

УДК 629.735.015:533.6.013.43

**Б.М. ШИФРИН**

*Государственная летная академия Украины, Кировоград, Украина*

## **О МОДЕЛИРОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ ПНЕВМАТИКОВ И ПНЕВМОКОЛЕСНЫХ МАШИН**

Рассмотрены вопросы математического моделирования колебаний пневматика и пневмоколесной машины в целом. Используются простые аналитические модели пневматика, приводимые к дифференциальному уравнению 1-го порядка (системы 1-го порядка); результаты математического моделирования при угловых (верчение) и поперечных колебаниях сопоставлены с экспериментальными и теоретическими данными, полученными на основе континуальной модели «струна». Объяснен эффект зависимости собственной частоты поперечных колебаний опоры шасси самолета от скорости его пробежки. Сделаны замечания об использовании моделей пневматиков при изучении колебаний пневмоколесных машин.

**математическое моделирование, пневматик, пневмоколесная машина, модель «струна»**

### **Введение**

Вопросы управляемости пневмоколесных машин (автомобилей, автопоездов, движущихся по взлетно-посадочной полосе самолетов и т.п.) и усталостного разрушения их конструктивных элементов требуют теоретического исследования колебаний пневматиков (т.е. колес, снаряженных пневматическими шинами) и пневмомашин в целом, возникающих при их движении. К настоящему времени построена основная аналитическая модель установившегося движения пневматика [1]. Однако, несмотря на значительный прогресс в моделировании движения пневматиков, не существует общепринятой адекватной и удобной для изучения динамики пневмоколесных машин механико-математической модели неустановившихся движений пневматика.

Настоящая работа посвящена математическому моделированию поперечной силы трения (или поворотного усилия) на катящемся с уводом и колеблющемся пневматике, а также вопросам моделирования колебаний пневмоколесных машин в целом. Распространяя гипотезу И. Рокара на неустановившееся движение [2], и, используя модели переходных процессов пневматика [3], описаны уравнение баланса сил на пневматике и его дискретная меха-

нико-математическая модель, могущая использоваться как составной элемент общей механической модели пневмомашин, состоящей из связанных абсолютно твердых тел (в этой части работа является развитием работы [4]). Основное внимание уделено адекватности моделей колебаний пневматика – результаты моделирования для двух видов колебаний пневматика сопоставлены с экспериментальными и теоретическими данными, полученными на основе континуальной модели пневматика «струна» [5]. Объяснен эффект зависимости резонансных частот поперечных колебаний основных опор шасси самолета от скорости движения его центра масс, описанный в [6].

### **Основной материал**

**Дискретная модель пневматика и уравнение баланса сил.** На рис. 1 показан катящийся с углом увода  $U$  пневматик, а на рис. 2 – его дискретная механическая модель.

Поперечная жесткость пневматика обозначена  $c_n$ . Пневматик представлен как упругая связка двух твердых тел - тела конечной массы «1» и тела квазиулевого массы «2»; это тело на рис. 1 заштриховано. Поперечные смещения будем обозна-

чать  $Z_i(t), i = 1, 2, t$  – время в секундах. Ось пневматика проходит через его центр масс  $C$  и движется плоско параллельно полотну дороги,  $Z_1(t) \equiv Z_C(t)$ . При описании этого плоско параллельного движения за полюс примем точку  $C$ . В общем случае рассматриваемого движения

$$V(t) = \text{const}; Z_C(t) \neq \text{const}; \varphi(t) \neq \text{const},$$

где  $V$  – продольная скорость точки  $C$ ,  $\varphi$  – угол вращения колеса. Для дальнейшего введем обозначения:

$$\dot{Z}_C = W,$$

где  $W$  – поперечная скорость точки  $C$  или, что то же самое, поперечная скорость тела «1»; здесь и далее точка сверху обозначает производную по времени  $t$ .

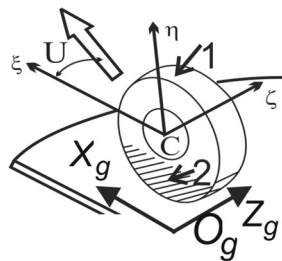


Рис. 1. Катящийся с уводом пневматик

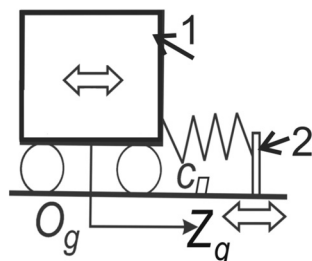


Рис. 2. Дискретная модель пневматика

Удовлетворимся изучением двух случаев:

$$1) \quad Z_C(t) = Z_0 \sin \Omega t, \varphi(t) = \text{const} = 0$$

и

$$2) \quad Z_C(t) = \text{const} = 0, \varphi(t) = \varphi_0 \sin \Omega t,$$

где  $Z_0, \varphi_0, \Omega$  – известные постоянные величины.

