УДК 629.7.054

В.В. КАРАЧУН

Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ФРАГМЕНТОВ С НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНОЙ ЛИНИИ МЕРИДИАНА

Приводятся качественные и количественные результаты определения собственных частот оболочечных фрагментов двигателей с ненулевой кривизной линии меридиана.

кривизна линии меридиана, оболочка собственные частоты, уравнение частот, координатные функции, перекрестные связи

Введение

Постановка проблемы и ее связь с научно-практическими задачами. В натурных условиях элементы конструкции двигателей испытывают целый ряд внешних воздействий, приводящих к изменению свойств материала. Это линейные и угловые ускорения, вибрация, кинематическое возмущение, тепловая нагрузка, акустическое излучение и другие.

Если для возмущающих факторов воздействующих на конструкцию через опоры, разработаны и внедрены множество методов и средств подавления их влияния (кинематическое, силовое возмущение), то борьба с пространственными воздействиями – тепловой факел, акустическое нагружение и т.п. – только приобретает очертания строгой идеологии.

Наиболее остро этот вопрос касается протяженных конструкций – плоских, оболочечных, искривленных пластин. Так, плоские элементы в направлении нормали к поверхности имеют существенно меньшую жесткость по сравнению с другими двумя составляющими и, естественно, вибрируют при внешнем возмущении. Оболочки, в плоскости шпангоута обладают существенно малой жесткостью в радиальном направлении и также подвержены внешним воздействиям.

В своей совокупности вынужденные движения конструкции могут привести к ухудшению функциональных параметров двигателей, а в некоторых случаях ситуация может выйти из-под контроля – локальные особенности резонансного типа (волновое совпадение). Таким образом, задача совершенствования конструкции представляется актуальной на всех этапах создания современных двигательных установок летательных аппаратов.

Обзор публикаций и выделение нерешенных задач. Остановимся более подробно на изучении оболочечных фрагментов. Широкое их использование при технической реализации комплектующих подвижных объектов стимулировало развитие достаточно простых, но эффективных, методов их расчета [1 – 4].

В основу теории положено предположение о существенно малом, по сравнению с толщиной, перемещении точек поверхности. Координатные функции представлялись в виде рядов.

К недостаткам метода относится отсутствие области его применения, а также характера сходимости рядов.

Предпочтительным является путь определения координатных функций через элементарные. С другой стороны, имеет смысл технически устранить опасную зону – малую жесткость поверхности в радиальном направлении. Это реализуется переходом к поверхностям с ненулевой Гауссовой кривизной, например, вогнутым или выпуклым. Решению задачи посвящены были приводимые исследования.

Постановка задачи данного исследования. Ставится задача составления уравнения частот тонких оболочечных фрагментов двигателей с выпуклой (вогнутой) линией меридиана и численный анализ собственных частот ω для нескольких модификаций.

Как оказалось, колебания оболочек вращения с переменным радиусом кривизны срединной поверхности существенно меняют сложившиеся представления о характере колебаний, что проявляется в резком искажении их форм, с одной стороны, в проявлении зон повышенной напряженности и почти не колеблющихся участков – с другой.

Изложение основного материала с обоснованием полученных результатов

Чтобы получить уравнение частот для трех пар дифференциальных уравнений формально примем равными нулю их правые части [5, 6]:

$$Q_z^{(1)}(t)=0;\quad Q_\varphi^{(1)}(t)=0;\ Q_w^{(1)}(t)=0;$$
$$Q_z^{(2)}(t)=0;\quad Q_\varphi^{(2)}(t)=0;\ Q_w^{(2)}(t)=0. \tag{1}$$

Затем, используем аппроксимации вида

$$\begin{cases} A_1^{(1)}(t)=a_1^{(1)}e^{i\omega t}; \\ B_1^{(1)}(t)=b_1^{(1)}e^{i\omega t};\ C_1^{(1)}(t)=c_1^{(1)}e^{i\omega t}; \\ A_1^{(2)}(t)=a_1^{(2)}e^{i\omega t}; \\ B_1^{(2)}(t)=b_1^{(2)}e^{i\omega t};C_1^{(2)}(t)=c_1^{(2)}e^{i\omega t}, \end{cases} \tag{2}$$

где $a_1^{(1)},\ b_1^{(1)},\ c_1^{(1)}, a_1^{(2)},\ b_1^{(2)},\ c_1^{(2)}$ – произвольные постоянные, для подстановки в уравнения движения.

