

УДК 621.313.1

В.Ф. СОРОКИН*ГП «Институт машин и систем», Харьков, Украина*

НАПРАВЛЕННЫЙ СИНТЕЗ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ФАСОННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Разработан метод создания развертывающихся поверхностей. Доказано, что линейчатая поверхность, построенная на базе двух линий, одна из которых получена путем масштабирования и параллельного переноса другой линии, является развертывающейся конической поверхностью. Представлено параметрическое уравнение конической поверхности, коэффициентами которого служат величина масштабирования и координаты вектора параллельного переноса. Выведено уравнение кусочно-конической поверхности, состоящей из произвольного числа звеньев, и разработан алгоритм её синтеза. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие и подтверждающие на конкретных примерах теоретические выводы.

кривая; поверхность: сложнофасонная, линейчатая, развертывающаяся, коническая, кусочно-коническая; развертка; уравнение кривой и поверхности

Введение

Одним из актуальных направлений развития машиностроения в настоящее время является разработка технологических процессов формообразования сложно-фасонных деталей. При этом важной характеристикой изготавливаемой поверхности является её развертываемость.

Так детали из листового материала с развертывающейся поверхностью имеют точную заготовку (развертку) и при формообразовании не требуют вытяжки материала.

В работах [1 – 3] показаны также преимущества формообразования развертывающихся поверхностей лопаток моноколес осевых и центробежных компрессоров при механической обработке на пятикоординатных станках с ЧПУ.

Однако конструктор детали часто там, где можно задать развертывающуюся поверхность, ограничивается заданием линейчатой, но неразвертывающейся поверхности. Это связано с отсутствием универсальной методологии построения фасонных развертывающихся поверхностей.

Целью данной статьи является разработка и экспериментальная проверка метода синтеза развертывающихся фасонных поверхностей.

Докажем, что линейчатая поверхность, построенная на базе двух линий, одна из которых получена путем масштабирования и параллельного переноса другой линии, является развертывающейся конической поверхностью.

1. Уравнение поверхности

Пусть заданы:

- коэффициент масштабирования $m \geq 0$;
- произвольная точка $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$;
- пространственная линия L_1 , векторно-параметрическое уравнение которой имеет вид:

$$\mathbf{r}_1(u) = x(u) \cdot i + y(u) \cdot j + z(u) \cdot k, \quad u \in [a, b]. \quad (1)$$

Тогда, уравнение линии L_2 , которая получена путем масштабирования линии L_1 и переноса в точку \mathbf{r}_0 , будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2(u) &= m \cdot \mathbf{r}_1(u) + \mathbf{r}_0 = \\ &= [m \cdot x(u) + x_0] \cdot i + [m \cdot y(u) + y_0] \cdot j + [m \cdot z(u) + z_0] \cdot k. \end{aligned} \quad (2)$$

Векторно-параметрическое уравнение прямой линии, проходящей через две точки можно записать в виде:

$$\mathbf{r}(v) = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot v,$$

где $-\infty \leq v \leq \infty$ – параметр;

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – радиус-векторы первой и второй точки.

Подставив в это уравнение функциональные зависимости (1) и (2) для расчета точек на линиях L_1 и L_2 , получим уравнение искомой линейчатой поверхности:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{r}(u) + [m \cdot \mathbf{r}(u) + \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}(u)] \cdot v = \\ &= \mathbf{r}(u) + [(m-1) \cdot \mathbf{r}(u) + \mathbf{r}_0] \cdot v \end{aligned} \quad (3)$$

или в явном параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x(u) + [(m-1) \cdot x(u) + x_0] \cdot v; \\ y(u, v) &= y(u) + [(m-1) \cdot y(u) + y_0] \cdot v; \\ z(u, v) &= z(u) + [(m-1) \cdot z(u) + z_0] \cdot v. \end{aligned} \quad (4)$$

При значениях параметра $v=0$ уравнение (4) описывает базовую линию L_1 ; при $v=1$ – линию L_2 ; при $v \in [0, 1]$ – поверхность между линиями L_1 и L_2 .

2. Доказательство развертываемости

Докажем развертываемость поверхности (3).