Случай 1 – есть случай поперечных колебаний, а случай 2 – случай колебаний при верчении. В обоих случаях будем изучать поперечную силу трения на пневматике  $F$ . Введем в рассмотрение подлежащие определению функции амплитуды и фазового угла

$$A_i(\bar{\Omega}), \beta_i(\bar{\Omega}), i = 1, 2,$$

где  $\bar{\Omega} = \Omega D / V$  – приведенная частота вынужденных колебаний;  $D$  – диаметр колеса; индекс «1» будем ставить при рассмотрении случая 1, а индекс

«2» – при рассмотрении случая 2. Введенные функции амплитуды и фазового угла такие, что

$$F / c_n = \begin{cases} Z_0 A_1 \sin(\Omega t + \beta_1); \\ \varphi_0 D A_2 \sin(\Omega t + \beta_2). \end{cases}$$

Объединяя идеи [2, 3], силу трения представим в виде:

$$F = KU, \quad (1)$$

где  $K = \text{const}$  – коэффициент увода,

$$U = -\varphi + \dot{Z}_2 / V. \quad (2)$$

Запишем уравнение баланса сил упругости и трения, приложенных к телу «2»:

$$c_n(Z_2 - Z_1) = -F(U = -\varphi + \dot{Z}_2 / V). \quad (3)$$

Уравнение (3) приближенное и его справедливость необходимо проверить путем сопоставления расчетных и экспериментальных данных. Для проверки будем использовать значения поперечной силы трения  $F$ .

Совместное рассмотрение уравнений (1) – (3) приводит к дифференциальному уравнению 1-го порядка относительно поперечной силы трения:

$$\dot{F} + (c_n V / K) F = c_n (W - \varphi V). \quad (4)$$

С помощью этого уравнения для обоих изучаемых случаев можно найти функции искомые  $A_i(\bar{\Omega}), \beta_i(\bar{\Omega}), i = 1, 2$  [3,4]. В этих зависимостях единственной постоянной пневматика выступает величина

$$K / c_n = \lambda,$$

имеющая размерность длины. На рис. 3, 4 показаны экспериментальные кривые [4] (жирные линии) и теоретические кривые, полученные с помощью уравнения баланса (4) для пневматика, постоянная которого

$$K / (c_n D) = 0,495.$$

Кроме того, на этих рисунках приведены кривые, построенные по теории «струна» [4] при условии, что длина релаксации равна постоянной пневматика  $\lambda$  [2, 3]. Обе теоретические кривые практически совпали.

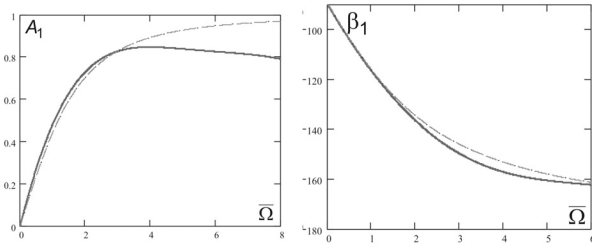


Рис. 3. Поперечные колебания

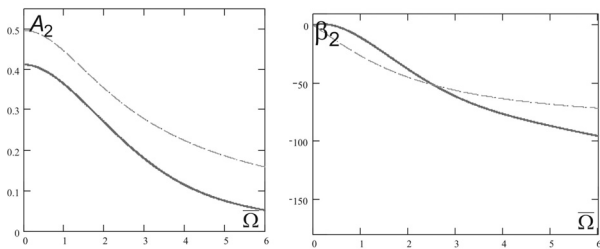


Рис. 4. Колебания верчения

Расхождения экспериментальной и расчетной кривых  $A_1(\bar{\Omega})$ , наблюдаемые при  $\bar{\Omega} \rightarrow \infty$ , можно объяснить возникновением скольжения на всем участке контакта пневматика с дорожным полотном и, как следствие, ограничением силы трения, т.к.

$$F \leq \mu N, \quad (5)$$

где  $\mu, N$  – коэффициент сухого трения и нормальное давление. Расхождения кривых  $A_2(\bar{\Omega})$  связаны, по-видимому, с тем, что нужно учитывать крутильную деформацию пневматика и помимо уравнения баланса сил рассматривать и уравнение баланса моментов.

Таким образом, с учетом неравенства (5) при поперечных колебаниях пневматика уравнение баланса сил дает адекватные результаты вплоть до начала полного скольжения. При колебаниях верчения согласование теоретических и экспериментальных значений несколько хуже.