Получаем:

$$\begin{cases} \left(a_{z2}^{(1)}-\omega^2 a_{z1}^{(1)}\right)a_1^{(1)}+a_{z3}^{(1)}\,b_1^{(1)}+a_{z4}^{(1)}c_1^{(1)}=0; \\ \left(a_{z2}^{(2)}-\omega^2 a_{z1}^{(2)}\right)a_1^{(2)}+a_{z3}^{(2)}\,b_1^{(2)}+a_{z4}^{(2)}c_1^{(2)}=0; \\ \left(-b_{\varphi2}^{(1)}-\omega^2 b_{\varphi1}^{(1)}\right)b_1^{(1)}+b_{\varphi3}^{(1)}\,a_1^{(1)}+b_{\varphi4}^{(1)}c_1^{(1)}=0; \\ \left(b_{\varphi2}^{(2)}-\omega^2 b_{\varphi1}^{(2)}\right)b_1^{(2)}+b_{\varphi3}^{(2)}\,a_1^{(2)}+b_{\varphi4}^{(2)}c_1^{(2)}=0; \\ \left(c_{w2}^{(1)}-\omega^2 c_{w1}^{(1)}\right)c_1^{(1)}+c_{w3}^{(1)}\,b_1^{(1)}+c_{w4}^{(1)}a_1^{(1)}=0; \\ \left(c_{w2}^{(2)}-\omega^2 c_{w1}^{(2)}\right)c_1^{(2)}+c_{w3}^{(2)}\,b_1^{(2)}+c_{w4}^{(2)}a_1^{(2)}=0. \end{cases} \tag{3}$$

Система уравнений (3) распадается на две независимых:

$$\begin{cases} \left(a_{z2}^{(1)}-\omega^2 a_{z1}^{(1)}\right)a_1^{(1)}+a_{z3}^{(1)}\,b_1^{(1)}+a_{z4}^{(1)}c_1^{(1)}=0; \\ b_{\varphi3}^{(1)}\cdot a_1^{(1)}+\left(-b_{\varphi2}^{(1)}-\omega^2 b_{\varphi1}^{(1)}\right)b_1^{(1)}+b_{\varphi4}^{(1)}c_1^{(1)}=0; \\ c_{w4}^{(1)}a_1^{(1)}+c_{w3}^{(1)}\,b_1^{(1)}+\left(c_{w2}^{(1)}-\omega^2 c_{w1}^{(1)}\right)c_1^{(1)}=0; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \left(a_{z2}^{(2)}-\omega^2 a_{z1}^{(2)}\right)a_1^{(2)}+a_{z3}^{(2)}\,b_1^{(2)}+a_{z4}^{(2)}c_1^{(2)}=0; \\ b_{\varphi3}^{(2)}\cdot a_1^{(2)}+\left(b_{\varphi2}^{(2)}-\omega^2 b_{\varphi1}^{(2)}\right)b_1^{(2)}+b_{\varphi4}^{(2)}c_1^{(2)}=0; \\ c_{w4}^{(2)}a_1^{(2)}+c_{w3}^{(2)}\,b_1^{(2)}+\left(c_{w2}^{(2)}-\omega^2 c_{w1}^{(2)}\right)c_1^{(2)}=0. \end{cases} \tag{5}$$

Или в таком виде:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}-\omega^2 & \dfrac{a_{z3}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} & \dfrac{a_{z4}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}} \\ \dfrac{b_{\varphi3}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} & -\dfrac{b_{\varphi2}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}-\omega^2 & \dfrac{b_{\varphi4}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}} \\ \dfrac{c_{w4}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}} & \dfrac{c_{w3}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}} & \dfrac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}-\omega^2 \end{vmatrix}=0; \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}-\omega^2 & \dfrac{a_{z3}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}} & \dfrac{a_{z4}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}} \\ \dfrac{b_{\varphi3}^{(2)}}{b_{\varphi1}^{(2)}} & \dfrac{b_{\varphi2}^{(2)}}{b_{\varphi1}^{(2)}}-\omega^2 & \dfrac{b_{\varphi4}^{(2)}}{b_{\varphi1}^{(2)}} \\ \dfrac{c_{w4}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} & \dfrac{c_{w3}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} & \dfrac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}}-\omega^2 \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Соотношения (6), (7) дают возможность определить частоты ω. Из выражения (6) получаем:

$$\lambda^3+E_1^{(1)}\lambda^2+E_2^{(1)}\lambda+E_3^{(1)}=0, \tag{8}$$

где $\lambda=\omega^2;\ E_1^{(1)}=\dfrac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}+\dfrac{b_{\varphi2}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}+\dfrac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}};$

$$E_2^{(1)}=-\frac{b_{\varphi2}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}\left(\frac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}+\frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}\right)-\frac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}\cdot\frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}+$$
$$+\frac{b_{\varphi4}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}\cdot\frac{c_{w3}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}+\frac{a_{z3}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}\cdot\frac{b_{\varphi3}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}+\frac{a_{z4}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}\cdot\frac{c_{w4}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}};$$

$$E_3^{(1)}=\frac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}\cdot\frac{b_{\varphi2}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}\cdot\frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}-\frac{a_{z2}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}\cdot\frac{b_{\varphi4}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}\cdot\frac{c_{w3}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}+$$
$$+\frac{a_{z3}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}\cdot\frac{b_{\varphi4}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}\cdot\frac{c_{w4}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}-\frac{c_{w2}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}\cdot\frac{a_{z3}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}\cdot\frac{b_{\varphi3}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}+$$
$$+\frac{a_{z4}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}\cdot\frac{b_{\varphi3}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}\cdot\frac{c_{w3}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}-\frac{a_{z4}^{(1)}}{a_{z1}^{(1)}}\cdot\frac{b_{\varphi2}^{(1)}}{b_{\varphi1}^{(1)}}\cdot\frac{c_{w4}^{(1)}}{c_{w1}^{(1)}}.$$

Аналогично, из (7) получаем второе уравнение частот:

$$\lambda^3 + E_1^{(2)}\lambda^2 + E_2^{(2)}\lambda + E_3^{(2)} = 0, \tag{9}$$

где $\lambda = \omega^2$; $E_1^{(2)} = \frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}} - \frac{b_{\varphi 2}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}} + \frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}}$;

$$E_2^{(2)} = \frac{b_{\varphi 2}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\left(\frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}} + \frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}}\right) - \frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} + $$
$$+\frac{b_{\varphi 4}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w3}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} + \frac{a_{z3}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 3}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}} + \frac{a_{z4}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w4}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}};$$

$$E_3^{(2)} = -\frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 2}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} - \frac{a_{z2}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 4}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w3}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} + $$
$$+\frac{a_{z3}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 4}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w4}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} - \frac{a_{z3}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 3}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w2}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} + $$
$$+\frac{a_{z4}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 3}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w3}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}} + \frac{a_{z4}^{(2)}}{a_{z1}^{(2)}}\cdot\frac{b_{\varphi 2}^{(2)}}{b_{\varphi 1}^{(2)}}\cdot\frac{c_{w4}^{(2)}}{c_{w1}^{(2)}}.$$

Перейдем от канонической формы записи уравнений (8) и (9) к виду, удобному для отыскания корней кубического уравнения. Имеем, соответственно:

$$y_1^3 + 3p_1 y_1 + 2q_1 = 0, \tag{10}$$

где $y_1 = \lambda_1 + \frac{1}{3}E_1^{(1)}$;

$$2q_1 = \frac{2E_1^{(1)3}}{27} - \frac{E_1^{(1)}E_2^{(1)}}{3} + E_3^{(1)};$$

$$3p_1 = \frac{3E_2^{(1)} - E_1^{(1)2}}{3} = E_2^{(1)} - \frac{E_1^{(1)2}}{3};$$

$$y_2^3 + 3p_2 y_2 + 2q_2 = 0, \tag{11}$$

где $y_2 = \lambda_2 + \frac{E_1^{(2)}}{3}$;

$$2q_2 = \frac{2E_1^{(2)3}}{27} - \frac{E_1^{(2)}E_2^{(2)}}{3} + E_3^{(2)};$$

$$3p_2 = \frac{3E_2^{(2)} - E_1^{(2)2}}{3} = E_2^{(2)} - \frac{E_1^{(1)2}}{3}.$$

В обоих уравнениях дискриминант $D_i = \left(q_i^2 + p_i^3\right) > 0$, что позволяет сделать вывод о наличии одного положительного корня как в (10), так и в (11). Два других корня – комплексные.

Тогда, применив формулу Кардана для уравнений (10) и (11), находим решение в виде:

$$y_1 = U_1 + V_1\,; \quad y_2 = U_2 + V_2\,, \tag{12}$$

где

$$U_1 = \left\{-q_i + \left[q_i^2 + p_i^3\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left[-q_i + D_i^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}};$$

$$V_1 = \left\{-q_i - \left[q_i^2 + p_i^3\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} = \left[-q_i - D_i^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}. \tag{13}$$

Численный анализ в режиме вычислительных операций MATCHAD позволяет найти значения собственных частот ω поплавка.

Выпуклость $(\delta > 0)$, равно как и вогнутость $(\delta < 0)$, в пределах от нуля до 0,3 см практически не влияет на существенные изменения величины собственной частоты ω и составляет 1,393 при $\delta = 0{,}01$ см и 1,196 при $\delta = 0{,}30$ (первый столбец), а также 1,411 при $\delta = -0{,}01$ см и 1,822 при $\delta = -0{,}30$ см (предпоследний столбец). В то же время, для поплавка в виде классического кругового цилиндра с нулевой кривизной боковой поверхности $(\delta = 0)$ имеют место две собственные частоты: $\omega_1 = 1{,}404$ и $\omega_2 = 1{,}183$ [7].

Из уравнений (11) находим, что значения собственных частот ω_2 составляют: 1,175 для $\delta = 0{,}01$ и 1,193 при $\delta = -0{,}01$. Если $\delta = 0{,}30$, то $\omega_2 = 0{,}979$, а для $\delta = -0{,}30$ – $\omega_2 = 1{,}559$.

Таким образом, изменяя кривизну δ (в том числе ее знак) можно желаемым образом изменить значение собственных частот. Одновременно, зная динамику изменения линии меридиана под действием тех или иных факторов, можно также прогнозировать смещение ω по оси частот.

Таблица 1

Частоты ω собственных колебаний оболочки с выпуклой $(\delta > 0)$ и вогнутой $(\delta < 0)$ поверхностью

$\delta \setminus \omega$			$-\delta \setminus \omega$		
0	1,404	1,183	0	1,404	1,183
0,01	1,393	1,175	0,01	1,411	1,193
0,02	1,386	1,166	0,02	1,421	1,200
0,03	1,375	1,158	0,03	1,432	1,212
0,04	1,367	1,149	0,04	1,442	1,221
0,05	1,356	1,140	0,05	1,459	1,229
0,06	1,349	1,136	0,06	1,463	1,241
0,07	1,342	1,127	0,07	1,476	1,249
0,08	1,334	1,118	0,08	1,487	1,261
0,09	1,327	1,109	0,09	1,497	1,269
0,10	1,319	1,105	0,10	1,510	1,281
0,11	1,311	1,095	0,11	1,523	1,292
0,12	1,304	1,091	0,12	1,533	1,304
0,13	1,296	1,082	0,13	1,546	1,315
0,14	1,288	1,077	0,14	1,559	1,327
0,15	1,285	1,068	0,15	1,575	1,338
0,16	1,277	1,063	0,16	1,587	1,349
0,17	1,269	1,058	0,17	1,600	1,364
0,18	1,265	1,049	0,18	1,634	1,375
0,19	1,257	1,044	0,19	1,631	1,389
0,20	1,253	1,039	0,20	1,646	1,404
0,21	1,245	1,030	0,21	1,661	1,418
0,22	1,241	1,025	0,22	1,676	1,432
0,23	1,233	1,020	0,23	1,694	1,446
0,24	1,229	1,015	0,24	1,709	1,459
0,25	1,225	1,005	0,25	1,726	1,476
0,26	1,217	1,000	0,26	1,746	1,490
0,27	1,212	0,999	0,27	1,764	1,507
0,28	1,208	0,989	0,28	1,783	1,523
0,29	1,204	0,984	0,29	1,800	1,543
0,30	1,196	0,979	0,30	1,822	1,559
0,40	1,158	0,935			
0,50	1,109	0,883			

Выводы и перспективы дальнейших исследований в данном направлении

Таким образом представляется возможность вычисления собственных частот выпуклых и вогнутых оболочечных фрагментов двигателей. Полученные аналитические соотношения позволяют создать алгоритм вычислений с последующим, научно обоснованным, прогнозированием изоляционных свойств конструкции. Использование ЭВМ позволит решать ряд задач оптимизации по, тем или иным, критериям, в зависимости от природы и характера возбуждающих факторов. Кроме того, предоставляется возможность учета перекрестных связей по координатным функциям.

В дальнейшем целесообразно оценить степень перекрестного влияния координатных функций друг на друга и, естественно, изменение характера динамических свойств выбранной оболочки [8, 9].

Литература

1. Галеркин Б.Г. К теории упругой цилиндрической оболочки // ДАН СССР. – 1934. – Т. 4, №5-6. – С. 73-81.

2. Власов В.З. Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней // Изв. АН СССР, ОТН. – 1949. – № 6. – С. 41-45.

3. Новожилов В.В. Расчет оболочек тел вращения // Изв. АН СССР, ОТН. – 1946. – № 7. – С. 51-62.

4. Штаерман И.Я. К теории симметричной деформации анизотропных упругих оболочек // Изв. Киевск. политехн. и с/х ин-та. – 1924. – Вып. 1-2. – С. 37-43.

5. Карачун В.В., Каюк Я.Ф., Мельник В.Н. Волновые задачи поплавкового гироскопа. – К.: Корнейчук, 2007. – 228 с.

6. Карачун В.В., Мельник В.М Визначення граничних умов для обчислення координатних функцій деформації поплавця гіроскопа // Вісник ЖДТУ. – 2006. – № 4 (39) / Технічні науки. – С. 115-119.

7. Мельник В.М., Карачун В.В. Невісесиметричний випадок пружної деформації поплавця гіроскопа // Вісник ЖДТУ. – 2006. – № 2 (37) / Технічні науки. – С. 86-91.

8. Карачун В.В., Лозовик В.Г., Мельник В.Н. Дифракция звуковых волн на подвесе гироскопа. – К.: Корнейчук, 2000. – 176 с.

9. Карачун В.В., Лозовик В.Г. Напряженно-деформированое состояние поверхности круговой цилиндрической оболочки под действием акустической волны // Проб. прочности, 1997. – № 3. – С. 139-144.

Поступила в редакцию 23.05.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Н.И. Бурау, Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев.