

УДК 621.438.001 2 (02)

**В.М. РАДЬКО, Н.Ф. МУСАТКИН, Д.С. КАЛАБУХОВ***Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С.П. Королёва, Российская Федерация***АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫСОТЫ ЛОПАТОК СОПЛОВЫХ  
ВЕНЦОВ ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНЫХ МАЛОРАЗМЕРНЫХ ТУРБИН**

Поставлена задача получения математической модели лопаток сопловых венцов, выражающейся в определении зависимости высоты лопаток от геометрических параметров плоской решётки профилей лопаток, а также от кинематических и режимных параметров течения газа, и обеспечивающей приемлемый уровень эффективности центростремительных малоразмерных турбин (ЦСМТ). Приведена методика аналитического определения высоты лопаток соплового аппарата (СА) на основании известных геометрических параметров плоской решётки, а также энергетических и режимных параметров на входе в ступень и на выходе из СА ЦСМТ соответственно, справедливая при степенях понижения давления  $\pi_m = 2 \dots 10$ , числах Маха  $M_{1s} = 0,8 \dots 1,4$  и Рейнольдса –  $Re = (5 \dots 10) \cdot 10^5$ . Описанная методика позволяет завершить процесс автоматизированного газодинамического проектирования лопаток СА ЦСМТ с учётом практической возможности уменьшения габаритов при сохранении достаточной эффективности турбины.

**турбина центростремительная малоразмерная турбина, аппарат сопловой, решётка, высота лопатки, срез косой, угол выхода потока, скорость приведенная, уравнение неразрывности, уравнение количества движения, расход газа, параметры изэнтропические, потери энергии**

**Введение**

В работе [3] определены геометрические параметры профиля лопатки соплового аппарата (СА) центростремительной малоразмерной турбины. Для завершения создания пространственной геометрической модели при автоматизированном процессе газодинамического проектирования ЦСМТ необходимо наличие его математической модели, выражаю-

щейся в зависимости высоты лопатки от геометрических параметров плоской решётки, а также от кинематических и режимных параметров течения газа. Обычно сопловые лопатки ЦСМТ выполняют постоянными по высоте в меридиональном сечении, поэтому в данной статье особое внимание уделяется геометрической модели лопаток именно такого типа (рис. 1, а).

