УДК 629.7.054

В.Н. МЕЛЬНИК

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев, Украина

ДИФРАКЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ НА ОБОЛОЧКАХ

Проводится обзор методов расчета упругого взаимодействия оболочечных фрагментов с внешними возмущающими воздействиями, в частности, с проникающим акустическим излучением. Формулируются необходимые теоретические предпосылки создания расчетных моделей оболочек с ненулевой гауссовой кривизной и произвольным очертанием линии меридиана.

поплавковый гироскоп, акустическое излучение, жесткий цилиндр, координатные функции

Введение

Постановка проблемы и ее связь с научно-техническими задачами. Пусть подвижная часть прибора (поплавок) представляет собой оболочку вращения и в общем случае – произвольной формы. Считаем, что при акустическом воздействии энергия генерируемой вибрации боковой и торцевых поверхностей не передается на сопряженные поверхности, что позволяет предполагать их шарнирно соединенными. В этом случае допустимо изучать независимо динамику боковой поверхности (оболочки) и динамику торцевой поверхности поплавка (пластины).

Широкое использование при технической реализации многих элементов бортовой аппаратуры РН, и летательных аппаратов в целом, различных типов оболочек, стимулировало развитие достаточно простых, но эффективных методов их расчета [1]. Известны два основных пути построения теории оболочек. Первый состоит в том, что оболочку рассматривают как трехмерное упругое тело, а решение соответствующих уравнений теории упругости осуществляется путем разложения всех величин в ряды по степеням расстояния от рассматриваемой точки до срединной поверхности, либо по некоторой системе функций этой переменной.

Второй, приближенный, подход состоит в том, что трехмерную задачу сводят к более простой – задаче о равновесии и деформации срединной поверхности оболочки. Упрощение реализуется принятием соответствующих статико-геометрических гипотез. Этот, простейший, вариант теории основан на использовании гипотез Кирхгофа-Лява.

Построенная на базе гипотез Кирхгофа приближенная теория именуется теорией тонких оболочек, а первая – теорией толстых оболочек. Одну и ту же оболочку можно рассчитать как первым методом, так и вторым. Результаты расчета на основании приближенной теории будут тем точнее, чем меньше относительная толщина оболочки $\frac{h}{R}$ (здесь h – толщина оболочки, R – минимальный линейный размер срединной поверхности). Таким образом, можно сформулировать критерий тонкостенности, задаваясь допустимой величиной погрешности [2].

Оценка степени влияния акустического излучения на оболочечные конструкции не может быть произведена на основании предельного перехода от пластин плоских к пластинам искривленным. Суть в том, что явления дифракции и интерференции звуковых волн, взаимодействующих с оболочкой, имеют целый ряд специфических особенностей, в том числе и резонансного характера. Поэтому они должны найти отражение уже в самом начале – на этапе выбора расчетной модели.

Влияние упругости на колебания конструкций в жидкости впервые анализировалось Rayleigh (Джон

Уильям Стретт) в 1883 году и Е. Николаи в 1909 году при изучении колебаний бесконечных по протяженности цилиндрических оболочек, а также H. Lamb в 1920 году. Эти работы основывались на предположении совпадения форм колебаний упругих тел в жидкости и пустоте.

Обзор публикаций и выделение нерешенных задач. Особенностью работ последних лет можно считать усложнение расчетных моделей как жидкости, так и упругих тел, наряду с учетом все большего числа возмущающих факторов. Существенными отличиями можно назвать следующие:

– отказ от гипотезы схожести форм;

– применение метода разложения по собственным функциям некоторой краевой задачи вместо разложения по формам колебаний;

– усовершенствование асимптотических методов расчета колебаний.

Фундаментальные исследования взаимодействия потока жидкости с упругими конструкциями получили развитие в 20...30 годах предыдущего столетия. В этой связи следует упомянуть работы E. Reissner, Е. Гроссмана, М. Келдыша, М. Лаврентьева, А. Некрасова и других, заложивших основы теории аэроупругости, подобно тому, как труды Л. Лейбензона и А. Вестергардта легли в основу теории гидроупругости.

Вопросы нестационарного взаимодействия оболочек со средой освещались в ряде монографий и обзоров [3], в которых проанализировано большое число важных для теории и практики задач. Воздействие плоской ступенчатой или экспоненциально затухающей волны проанализировано в ряде работ [4] и, зачастую, служит «эталонной» мерой при апробации различных подходов к исследованию и решению задач нестационарной гидроупругости.

Анализ структуры звукового поля внутри оболочки, по обе стороны которой находятся в общем случае неодинаковые акустические среды, проводился Е. Шендеровым.

Что касается изучения свойств оболочек при акустическом нагружении, а также вопросов дифракции и интерференции звуковых волн, то одними из первых следует назвать работы Л. Лямшева. Характерной особенностью названных исследований явилось изучение бесконечных (или полубесконечных) по протяженности оболочек. Решения краевых задач динамики оболочек и пластин впервые в достаточно полном объеме выполнены В. Гринченко. Здесь обращено внимание, что основанный на приведении граничных задач к бесконечным системам уравнений метод исследований установившихся колебаний становится эффективным лишь тогда, когда удается установить асимптотические свойства этих неизвестных (закон асимптотических выражений Б. Кояловича: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = A_0$; т.е., с ростом номера “n” неизвестные стремятся к общему для них, и отличному от нуля, пределу). Другой асимптотический метод – метод однородных решений – получил развитие в работах П. Шиффа и В. Стеклова.

Последующие важные разработки, связанные с использованием метода Г. Ламе, принадлежат С. Калискому.

Постановка задачи данного исследования. Изучение колебаний замкнутой круговой цилиндрической оболочки привело к неожиданному результату. Оказалось, что наинизшим частотам соответствуют колебания сложной формы, сопровождающиеся образованием большого (безгранично увеличивающегося с уменьшением толщины) числа волн в плоскости шпангоута.

В дальнейшем, в процессе изучения колебаний оболочек вращения обнаружилось, что непостоянство радиуса кривизны срединной поверхности существенно меняет картину колебаний оболочки. Этот факт привел к выводу, что наиболее изученные круговые цилиндрические и сферические оболочки постоянной кривизны все же не могут быть эталоном для суждений о характере колебаний оболочек произвольного очертания.

Таким образом, целесообразно логику построения расчетной модели оболочки начать с произвольно очерченной линии меридиана, т.е. рассматривать оболочки с ненулевой гауссовой кривизной.

Изложение основного материала с обоснованием полученных результатов

Предположим, что оболочка относится к криволинейным ортогональным координатам α_1 и α_2. Их считаем линиями кривизны с радиусом R_1 и R_2.

Обозначим через A_1 и A_2 параметры Ламе срединной поверхности π оболочки. Тогда, добавив силы инерции, можем воспользоваться уравнениями равновесия оболочки, которые в развернутом виде записываются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 S}{\partial \alpha_2}-\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}T_2+\\
+\frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2}-\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}M_2\right)+\\
+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{A_1}{R_1}H\right)+\frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}H=\\
=-A_1A_2q_1+\rho A_1A_2h\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2};\\
\frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2 S}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}T_1+\\
+\frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}M_1\right)+\\
+\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{A_2}{R_2}H\right)+\frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}H=\\
=-A_1A_2q_2+\rho A_1A_2h\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2};\\
\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\frac{1}{A_1}\times\right.\\
\times\left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2}-\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}M_2\right)+\\
\left.+\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}M_1\right)\right\}=\\
=q_n+\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2};
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $q_1=p_1+\dfrac{m_1}{R_1}\approx p_1;\quad q_2=p_2+\dfrac{m_2}{R_2}\approx p_2;$

$$q_n=p_n+\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2 m_1}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial A_1 m_2}{\partial \alpha_2}\right)\approx p_n,$$