Как известно, условием развертываемости поверхности, является равенство нулю значения полной (Гауссовой) кривизны в любой точке поверхности, а именно:

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2} = 0, \quad (5)$$

где k_1, k_2 – главные кривизны; E, G, F – коэффициенты первой; а L, M, N – коэффициенты второй основных квадратичных форм поверхности.

Для выполнения условия (5) необходимо, чтобы равнялся нулю числитель, т.е. нам понадобятся только коэффициенты

$$L = \frac{[\mathbf{r}_{uu} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}; \quad N = \frac{[\mathbf{r}_{vv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}; \quad M = \frac{[\mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]}{\sqrt{E \cdot G - F^2}}, \quad (6)$$

где, например

$$[\mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x(u, v)}{\partial u \cdot \partial v} & \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y(u, v)}{\partial u \cdot \partial v} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z(u, v)}{\partial u \cdot \partial v} & \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом, условие (5) эквивалентно условию

$$[\mathbf{r}_{uu} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] \cdot [\mathbf{r}_{vv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] - [\mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]^2 = 0. \quad (8)$$

Продифференцировав (3), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} &= [1 + (m-1) \cdot v] \cdot \frac{d \mathbf{r}(u)}{du}; \\ \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} &= (m-1) \cdot \mathbf{r}(u) + \mathbf{r}_0; \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u, v)}{\partial u^2} &= [1 + (m-1) \cdot v] \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u)}{du^2}; \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u, v)}{\partial v^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u, v)}{\partial u \cdot \partial v} &= (m-1) \cdot \frac{d \mathbf{r}(u)}{du}. \end{aligned} \quad (9)$$

Равенство нулю вторых частных производных по v позволяет сделать вывод о том, что $[\mathbf{r}_{vv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = 0$.

Поэтому для доказательства условия (8) достаточно, чтобы был равен нулю определитель $[\mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]$. Подставив в (7) значения (9) и обозначив $m_1 = m - 1$, получим:

$$[\mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = \begin{vmatrix} m_1 \cdot \frac{dx(u)}{du}; & [1+m_1 \cdot v] \cdot \frac{dx(u)}{du}; & m_1 \cdot x(u) + x_0 \\ m_1 \cdot \frac{dy(u)}{du}; & [1+m_1 \cdot v] \cdot \frac{dy(u)}{du}; & m_1 \cdot y(u) + y_0 \\ m_1 \cdot \frac{dz(u)}{du}; & [1+m_1 \cdot v] \cdot \frac{dz(u)}{du}; & m_1 \cdot z(u) + z_0 \end{vmatrix}.$$

Вычислив определитель, получим $[\mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v] = 0$.

Таким образом доказано, что линейчатая поверхность (4) – развертывающаяся.

Докажем теперь, что поверхность (4) является не только развертывающейся, но и конической. Для этого рассмотрим две произвольные прямые из множества образующих линейчатой поверхности (4), проходящие через точки с параметрами u_1 и u_2 .

Уравнение первой прямой имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(v) &= \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot v = \\ &= \mathbf{r}(u_1) + [m \cdot \mathbf{r}(u_1) + \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}(u_1)] \cdot v. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение второй прямой:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(v) &= \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot v = \\ &= \mathbf{r}(u_2) + [m \cdot \mathbf{r}(u_2) + \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}(u_2)] \cdot v. \end{aligned} \quad (11)$$

Решая совместно эти уравнения, определяем, что

при значении параметра $v = \frac{1}{1-m}$ прямые (10) и

(11) имеют точку пересечения P с координатами

$$\mathbf{r}_P = \frac{\mathbf{r}_0}{1-m} \left(x_P = \frac{x_0}{1-m}; y_P = \frac{y_0}{1-m}; z_P = \frac{z_0}{1-m} \right). \quad (12)$$

Так как координаты точки пересечения двух произвольных прямых не зависят от параметра u , то можно сделать вывод, что при $m \neq 1$ точка P единственная для всех прямых, образующих линейчатую поверхность, а это означает, что уравнение (4) в общем случае описывает коническую поверхность. При этом точка P является вершиной конической поверхности.

В частных случаях:

при $m = 1$, точка пересечения отсутствует (знаменатель в зависимостях (12) обращается в нуль), а поверхность (4) становится цилиндрической;

при $m = 0$, линия L_2 вырождается в точку и вершиной конической поверхности становится точка T_0 .

3. Пример развращивающейся поверхности

Проведем численный эксперимент, иллюстрирующий на примере теоретические выкладки.

Построим произвольную пространственную кривую L_1 , образованную пересечением прямого кругового цилиндра, ось вращения которого наклонена на 10° к оси Y , и поверхности, полученной вытягиванием замкнутой плоской кривой линии L_0 вдоль оси Z (рис. 1).

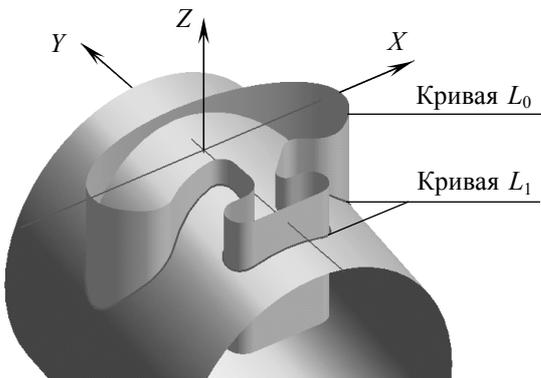


Рис. 1. Пример синтеза направляющей кривой L_1

Затем преобразуем эту кривую в кривую L_2 . Сначала построим в масштабе $1 : 2$ (коэффициент масштабирования $m = 0,5$), а затем перенесем в точку T_0

с координатами $X_0 = 15, Y_0 = -15, Z_0 = 50$ (рис. 2).

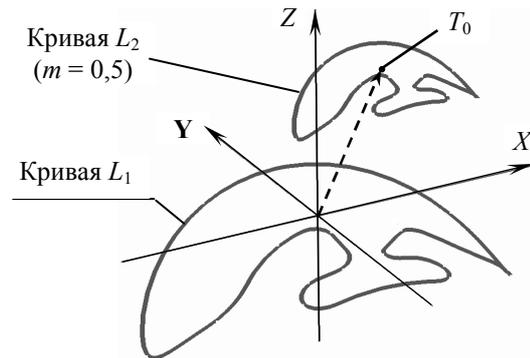


Рис. 2. Синтез вспомогательной кривой L_2

На базе кривых L_1 и L_2 построим линейчатую поверхность \mathfrak{R} (рис. 3.), которая согласно вышеизложенному должна быть развращивающейся конической поверхностью.

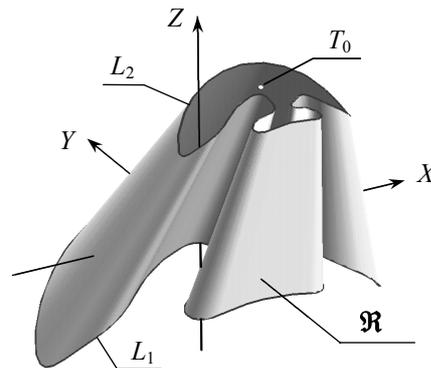


Рис. 3. Построение линейчатой поверхности

Приведенная на рис. 4 развращивка поверхности \mathfrak{R} , экспериментально доказывает утверждение о развращиваемости поверхности (3).

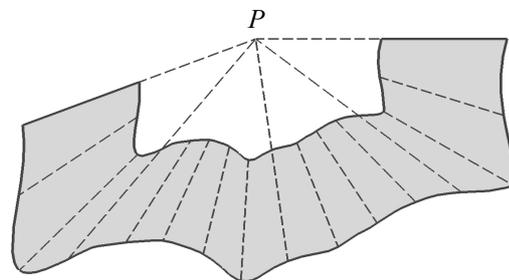


Рис. 4. Развращивка поверхности \mathfrak{R}

Рис. 5 иллюстрирует, что поверхность \mathfrak{R} – коническая, так как все её образующие прямые пересекаются в одной точке P . При этом координаты точки

$P (X_p = 30, Y_p = -30, Z_p = 100)$ соответствуют координатам, рассчитанным по формулам (12), что также является экспериментальным подтверждением теоретических результатов.

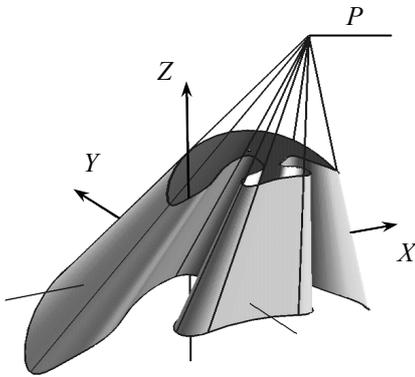


Рис. 5. Иллюстрация конической поверхности

4. Кусочно-коническая поверхность

Дальнейшие рассуждения связаны с предположением о возможности построения развертываемой поверхности, состоящей из нескольких конических или цилиндрических поверхностей, последовательно сопряженных друг с другом по образующей. Назовем такую поверхность *кусочно-конической*.

Для вывода уравнения этой поверхности разобьем исходную направляющую линию (1) произвольным образом на n участков

$$a = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n = b;$$

$$\ell_i \in L_1, \quad u \in [u_{i-1}, u_i], \quad i = 1 \dots n.$$

Каждому участку ℓ_i поставим в соответствие свой коэффициент масштабирования m_i и вектор параллельного переноса $\vec{\mathbf{r}}_i$.

Тогда с учетом (3), уравнение кусочно-конической поверхности можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(u) + v \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot [(m_i - 1) \cdot \mathbf{r}(u) + \mathbf{r}_i], \quad (13)$$

где δ_i – символ Кронекера,

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & (u_{i-1} \leq u < u_i) \vee u = u_n; \\ 0, & (u < u_i \vee u \geq u_{i+1}) \wedge u \neq u_n. \end{cases}$$

Очевидно, что независимый выбор векторов па-

раллельного переноса $\vec{\mathbf{r}}_i$, приведет к получению разорванной поверхности, состоящей из n отдельных ”лепестков”, ”склеенных” между собой в точках $\vec{\mathbf{r}}(u_i)$, принадлежащих направляющей кривой L_1 .

Для получения непрерывной кусочно-конической поверхности необходимо, чтобы на границах участков совпадали образующие прямые.

С учетом (2) и (3) это условие можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u_i) + [m_i \cdot \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}_i - \mathbf{r}(u_i)] \cdot v = \\ = \mathbf{r}(u_i) + [m_{i+1} \cdot \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}(u_i)] \cdot v. \end{aligned}$$

Из данного уравнения найдем формулы для расчета параметров векторов \mathbf{r}_i , если задан один произвольный вектор $\vec{\mathbf{r}}_j = \vec{\mathbf{r}}_0, \quad 1 \leq j \leq n$;

$$\mathbf{r}_i = \begin{cases} (m_{i+1} - m_i) \cdot \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}_{i+1}, & i = \overline{j-1, 1}; \\ (m_{i-1} - m_i) \cdot \mathbf{r}(u_i) + \mathbf{r}_{i-1}, & i = \overline{j+1, n}. \end{cases} \quad (14)$$

5. Пример кусочно-конической поверхности

Приведем пример синтеза кусочно-конической поверхности. Разобьем кривую L_1 на четыре участка, как показано на рис. 6. Координаты граничных точек $x(u_i), y(u_i), z(u_i) \quad i = 1, \dots, 4$, соответствующих значениям параметра u_i , и значения коэффициентов масштабирования m_i приведены в табл. 1.

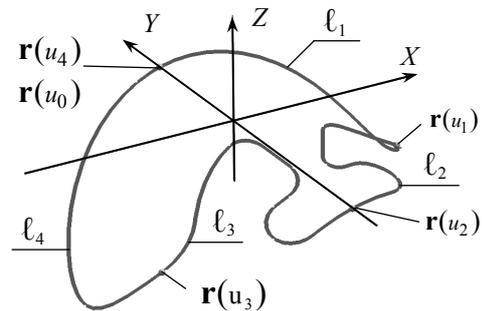


Рис. 6. Направляющая кривая кусочно-конической поверхности

Вектор параллельного переноса первого участка выбран как в первом примере: $\mathbf{r}_1 = (15, -15, 50)$.

Координаты остальных векторов переноса (см. табл. 1) рассчитаны по формулам (14).

Таблица 1
 Параметры кусочно-конической поверхности

i	m_i	$x(u_i)$	$y(u_i)$	$z(u_i)$	x_i	y_i	z_i
1	0,5	39,58	-15,28	-19,01	15	-15	50
2	0,25	0	-40	-6,55	24,9	-18,82	45,25
3	1	-39,58	-15,28	-19,01	24,9	11,18	50,16
4	0,5	0	25	4,91	5,11	3,54	40,66

На основании этих данных построим кусочно-коническую поверхность (рис. 7) и её развертку (рис. 8). Необходимо обратить внимание на то, что векторы переноса первого и последнего участка не равны между собой. Это означает, что кусочно-коническая поверхность, построенная на базе замкнутой направляющей кривой L_1 , будет разомкнутой

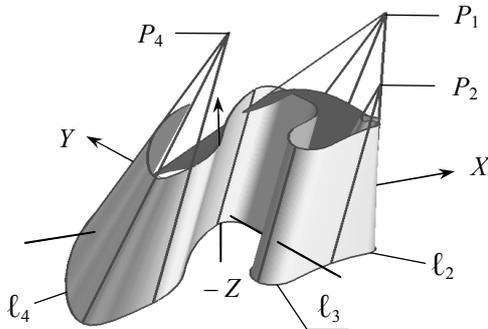


Рис. 7. Кусочно-коническая поверхность

Отсутствие в синтезируемой поверхности вершины P_3 означает, что третий участок – это цилиндрическая поверхность. Это соответствует теоретическим выводам, т. к. коэффициент масштабирования этого участка был задан равным единице ($m_3 = 1$).

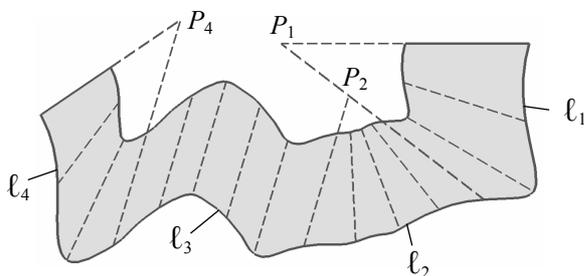


Рис. 8. Развертка кусочно-конической поверхности

Выводы

Разработан метод синтеза развертывающихся поверхностей, основанный на управлении геометрией

линейчатой поверхности при помощи операций масштабирования и параллельного переноса базовой кривой фасонной поверхности.

Использование других операций управления геометрией приводит к формированию неразвертывающейся поверхности.

Доказано, что данный метод можно использовать для синтеза кусочно-конических поверхностей, состоящих из произвольного числа различных звеньев.

Несмотря на то, что метод не выходит за пределы класса конических поверхностей, использование этого метода и множества варьируемых коэффициентов (n, m_i, r_0) предоставляет конструктору изделий машиностроения широкие возможности при синтезе развертывающихся поверхностей.

Литература

1. Сорокин В. Ф. Методология расчета управляющих программ фрезерования развертывающихся фасонных поверхностей на пятикоординатных станках с ЧПУ // Вісті Академії інженерних наук України. – 2006. – № 3(30). – С. 100-104.
2. Сорокин В.Ф., Леховицер В.А., Мозговой В.Ф. Битангенциальная обработка фасонных поверхностей на пятикоординатных станках с ЧПУ // Технологические системы. – 2001. – № 3 (9). – С. 30-36.
3. Сорокин В. Ф., Мозговой В. Ф. Повышение производительности и качества формообразования лопаточных моноколес при фрезеровании на станках с ЧПУ // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ «ХАИ». – 2004. – Вып. 21. – С. 27-34.
4. Никулин Е. А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2005. – 576 с.

Поступила в редакцию 28.05.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.И. Картунов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.