**О моделировании поперечных колебаний пневмоколесных машин.** Приняв во внимание сказанное в предыдущем параграфе, и, изучая поперечные колебания пневмоколесных машин, можно использовать дискретную модель пневматика (рис.2). При этом, очевидно, уравнение поперечного движения тела «2» будет иметь вид:

$$m_2 \ddot{Z}_2 + c_n (Z_2 - Z_1) = -F(U = \dot{Z}_2 / V). \quad (6)$$

Физически оправдано считать  $m_2 = 0$  или  $m_2 \rightarrow 0$ , где  $m_2$  – масса тела «2». В первом случае получим механическую систему с нецелым числом степеней свободы, во втором – уравнение движения, содержащее малый множитель при высшей производной. При принятии  $m_2 = 0$  уравнение движения (6) совпадает с уравнением баланса сил (3).

Сделаем несколько замечаний о правой части уравнения (6). Графики 3, 4 были построены с использованием коэффициента увода  $K$ , экспериментально найденного при установившемся движении пневматика. Располагая зависимостями  $F(U)$  для установившегося движения  $F = F_{ss}$  (к примеру [1, 7]), и, изучая колебания вблизи основного угла увода  $U_0$ , можно либо использовать зависимости [1, 7] и решать задачу в нелинейной постановке, либо приближенно полагать

$$F = K_0 U, K_0 = dF_{ss} / dU |_{U=U_0}.$$

**О зависимости собственной частоты опоры шасси от скорости пробежки пневмомашин.** Рассматриваем колебания основной опоры шасси самолета в направлении оси  $Z$  при пробежках самолета со скоростями  $V = const$  по взлетно-посадочной полосе (рис. 5, а). Замечено, что при этом резонансная частота колебаний уменьшается по мере увеличения скорости пробежки (рис. 5, б [5]).

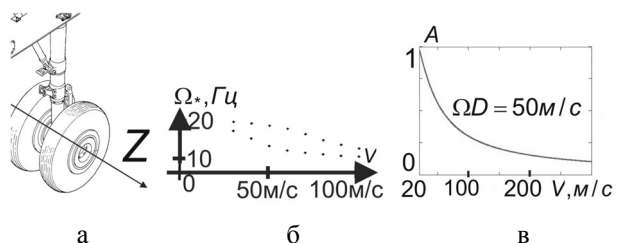


Рис. 5. О зависимости собственной частоты опоры от скорости пробежки

Для объяснения этого обстоятельства на рис.5в приведена зависимость

$$A_2 = A = A(V), \Omega = const,$$

полученная после решения уравнения (4). Из рис. 5, в видно, что по мере увеличения скорости пробегки уменьшается амплитудное значение поперечного трения. При «малых» скоростях  $V$  трение значительно и в зоне контакта пневматика с дорожным полотном реализуются условия близкие к условиям жесткого защемления. При «больших» скоростях реализуются условия близкие к условиям свободно-го края. Поэтому следует ожидать, что при росте скорости резонансная частота будет иметь тенденцию уменьшения в два раза, что и наблюдается на рис. 5, б.

### Выводы

1. Сопоставлены теоретические решения о колебаниях пневматика, полученные на основе теории струны и уравнения баланса сил упругости и трения (или дискретной модели пневматика). Упомянутые теоретические решения сопоставлены с экспериментальными данными и проанализированы их расхождения. Установлена близость решений, полученных на основе теории струны и уравнения баланса, и показана адекватность дискретной модели пневматика.

2. Пояснена зависимость собственной частоты поперечных колебаний основных опор шасси самолета от скорости пробегки самолета [5]. Эта зависимость является следствием изменения соотношения адгезии и скольжения на участке контакта пневматика с полотном дороги.

### Литература

1. Pacejka H.B., Sharp R.S. Shear force development by pneumatic tires in steady-state conditions. A review of modeling aspects // Vehicle system dynamics. – 1991. – V. 20, № 3-4. – P. 121-176.
2. Рокар И. Неустойчивость в механике: автомобили, самолеты, висячие мосты. – М.: Изд. иностранной литературы. 1959. – 287 с.
3. Lateral stiffness, cornering stiffness and relaxation length of the pneumatic tire / J.S. Loeb, D.A. Guenther, Hung-Hsu F. Chen, J.R. Ellis // SAE Technical Paper Series. – № 900129. – 9 p.
4. Плахтиєнко М.П., Шифрин Б.М. Модель виведення пневматика при вимушених коливаннях // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: Зб. наук. праць. – Львів. – 2006. – № 40. – С. 190-195.
5. Clark S., Dodge R., Nybakken G. Dynamic properties of aircraft tires // J. aircraft. – 1974. – Vol. 11, № 3. – P. 166-172.
6. Van der Valk R., and Pacejka H.B. An analysis of a civil main gear shimmy failure // Vehicle System Dynamics. – 1993. – Vol. 22. – P. 97-121.
7. Плахтиенко Н.П., Шифрин Б.М. Одноступенная модель колебаний опоры шасси самолета // Техническая механика. – 2006. – № 1. – С. 16-25.

Поступила в редакцию 26.05.2008

**Рецензент:** д-р техн. наук Г.Б. Филимоныхин, Кировоградский национальный технический университет, Кировоград.