ибо в большинстве случаев величины m_i имеют порядок hp, так что, отождествляя q_i и p_i, тем самым отбрасываются слагаемые порядка $\dfrac{h}{R}$ по сравнению с единицей; T_1, T_2 – нормальные, а S – касательное усилия; M_1, M_2 – изгибающие моменты; H – крутящий момент; ρ – плотность материала оболочки; h – толщина оболочки; u_i – упругие перемещения точек поверхности π в направлении координаты α_i, а соотношения между усилиями-моментами и компонентами деформации срединной поверхности можно записать в виде:

$$T_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2\right);\; T_2=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1\right); \tag{2}$$

$$S=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\omega;$$

$$M_1=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\chi_1+\nu\chi_2\right);$$

$$M_2=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\chi_2+\nu\chi_1\right);\quad H=\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\tau.$$

Здесь первые три величины – $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ – характеризуют равномерную по толщине оболочки деформацию, определяемую растяжением и сдвигом срединной поверхности, а вторые три – χ_1, χ_2, τ – определяют линейно меняющуюся по толщине деформацию, связанную с изгибом и скручиванием срединной поверхности, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. В дальнейшем первые три величины будем именовать компонентами тангенциальной деформации, а последние три – компонентами изгибной деформации.

Деформация оболочки полностью определяется заданием шести указанных величин:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_2 + \frac{W}{R_1} \;; \qquad (3)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_1 + \frac{W}{R_2} \;; \qquad (4)$$

$$\begin{gathered}
\omega = \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{U_2}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{U_1}{A_1}\right) = \\
= \frac{A_2}{A_1}\left(-\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_2 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1}A_2\right) + \\
+ \frac{A_1}{A_2}\left(-\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_1 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2}A_1\right) = \\
= -\frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_2 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} - \\
- \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_1 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} + \\
+ \frac{1}{A_2}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_2 - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_1.
\end{gathered} \qquad (5)$$

$$\begin{gathered}
\chi_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{U_1}{R_1}\right) - \\
- \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \frac{U_2}{R_2}\right) = \\
= -\frac{1}{A_1}\left(-\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1^2} + \right. \\
\left. + \frac{1}{R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial \alpha_1}U_1 - \frac{1}{R_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1}\right) - \\
- \frac{1}{A_1 A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2 R_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_2 = \\
= \frac{1}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1^2} - \\
- \frac{1}{A_1 R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial \alpha_1}U_1 + \frac{1}{A_1 R_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \\
+ \frac{1}{A_1 A_2 R_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_2;
\end{gathered} \qquad (6)$$

$$\begin{gathered}
\chi_2 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \frac{U_2}{R_2}\right) - \\
- \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{U_1}{R_1}\right) = \\
= -\frac{1}{A_2}\left(-\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2^2} + \right. \\
\left. + \frac{1}{R_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial \alpha_2}U_2 - \frac{1}{R_2}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2}\right) - \\
- \frac{1}{A_1^2 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2 R_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_1 = \\
= \frac{1}{A_2^3}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2^2} - \\
- \frac{1}{A_1 R_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial \alpha_2}U_2 + \frac{1}{A_2 R_2}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} - \\
- \frac{1}{A_1^2 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2 R_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_1;
\end{gathered} \qquad (7)$$

$$\begin{gathered}
\tau = -\frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1^2 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \\
+ \frac{1}{A_1 A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \\
+ \frac{1}{A_2 R_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2 R_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_1 + \\
+ \frac{1}{A_1 R_2}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2 R_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_2.
\end{gathered} \qquad (8)$$

Из соотношений (2) с учетом выражений (3) – (5) определяем нормальные T_1, T_2 и касательное S – усилия:

$$\begin{gathered}
T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \nu\frac{1}{A_2}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\times \right. \\
\left. \times\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_2 + \nu\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_1\right) + W\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)\right];
\end{gathered} \qquad (9)$$

$$\begin{gathered}
T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\times \right. \\
\left. \times\left(\nu\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_1\right) + W\left(\nu\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right];
\end{gathered} \qquad (10)$$

$$\begin{gathered}
S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} - \right. \\
\left. - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_2 - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_1\right).
\end{gathered} \qquad (11)$$