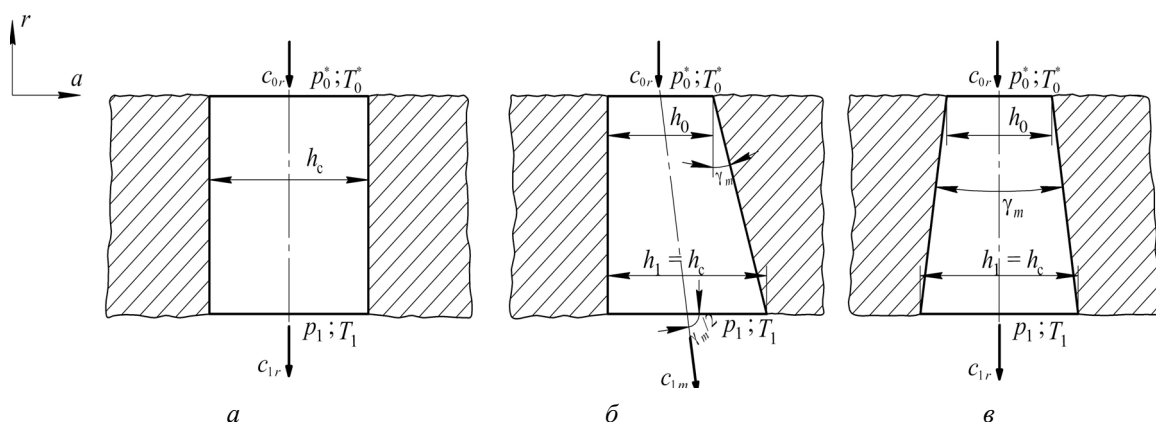


Рис. 1. Схема СА ЦСМТ в меридиональном сечении

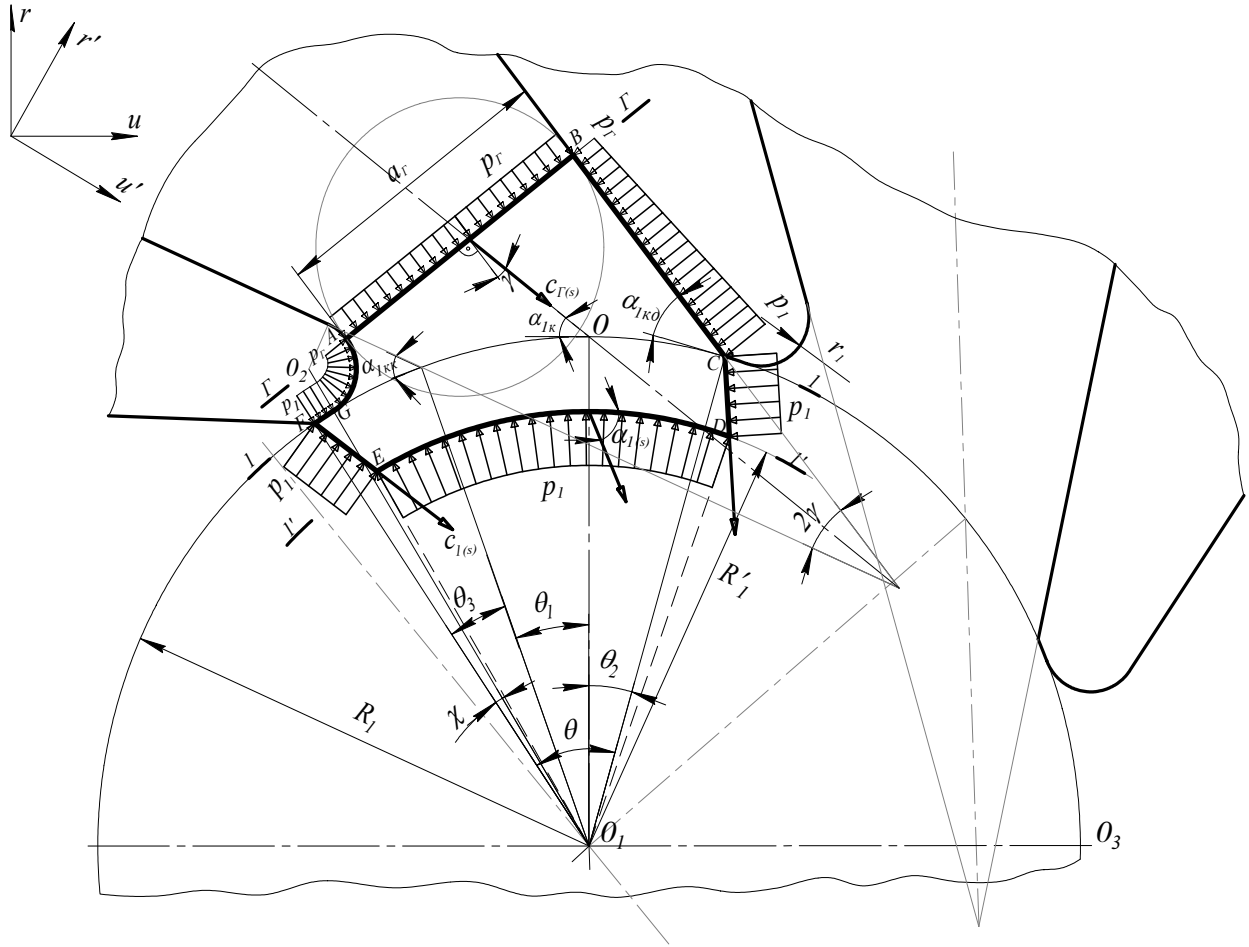


Рис. 2. К определению угла выхода потока из сужающейся сопловой решётки СА ЦСМТ с выходной кромкой конечной толщины при дозвуковом течении

### 1. Формулирование задачи

Как правило, для ЦСМТ бывают заданы основные параметры, определяющие рабочий процесс в

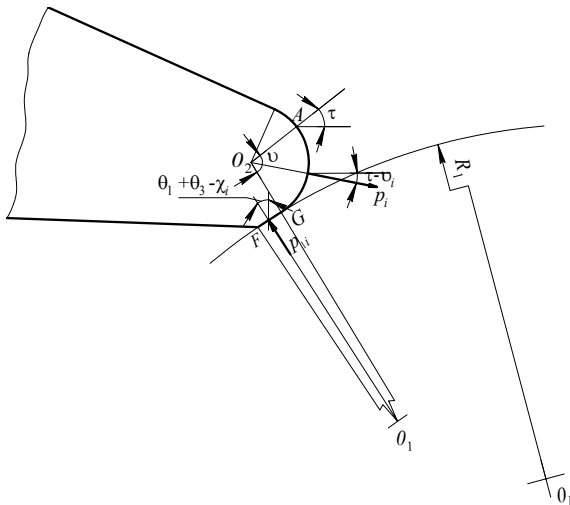


Рис. 3. К определению газовых сил, действующих на выходную кромку лопатки, в проекции на ось  $O_1O_3$

её ступени, такие как расход газа через турбину  $G_s$ , давление  $p_0^*$  и температура  $T_0^*$  рабочего тела перед ступенью, число Маха  $M_{1s}$ , степень парциальности  $\epsilon$ . Кроме того, из [1] известны геометрические параметры плоской решётки. Необходимо определить высоту лопатки  $h_c$ . Во всех рассматриваемых ниже случаях одним из неизвестных параметров является угол выхода потока из решётки  $\alpha_{1(s)}$  (индекс  $(s)$  означает, что параметр потока может быть как изоэнтропическим, так и реальным в зависимости от рассматриваемого типа течения), поэтому необходимо рассмотреть динамику потока в пределах косо́го среза и на выходе из решётки (рис. 2). В целом, метод определения угла выхода основывается на результатах работы [4], но является более универсальным и пригодным для автоматизированного проектирования.

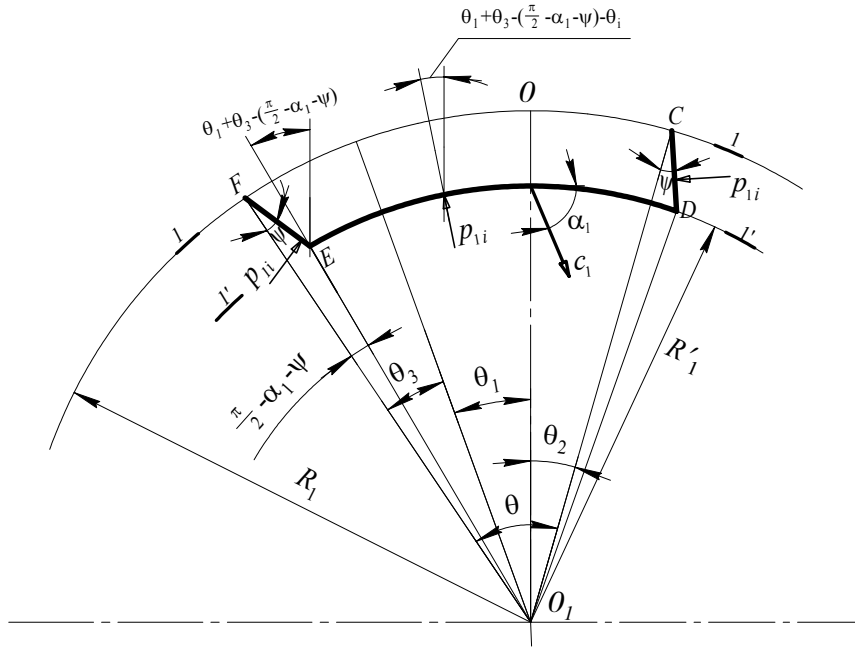


Рис. 4. К определению геометрии потока в межвенцовом зазоре

Итак, выделим в потоке газа контур  $ABCDEFG$ . Основные условия и допущения описаны в [4]. Добавим следующее: течение по условию задачи не является двухмерным, но его можно с большой степенью точности считать квазитрехмерным (слоистое течение). Согласно [1] можно приближенно считать, что вектор скорости  $c_{1s}$  направлен под углом  $\gamma$  к горлу решётки. Давление за кромками приближенно принято равным давлению  $p_1$  за решёткой, давление на стенку  $BC$  косога среза – среднеарифметическому давлению

$$\frac{p_1 + p_2}{2},$$

а давление на выпуклую часть кромки  $AG$  –

$$\frac{1}{v} \int_0^v \left( p_2 + \frac{p_1 - p_2}{v} v_i \right) d v_i = \frac{p_1 + p_2}{2} \text{ (рис. 3).}$$

Обычно в ЦСМТ типовой диапазон чисел Маха  $M_{1s} = 0,8 \dots 1,4$ , поэтому следует рассмотреть особенности решения поставленной задачи отдельно для случаев  $M_{1s} < 1$  и  $M_{1s} \geq 1$ .

## 2. Решение задачи

**2.1. Определение высоты лопатки для дозвукового истечения из решётки.** Рассмотрим изозн-

тропическое течение газа. Неизвестными параметрами являются приведенная скорость в горле канала  $\lambda_{2s}$  и угол  $\alpha_{1s}$ . Запишем два уравнения для контура  $ABCDEFG$ .

Уравнение неразрывности:

$$\rho_{2s} c_{2s} a_2 h_{C_s} \cos \gamma = \rho_{1s} c_{1s} R'_1 \theta h_{C_s} \sin \alpha_{1s}. \quad (1)$$

Уравнение количества движения в проекции на ось  $u$  ( $O_1 O_3$ ):

$$\begin{aligned} & \rho_{2s} c_{2s}^2 a_2 h_{C_s} \cos \alpha_{1K} + p_2 h_{C_s} a_2 \cos \gamma \cdot \cos \alpha_{1K} - \\ & - \frac{p_2 + p_1}{2} BC \cdot h_{C_s} \sin \gamma \cdot \cos \alpha_{1K} - \\ & - p_1 h_{C_s} CD \sin \psi \cdot \sin \theta_2 - \\ & - p_1 h_{C_s} EF \sin \psi \cdot \sin (\theta_1 + \theta_3) - \\ & - p_1 R_1 h_{C_s} \int_0^\chi \sin (\theta_1 + \theta_3 - \chi_i) d \chi_i + \\ & + \eta_1 h_{C_s} \int_0^v \left( p_2 + \frac{p_1 - p_2}{v} v_i \right) \cos (\tau - v_i) d v_i = \\ & = \left( p_1 + \rho_{1s} c_{1s}^2 \sin \alpha_{1s} \right) \times \\ & \times h_{C_s} R'_1 \int_0^\theta \sin \left[ \theta_1 + \theta_3 - \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{1s} - \psi \right) - \theta_i \right] d \theta_i. \end{aligned} \quad (2)$$

С помощью рис. 3 и 4 определяем неизвестные геометрические и кинематические параметры:

$$BC = \sqrt{4 \left( r_1^2 \sin^2 \frac{\nu}{2} + R_1^2 \sin^2 \frac{\theta - \chi}{2} \right) - \left( 8 r_1 R_1 \sin \frac{\nu}{2} \cdot \sin \frac{\theta - \chi}{2} \cdot \cos \frac{\pi - \alpha_{1\kappa\theta}}{2} - a_2^2 \right)}$$

$$CD = EF = \sqrt{R_1^2 + R_1'^2 - 2R_1R_1' \sin(\alpha_{1s} + \psi)}$$

$$\psi = \arcsin \left( \frac{R'}{R_1} \cos \alpha_{1s} \right);$$

$$\int_0^\chi \sin(\theta_1 + \theta_3 - \chi_i) d\chi_i = \cos(\chi - \theta_1 - \theta_3) - \cos(\theta_1 + \theta_3);$$

$$\int_0^\nu \left( p_2 + \frac{p_1 - p_2}{\nu} \nu_i \right) \cos(\tau - \nu_i) d\nu_i = \frac{p_2 [\nu \sin \tau + \cos \tau - \cos(\tau - \nu)] - p_1 [\nu \sin(\tau - \nu) + \cos \tau - \cos(\tau - \nu)]}{\nu}$$

$$\nu = \pi - \alpha_{1\theta} - \Theta + \chi; \tau = \alpha_{1\theta} - \Theta_i;$$

$$\int_0^\theta \sin \left[ \theta_1 + \theta_3 - \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{1s} - \psi \right) - \theta_i \right] d\theta_i = [\cos \theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_3)] \cdot (\sin \alpha_{1s} \cos \psi + \sin \psi \cos \alpha_{1s}) - [\sin \theta_2 + \sin(\theta_1 + \theta_3)] \cdot (\cos \alpha_{1s} \cos \psi - \sin \alpha_{1s} \sin \psi).$$

Разделив обе части уравнения (1) на  $\rho_{кр} c_{кр}$ , получаем:

$$q(\lambda_{2s}) a_2 h_{Cs} \cos \gamma = q(\lambda_{1s}) R_1' \theta h_{Cs} \sin \alpha_{1s}. \quad (1, a)$$

Выполняя деление обеих частей уравнения (2) на комплекс

$$\frac{p_{кр}}{p_{кр}} \cdot \rho_{кр} c_{кр}^2 \cdot h_{Cs}$$

и учитывая, что

$$\frac{p_{кр}}{\rho_{кр} c_{кр}^2} = \frac{1}{k},$$

перепишем выражение (2) в следующем виде:

$$q(\lambda_{2s}) \lambda_{2s} a_2 \cos \alpha_{1\kappa} + e(\lambda_{2s}) \cdot A - e(\lambda_{1s}) \cdot [B + CD \cdot \sin \psi (\sin \theta_2 + \sin(\theta_1 + \theta_3))] = (2, a) = \left( \frac{e(\lambda_{1s})}{k} + q(\lambda_{1s}) \lambda_{1s} \sin \alpha_{1s} \right) \cdot C.$$

Здесь  $A$  и  $B$  – комплексы, включающие только геометрические параметры решётки и показатель адиабаты  $k$ :

$$A = \frac{1}{k} \left\{ a_2 \cos \gamma \cdot \cos \alpha_{1\kappa} - \frac{BC \sin \gamma \cdot \cos \alpha_{1\kappa}}{2} + \frac{r_1 [\nu \sin \tau + \cos \tau - \cos(\tau - \nu)]}{\nu} \right\};$$

$$B = \frac{1}{k} \left\{ \frac{BC \sin \gamma \cdot \cos \alpha_{1\kappa}}{2} + R_1 [\cos(\chi - \theta_1 - \theta_3) - \cos(\theta_1 + \theta_3)] + \frac{r_1 [\nu \sin(\tau - \nu) + \cos \tau - \cos(\tau - \nu)]}{\nu} \right\}.$$

Комплекс  $C$  содержит также и неизвестные кинематические углы:

$$C = R_1' \left\{ [\cos \theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_3)] \times (\sin \alpha_{1s} \cos \psi + \cos \alpha_{1s} \sin \psi) - [\sin \theta_2 + \sin(\theta_1 + \theta_3)] \cdot (\cos \alpha_{1s} \cos \psi - \sin \alpha_{1s} \sin \psi) \right\}.$$

Газодинамическая функция

$$e(\lambda_{is}) = \frac{p_i}{p_{кр}} = \left( \frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \lambda_{is}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Значения  $q(\lambda_{1s})$  и  $\lambda_{is}$  ( $M_{is}$ ) можно найти, например, по [2].

Уравнения (1, a) и (2, a) следует объединить в систему, содержащую две неизвестные:  $\lambda_{2s}$  и угол  $\alpha_{1s}$ , а также известные геометрические параметры решётки СА, радиус на входе в РК  $R_1'$  и режимный параметр  $\lambda_{1s}$ . Эту систему можно решить итерационным методом. Её решением может быть множество сочетаний корней  $\alpha_{1s}$  и  $\lambda_{1s}$  в области комплексных чисел, но физический смысл имеют лишь натуральные корни, причем  $\lambda_{2s} > \lambda_{1s}$ .

Обычно в МТ  $\frac{R_1}{R_1'} \leq 1,01$  [4], поэтому при допущении

нии  $\frac{R_1}{R_1'} = 1$  систему уравнений (1, a) – (2, a) можно

без большой погрешности значительно упростить:

$$\begin{cases} q(\lambda_{2s}) a_2 \cos \gamma = q(\lambda_{1s}) R_1 \theta \sin \alpha_{1s}; \\ q(\lambda_{2s}) \lambda_{2s} a_2 \cos \alpha_{1\kappa} + e(\lambda_{2s}) A - e(\lambda_{1s}) B = \\ = \left( \frac{e(\lambda_{1s})}{k} + q(\lambda_{1s}) \lambda_{1s} \sin \alpha_{1s} \right) \times \\ \times R_1 [\cos \theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_3)]. \end{cases} \quad (3)$$

Потребную высоту лопатки при движении газа без потерь следует определять по формуле:

$$h_{Cs} = \frac{G_{s\text{ кан}} \sqrt{T_0^*}}{m p_0^* R_1 \theta \varepsilon q(\lambda_{1s}) \sin \alpha_{1s}}, \quad (4)$$

где  $G_{s\text{ кан}} = \frac{\theta \cdot G_s}{2\pi}$  – расход газа, проходящего через один межлопаточный канал.

В результате потерь энергии в СА реальная пропускная способность решётки меньше изоэнтروпической ( $G = \mu G_s$ ). Это свидетельствует о том, что эффективная площадь поперечного сечения канала, образованного двумя соседними лопатками, меньше площади поперечного сечения канала, выполненного по параметрам изоэнтропического потока.

В самом деле, с помощью уравнения баланса расхода газа при неизменных геометрических параметрах канала можно получить следующее соотношение:

$$h_{Cs} \sin \alpha_{1s} = h_C \sin \alpha_1. \quad (5)$$

Как известно [4], угол отклонения потока в косом срезе зависит от величины суммарных потерь в решётке, и с увеличением этих потерь он уменьшается. Если выполнять лопатки СА с высотой  $h_C = h_{Cs}$  уравнение (5) становится несправедливым вследствие нарушения баланса расхода рабочего тела. Это физически свидетельствует об уменьшении эффективной величины высоты лопаток. Чтобы компенсировать снижение пропускной способности, необходимо увеличить высоту лопатки, спроектировав её по параметрам реального потока с высотой  $h_C$ . Для осуществления этого надо знать величину угла  $\alpha_1$ , определяемую из систем уравнений (1, а) – (2, а) или (3) и способствующую нахождению значений величин приведенных скоростей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Приведенная скорость  $\lambda_2$  определяется по выражению:

$$\lambda_2 = \varphi_{0-2} \cdot \lambda_{2s}, \quad (6)$$

где  $\varphi_{0-2} = \sqrt{1 - \xi_{0-2}^2}$  – коэффициент скорости на участке от входа в решётку до горла канала;

$\xi_{0-2}$  – коэффициент потерь (для его отыскания должны быть известны величины входных кромочных, профильных, веерных потерь, приблизительно должны быть оценены концевые и вторичные потери).

Уравнение неразрывности запишем в следующем виде:

$$q(\lambda_2) a_2 \cos \gamma = \sigma_{2-1} q(\lambda_1) R_1' \theta \sin \alpha_1, \quad (1, б)$$

$$\text{где } \sigma_{2-1} = \frac{\sigma}{\sigma_{0-2}} = \left( \frac{\varphi_{0-1} \cdot \frac{1 - \frac{k+1}{k-1} \lambda_{1s}^2}{\mu_{0-1}}}{1 - \frac{k+1}{k-1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{2s}^2 \varphi_{0-2}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \cdot \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{1s}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - \text{коэффициент}$$

восстановления полного давления на участке 2–1.

Коэффициент скорости сопла  $\varphi_{0-2}$  определяется после расчёта пограничного слоя в канале [4].

Заменяя в уравнении (2, а) изоэнтропические параметры потока реальными за исключением ГДФ  $\varepsilon(\lambda_{is})$  (кроме того, желательно включить в (2, а) оценочную величину силы трения о длинную стенку косоуго среза) при формировании новой системы уравнений, определяем величины  $\lambda_1$  и  $\alpha_1$ , позволяющие вычислить истинную высоту лопаток СА:

$$h_C = \frac{\varphi \cdot G_{s\text{ кан}} \sqrt{T_0^*}}{\frac{1}{\sigma^k} \varepsilon m p_0^* R_1 \theta \cdot q(\lambda_1) \sin \alpha_1}, \quad (7)$$

$$\text{где } \varphi = \frac{\lambda_1}{\lambda_{1s}}, \quad \sigma = \left( \frac{1 - \frac{k+1}{k-1} \lambda_{1s}^2}{1 - \frac{k+1}{k-1} \lambda_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

**Определение лопатки для сверхзвукового истечения из решётки.** При сверхзвуком течении газа за сопловой решёткой в горле межлопаточного канала поток имеет звуковую скорость. Поскольку в этом случае  $\lambda_{2s} = q(\lambda_{2s}) = 1$ , из уравнения (2, а) определим  $\alpha_{1s}$ , а из выражения (4) – высоту лопатки для

изэнтропического потока.

При реальном течении газа неизбежны потери в канале, вследствие чего при заданном изэнтропическом расходе газа скорость в горле будет немного меньше звуковой. В этом случае и скорость за решёткой будет также дозвуковой, поскольку течение в косом срезе в таком случае диффузорное. Для избежания указанного необходимо увеличивать расход газа в  $1/\mu_{0-2}$  раз, что приведёт к установлению в горле канала звуковой скорости, т.е.  $\lambda_2 = 1$ .

Запишем систему уравнений, преобразованной из системы (3) для реального сверхзвукового потока:

$$\begin{cases} a_2 \cos \gamma = \sigma_{2-1} q(\lambda_1) R_1 \theta \sin \alpha_1 ; \\ a_2 \cos \alpha_{1k} + A - e(\lambda_{1s}) B = \\ = \left( \frac{e(\lambda_{1s})}{k} + q(\lambda_1) \lambda_1 \sin \alpha_1 \right) \times \\ \times R_1 [\cos \theta_2 - \cos(\theta_1 + \theta_3)] . \end{cases} \quad (3, a)$$

Считаем, что  $\sigma_{2-1} = \sigma$ , поскольку потери в дозвуковой части канала уже учтены. Из (3a) определяем  $\lambda_1$ ,  $\alpha_1$  и по выражению (5) находим  $h_C$ .

### Заключение

В настоящей статье описан метод определения постоянной в меридиональном сечении высоты лопаток СА ЦСМТ (рис. 1, а). На практике при том же заданном расходе  $G_s$  не исключена необходимость уменьшения габаритов подводящего устройства, что повлечёт за собой уменьшение высоты лопаток на входе в СА.

Считая известной высоту лопаток на входе в СА, меридиональный профиль последних можно проектировать по законам

$$h_i = h_0 + (R_0 - R_i) \operatorname{tg} \gamma_m \quad (\text{рис. 1, б})$$

или

$$h_i = h_0 + 2(R_0 - R_i) \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2} \quad (\text{рис. 1, в}).$$

При этом:

$$\gamma_m = \operatorname{arctg} \left( \frac{h_1 - h_0}{R_0 - R_1} \right);$$

$$\text{а } h_1 = h_C.$$

Тем не менее, из-за изменения площадей поперечного сечения канала на участке косога среза по сравнению со случаем  $h_1 = h_C = \text{const}$ , а также появления осевой составляющей скорости  $c_{i_a} \approx c_{i_m} \sin \frac{\gamma_m}{2}$  (рис. 1, б), возможно соответствующее изменение угла выхода потока и, что самое важное, режимного параметра  $M_{1s}$ . Для сохранения заданного значения  $M_{1s}$  в дальнейшем представляет интерес рассмотрение трехмерной модели течения в решётке СА и определение требуемого значения высоты  $h_1$  при заданной высоте  $h_0$ .

### Литература

1. Аронов Б.М., Жуковский М.И., Журавлёв В.А. Профилирование лопаток авиационных газовых турбин. – М.: Машиностроение, 1978. – 168 с.
2. Белоусов А.Н., Мусаткин Н.Ф., Радько В.М. Теория и расчёт авиационных лопаточных машин: Учебн. для вузов. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2003. – 335 с.
3. Мусаткин Н.Ф., Радько В.М., Балахонов А.Д. Определение геометрических параметров соплового аппарата центростремительной микротурбины, состоящего из прямолинейных лопаток // Вестник СГАУ. – Самара. – 2003. – № 1. – С. 106-110.
4. Наталевич А.С. Воздушные микротурбины. – М.: Машиностроение, 1983. – 192 с.

Поступила в редакцию 23.05.2008

**Рецензент:** д-р техн. наук А.А. Маркин, ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», Самара.