} \tag{6}$$

Розкладемо ліві частини рівнянь системи (6) для простоти обмежимось тільки першими похідними та просумувавши їх ліві та праві частини запишемо

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \dfrac{\partial E(X,Y)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} K_i(X,Y_i) + \\ \sum_{j=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{j=1}^{N} \dfrac{\partial E(X,Y)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} K_i(X,Y_i) \right] \dfrac{\Delta x_j}{2} = 0; \\ j = \overline{1,N}; \qquad i = \overline{1,p}. \end{cases} \tag{7}$$

Припустимо, що розв'язок вихідної задачі (1) у формі (6) знайдено, тоді перші дві суми рівняння (7) дорівнюють нулю і достатня умова мінімуму – додатність других похідних від критерію другого типу забезпечується за умов від'ємності похідних від критерію першого типу. Останнє утворює наближену умову існування розв'язку задачі багатокритеріальної апроксимації

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{p} K_i(X,Y_i) \langle 0;$$
$$j = \overline{1,N}; \qquad i = \overline{1,p}\ .$$

Слід зазначити, що збільшивши кількість членів розкладу можна побудувати уточнену умову існування розв'язку

$$\sum_{j=1,k=3}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{j=1,k=2}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{j=1,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{i=1}^{p} K_i(X,Y_i) \right] \frac{\Delta x_j{}^k}{k} -$$
$$\sum_{j=1,k=3}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{j=1,k=2}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{j=1,k=1}^{N} \frac{\partial^2 E(X,Y)}{\partial x_j{}^2} \frac{\Delta x_j{}^k}{k} \langle 0;$$
$$j = \overline{1,N}; \qquad i = \overline{1,p}; k = \overline{1,3}.$$

Обговорення результатів

За умов існування похідних від усіх рівнянь, що визначають зміст критеріїв апроксимації в системі (3), маємо $N+p$ рівнянь та стільки ж невідомих. Таким чином система є повною. Припустимо, що визначено компоненти вектора X^* на множині $R^{(N)}$ як розв'язок будь яких N рівнянь, тоді якщо ранг матриці утвореної із правих частин інших p рівнянь дорівнює p, то існує p чисел компонент вектора $\Lambda = \left[\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_p\right]^T$, не всі з яких дорівнюють нулю і при яких виповнюється

$$\nabla E(X,Y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla K_i(X,Y_i) = 0\ .$$

Однак, визначені множники не є метою ідентифікації, а знання їх значень не відповідає на питання чи виконані умови за усіма критеріями. Тому більш важливим є необхідність визначити чи виконана достатня умова мінімуму у точці X^*. Утворивши матрицю із других похідних від критерію, мінімізацію якого треба забезпечити та визначивши їх значення і тільки за умов їх додатності переконаємось, що всі умови апроксимації виконанні, а X^* є розв'язком вихідної задачі багатокритеріальної ідентифікації навіть за умов критеріїв двох типів: абсолютного співпадіння значень критерію для окремих станів та наближеного за умов мінімізації відхилень для усіх станів, що знаходяться у межах станів на які розповсюджується обрана модель. Для узагальнення слід додати, що у випадку коли критеріїв, які вимагають мінімізації декілька, то будуючи функцію $H(X,Y,\Lambda)$ слід додати до неї похідні від додаткового критерію за усіма компонентами вектора X помноженні на додаткові важелеві коефіцієнти. При цьому розмірність вектора

$$\Lambda = \left[\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p, \lambda_{p+1}, ...\lambda_{p+N}\right]^T$$

збільшиться на N.

Висновки

Розв'язок задачі про багатокритеріальну ідентифікацію є розв'язком задачі про стаціонарну точку функції утвореної із критеріїв апроксимації за допомогою важелевих коефіцієнтів. Важелеві коефіцієнти визначають вплив додаткових критеріїв на константи, що визначаються у ході ідентифікації. Задача багатокритеріальної ідентифікації приводиться до задачі про розв'язок системи рівнянь. Наближена умова існування розв'язку задачі багатокритеріальної ідентифікації визначається умовою від'ємності суми похідних критерію першого типу у точці розв'язку.

Література

1. Коган Б.Я., Тетельбаум И.М. Общие вопросы моделирования и моделирование с помощью вычислительных машин // Теория и методы математического моделирования. – М.: Наука, 1978. – С. 13.
2. Климов У.Н. Формирование математических моделей как сложный многоуровневый процесс // Теория и методы математического моделирования. – М.: Наука, 1978. – С. 14-16.
3. Александровский Н.М., Егоров С.В., Кузин Р.Е. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами. – М.: Энергия, 1973. – 272 с.
4. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
5. Козеев А.А. Методы аппроксимации выходных координат нелинейных систем управления // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1979. – № 3. – С.194-199.
6. Эйкхофф П. Современные методы идентификации систем. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
7. Кондратенко Ю.П., Трунов А.Н. Применение методов осредняющих операторов к исследованию нестационарных объектов // Теория и методы математического моделирования – М.: Наука. – 1978. – С. 123-124.
8. Trounov A.N. Mathematical aspects of image recognition. Proc. Of International tecnology 90, Szezecin, Poland, 1990. – C. 479-493.
9. Трунов О.М. Застосування методу рекурентної апроксимації до задач підвищення точності та безвідмовності систем керування // Науково-методичний журнал. – МДГУ ім. Петра Могили, Миколаїв. – 2004. – Т. 35, вип. 22. – С. 93-101.
10. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1968. – 823 с.
11. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
12. Трунов А.Н. Применение метода рекуррентной аппроксимации к решению нелинейных задач // Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса. Сб.науч.тр. – М. МГОПУ. – 1998. – Вып. 16. – С. 142-156.
13. Трунов О.М. Узагальнення алгоритму розв'язку системи нелінійних диференціальних рівнянь динамічних систем механіки //Зб. наукових праць НУК №2. – Миколаїв. – 2005. – С.45-55.

Надійшла до редакції 2.04.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.П. Клименко, Миколаївський державний гуманітарний університет ім. Петра Могили, Миколаїв.