С учетом соотношений (6) – (8), из формулы (2) вычисляем изгибающие моменты M_1 и M_2, а также крутящий момент H:

$$\begin{gathered}
M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \right. \\
+ \nu\frac{1}{A_2^3}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1^2} - \nu\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2^2} -
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{A_1R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial\alpha_1}U_1-\nu\frac{1}{A_2R_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial\alpha_2}U_2+\\
&+\frac{1}{A_1R_1}\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1}+\nu\frac{1}{A_2R_2}\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_2}-\\
&-\frac{1}{A_1A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}-\nu\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\\
&+\frac{1}{A_1A_2R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}U_2+\nu\frac{1}{A_1A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}U_1\Bigg);
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
M_2=&\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\Bigg(\nu\frac{1}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\\
&+\frac{1}{A_2^3}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}-\nu\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2W}{\partial\alpha_1^2}-\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2W}{\partial\alpha_2^2}-\\
&-\nu\frac{1}{A_1R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial\alpha_1}U_1-\frac{1}{A_2R_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial\alpha_2}U_2+\\
&+\nu\frac{1}{A_1R_1}\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_2R_2}\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_2}-\\
&-\nu\frac{1}{A_1A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\\
&+\nu\frac{1}{A_1A_2R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}U_2+\frac{1}{A_1A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}U_1\Bigg);
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
H=&\frac{Eh^3}{12\left(1+\nu\right)}\Bigg(-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial^2W}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+\\
&+\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}+\\
&+\frac{1}{A_2R_1}\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}U_1+\\
&+\frac{1}{A_1R_2}\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}U_2\Bigg).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

В представленном виде уравнения (1) использовать сложно. Поэтому следует провести над ними ряд преобразований, после которых записать в форме, удобной для интегрирования.

В качестве координат α_1 и α_2 целесообразно выбрать следующие:

$$\alpha_1=z;\quad \alpha_2=\phi.$$

Тогда

$$A_1=\sqrt{1+f'^2\left(z\right)};\qquad A_2=f\left(z\right).$$

Уравнения примут иной вид.

$$
\begin{aligned}
&\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial z}\Bigg[\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}+\nu\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}+\frac{\nu}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z+\\
&+W\left(\frac{A_2}{R_1}+\nu\frac{A_2}{R_2}\right)\Bigg]+\\
&+\frac{Eh}{2\left(1+\nu\right)}\frac{1}{A_1}\Bigg(A_1\frac{\partial^2U_\phi}{\partial z\partial\phi}+\frac{A_1^2}{A_2}\frac{\partial^2U_z}{\partial\phi^2}-\\
&-\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\Bigg)-\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\times\\
&\times\Bigg(\frac{A_2}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{A_2}{A_1^2}\frac{\partial^2W}{\partial z^2}-\frac{\nu}{A_2}\frac{\partial^2W}{\partial\phi^2}-\\
&-\frac{A_2}{A_1R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial z}U_z+\frac{A_2}{A_1R_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}+\\
&+\frac{Eh^3}{12\left(1+\nu\right)}\frac{1}{A_1}\frac{1}{R_1}\Bigg[-\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial^2W}{\partial z\partial\phi}\right)+\\
&+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{A_1}{A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{A_1^2}{A_2R_1}\frac{\partial U_z}{\partial\phi}\right)-\\
&-\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{A_1}{A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{A_1}{R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial z}\right)\Bigg]+\\
&+\frac{Eh^3}{12\left(1+\nu\right)}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigg(-\frac{1}{A_2R_1}\frac{\partial^2W}{\partial z\partial\phi}+\frac{1}{A_2^2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\phi}+\\
&-\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}\Bigg(\frac{\nu}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\nu}{A_1^2}\frac{\partial^2W}{\partial z^2}-\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2W}{\partial\phi^2}-\\
&-\frac{\nu}{A_1R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial z}U_z+\frac{\nu}{A_1R_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}+\frac{1}{A_2R_2}\frac{\partial U_z}{\partial\phi}-\\
&-\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{A_1A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z=\\
&=A_1A_2\left(-q_1+\rho h\frac{\partial^2U_z}{dt^2}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigg[\nu\frac{\partial U_z}{\partial z}+\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z+\\
&+W\left(\frac{\nu A_1}{R_1}+\frac{A_1}{R_2}\right)\Bigg]+\frac{Eh}{2\left(1+\nu\right)}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial z}\times\\
&\times\left(\frac{A_2^2}{A_1}\frac{\partial U_\phi}{\partial z}+A_2\frac{\partial U_z}{\partial\phi}-\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_\phi\right)+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigl(\frac{\nu}{A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\nu}{A_1}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-$$

$$-\frac{A_1}{A_2^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}-\frac{\nu}{R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial z}U_z+\frac{\nu}{R_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}+$$

$$+\frac{A_1}{A_2R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}+$$

$$+\frac{1}{A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z\Bigr)+\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{1}{A_2}\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial z}\times$$

$$\times\Bigl(-\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial\phi}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\phi}+\frac{A_2}{R_1}\frac{\partial U_z}{\partial\phi}-$$

$$-\frac{A_2}{A_1R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z+\frac{A_2^2}{A_1R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\Bigr)+\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial z}\times$$

$$\times\Bigl(-\frac{1}{A_1R_2}\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial\phi}+\frac{1}{A_1A_2R_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\phi}+\frac{1}{R_1R_2}\frac{\partial U_z}{\partial\phi}-$$

$$-\frac{1}{A_1R_1R_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z+\frac{A_2}{A_1R_2^2}\frac{\partial U_\phi}{\partial z}\Bigr)+ \qquad (16)$$

$$+\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}\Bigl(-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial\phi}+\frac{1}{A_1A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\times$$

$$\times\frac{\partial W}{\partial\phi}+\frac{1}{A_2R_1}\frac{\partial U_z}{\partial\phi}-\frac{1}{A_1A_2R_1}U_z+$$

$$+\frac{1}{A_1R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial z}\Bigr)=A_1A_2\left(-q_2+\rho h\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial t^2}\right).$$

$$\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}\Bigl[\frac{\partial}{\partial z}\Bigl(\frac{A_2}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{A_2}{A_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-$$

$$-\frac{\nu}{A_2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}-\frac{A_2}{A_1R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial z}U_z+\frac{A_2}{A_1R_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}+$$

$$+\frac{\nu}{R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}-\frac{\nu}{A_1^2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\nu}{A_1R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z\Bigr)\Bigr]+$$

$$+\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}\Bigl[\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigl(-\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial\phi}+$$

$$+\frac{A_1}{A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\phi}+\frac{A_1^2}{A_2R_1}\frac{\partial U_z}{\partial\phi}-\frac{A_1}{A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z+$$

$$+\frac{A_1}{R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial z}\Bigr)\Bigr]-\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\Bigl\{\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}\Bigl[\frac{\partial A_2}{\partial z}\Bigl(\frac{\nu}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-$$

$$-\frac{\nu}{A_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}-\frac{\nu}{A_1R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial z}U_z+$$

$$+\frac{\nu}{A_1R_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}+\frac{1}{A_2R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}-$$

$$-\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{A_1A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z\Bigr)\Bigr]\Bigr\}-$$

$$-\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\Bigl(\frac{A_2}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-$$

$$-\frac{A_2}{A_1^2}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-\frac{\nu}{A_2}\frac{\partial^2 W}{\phi^2}-\frac{A_2}{A_1R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial z}U_z+$$

$$+\frac{A_2}{A_1R_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}+\frac{\nu}{R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}-\frac{\nu}{A_1^2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}+$$

$$+\frac{\nu}{A_1R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z\Bigr)-$$

$$-\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{1}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigl(-\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial\phi}+\frac{A_1}{A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\phi}+$$

$$+\frac{A_1^2}{A_2R_1}\frac{\partial U_z}{\partial\phi}-\frac{A_1}{A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z+\frac{A_1}{R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial z}\Bigr)$$

$$+\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial A_2}{\partial z}\Bigl(\frac{\nu}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\nu}{A_1^2}\times$$

$$\times\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}-\frac{\nu}{A_1R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial z}U_z+\frac{\nu}{A_1R_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}+$$

$$+\frac{1}{A_2R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}-\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{A_1A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z\Bigr)+$$

$$+\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigl[\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigl(\frac{\nu}{A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}-$$

$$-\frac{A_1}{A_2^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\phi^2}-\frac{\nu}{A_1}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-\frac{\nu}{R_1^2}\frac{\partial R_1}{\partial z}U_z+$$

$$+\frac{A_1}{A_2R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}+\frac{\nu}{R_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}-$$

$$-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{A_2R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z\Bigr)\Bigr]+$$

$$+\frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\phi}\Bigl[\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial z}\Bigl(-\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial\phi}+$$

$$+\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial\phi}+\frac{A_2^2}{A_1R_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial z}+\frac{A_2}{R_1}\frac{\partial U_z}{\partial\phi}-$$

$$-\frac{A_2}{A_1R_1}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z\Bigr)\Bigr]- \qquad (17)$$

$$-\frac{Eh}{1-\nu^2}A_1A_2\Bigl\{\frac{1}{R_1}\Bigl[\frac{1}{A_1}\frac{\partial U_z}{\partial z}+\nu\frac{1}{A_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}+$$

$$+\frac{\nu}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z+W\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\nu}{R_2}\right)\Bigr]+$$

$$+\frac{1}{R_2}\left[\frac{\nu}{A_1}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial U_\phi}{\partial \phi}+\frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z}U_z+\right.$$

$$\left.\left.W\left(\frac{\nu}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]\right\}=-A_1 A_2\left(q_n+\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right).$$

Таким образом, уравнения поплавка значительно упростились по сравнению с уравнениями для оболочек произвольной формы.

Как частный случай, получаются уравнения круговой цилиндрической оболочки. Для этого достаточно принять следующие значения постоянных Ламе:

$$A_1=1;$$

$$A_2=R=\text{const}.$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований в данном направлении

Таким образом, сформулированы необходимые теоретические предпосылки построения расчетных моделей, например, поплавковых модификаций приборов инерциальной навигации.

Решение вопросов точности измерений, как показывает опыт полунатурных испытаний, следует рассматривать в предположении совместного действия акустического излучения и углового движения фюзеляжа. Из этого факта последуют частные случаи.

Перспективными можно считать автокомпенсационные методы повышения точности измерений.

Литература

1. Карачун В.В. Волновые задачи поплавкового гироскопа / В.В. Карачун, Я.Ф. Каюк, В.Н. Мельник. – К.: “Корнейчук”, 2007. – 228 с.

2. Melnik V.N., Karachun V.V. Some aspects of the gyroscopic stabilization in acoustic fields // Int. App. Mech. – 2002. – Vol. 38, № 1. – P. 74-80.

3. Koshljakov V.N., Karachyn V.V., Mel’nik V.N., Saverchenko V.G.,. Balanin V.Kh. The some aspects of flaigt saffety in conditions penetrate acoustic radiation // The World Congress “Aviation in the XXI-st Century”, 14-16 September 2003, Kyiv, Ukraine, National Aviation University. – Kyiv, Ukraine, 2003. – P. 2.37-2.40.

4. Mel’nick V.N., Karachun V.V. Determining Gyroscopic Integrator Errors to Diffraction of Sound Waves // Int. App. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 3. – P. 328-336.

Поступила в редакцию 23.01.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.М. Рыжков, Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев.