УДК 621.63: 621.51

В.В. ГОЦУЛЕНКО[1], В.В. ПИЦЫК[2]

[1] ***Институт предпринимательства “Стратегия”, Желтые воды, Украина***
[2]***Днепродзержинский государственный технический университет, Украина***

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АТТРАКТОРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУХСТУПЕНЧАТЫМ ЛОПАСТНЫМ НАГНЕТАТЕЛЕМ

Определены аттракторы и установлены закономерности их изменения при варьировании акустических параметров нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающей нестационарные движения (помпаж) в пневмосистеме, включающей двухступенчатый лопастной нагнетатель с управляемыми объемами, расположенными на выходе из каждой ступени лопастного нагнетателя. Это позволило теоретическим путем, с помощью характеристических ляпуновских показателей аттрактора, установить наличие режима стохастических автоколебаний (соответствующих странному аттрактору), который ранее наблюдался на практике.

Ключевые слова: *помпаж, аттрактор, характеристический показатель Ляпунова, автоколебания, акустические параметры, неустойчивость.*

Введение

Теория автоколебаний (помпажа) компрессора, разработанная В.А. Боднером и В.В. Казакевичем, изложена в монографии [1], в которой, в частности, представлены периодические решения системы уравнений движения одноступенчатого компрессора. В работе [2] установлено сужение области устойчивой работы компрессора при наличии упругости между его ступенями. Линейная устойчивость двухступенчатых и многоступенчатых компрессоров были рассмотрены в [2], а периодические решения нелинейных уравнений теории помпажа двухступенчатого компрессора определены в [3].

Изучение динамики во времени любых физических систем, математические модели которых описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (или их системами) с частными производными, зачастую дает лишь самые общие представления об ее динамике. Многие свойства распределенной системы являются грубыми, так что они остаются справедливыми и после ее усреднения по пространственным переменным. Ярким примером последнего является анализ Лоренца [4 – 6] задачи о изучении тепловой конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости, где полная система уравнений Навье – Стокса, используя метод конечных элементов, была усреднена к системе трех автономных обыкновенных уравнений. Детальный анализ полученной им системы привел к фундаментальному открытию – понятию странного аттрактора и связанному с ним режима стохастических автоколебаний. Универсальным средством для изучения временной динамики физических систем с сосредоточенными параметрами является их представление в виде динамической системы с конечномерным фазовым пространством. Абстрагируясь от конкретной физической природы изучаемого объекта, о нем говорят как о динамической системе, если можно указать такой набор величин, называемых динамическими переменными и характеризующих состояние системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу. Это правило задает оператор эволюции системы. Изменению состояния во времени (т.е. динамика системы) отвечает движение изображающей точки по определенной кривой – фазовой траектории. Если состояние системы задается набором N величин, динамику можно представить как движение точки по траектории в N-мерном фазовом пространстве.

Для диссипативных систем характерно то, что режим динамики, возникающий в системе, предоставленной себе в течение длительного времени, становится не зависящим от начального состояния (по крайней мере, при вариации начальных условий в некоторых конечных пределах). Множество точек в фазовом пространстве диссипативной системы, посещаемых в установившемся режиме, называется аттрактором.

До недавнего времени считалось, что единственными аттракторами в любой диссипативной динамической системе могут быть лишь неподвижные точки (положения равновесия), предельные циклы (периодические автоколебания) и многомерные торы (квазипериодические автоколебания). Однако, по-видимому, впервые после уже цитируемой выше работы Лоренца стало понятным, что даже в простейших динамических системах [4 – 7], размерность фазового пространства которых не менее чем три, фазовые траектории могут иметь очень сложную нерегулярную форму (странные аттракторы).

Постановка задачи

В данной работе изучается динамическая система, являющаяся математической моделью движений в системе (рис. 1) с двухступенчатым компрессором.

В частности, теоретически показана возможность существования в такой системе режима стохастических автоколебаний, которые неоднократно [1] наблюдались экспериментально.

Схему двухступенчатой компрессорной машины, рассматриваемую в работах [1 – 2], дополним управляемыми объемами, расположенными на выходе каждой ступени нагнетателя (рис. 1).

В уравнениях динамики пневмосистемы, включающей двухступенчатый компрессор, напорные характеристики (рис. 2)

$$F_i(M) = \left[\pi_i(M) - 1\right] P_o \quad \left(i = \overline{1,2}\right)$$

отдельных ступеней удобно представлять [2] как функции массового расхода M. Представив характеристику приключенной магистрали общей зависимостью

$$P_Д = h_c\left(M_Д\right),$$

систему уравнений движения запишем в виде [2]:

$$\begin{cases} L_{a1}\dfrac{dM_1}{dt} = F_1(M_1) - P_{a2}; \\ C_{a1}\dfrac{dP_{a2}}{dt} = M_1 - M_2; \\ L_{a2}\dfrac{dM_2}{dt} = F_2(M_2) - P_Д + P_{a2}; \\ C_{a2}\dfrac{dP_Д}{dt} = M_2 - M_Д; \\ P_Д = k_Д \cdot M_Д^2, \end{cases} \qquad (1)$$

где $L_{a1} = \dfrac{\ell_2}{S_2} + \dfrac{\pi_1 \ell_1}{S_1}$, π_1 – степень повышения давления в первой ступени компрессора; $C_{a1} = \dfrac{S_2 \ell_2}{c_1^2}$, $L_{a2} = \dfrac{\ell_3}{S_3}$; $C_{a2} = \dfrac{S_3 \ell_3}{c_2^2}$; $c_1 \cong c_2$ – скорость распространения звука в потоках на входе соответствующих ступеней; π_2 – степень повышения давления во второй ступени компрессора [2]; M_i – соответствующие массовые расходы; P_{a2} – давление в напорной емкости перед входом во вторую ступень; $P_Д$ – давление перед дросселем на входе в приключенную магистраль.

Рассматривая стационарное решение системы (1), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = 0, \\ \dfrac{dP_{a2}}{dt} = 0, \\ \dfrac{dM_2}{dt} = 0, \\ \dfrac{dP_Д}{dt} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 = M_2 = M_Д = \xi, \\ P_{a2} = F_1(\xi) \\ k_Д = \dfrac{F_1(\xi) + F_2(\xi)}{\xi^2}, \\ P_Д = k_Д \cdot \xi^2, \end{cases}$$

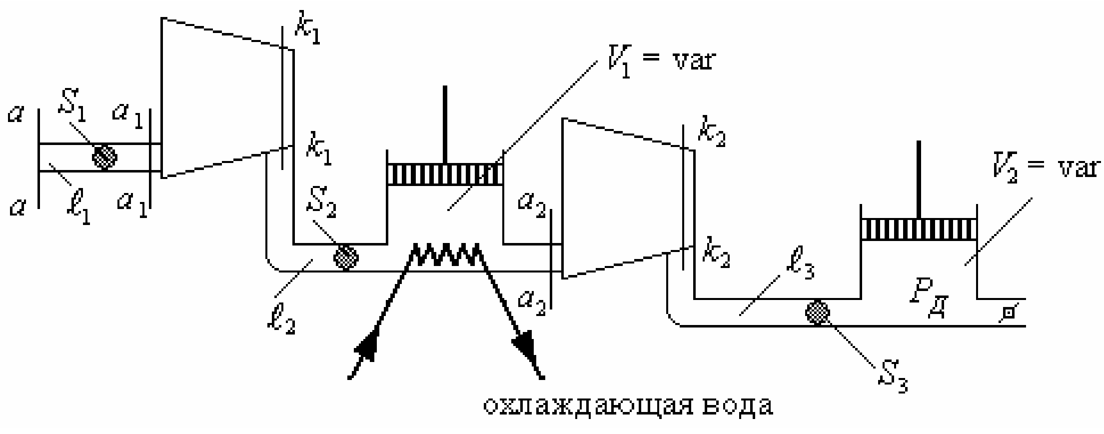

Рис. 1. Схема двухступенчатого компрессора с дополнительными управлениями объемами на выходе каждой ступени

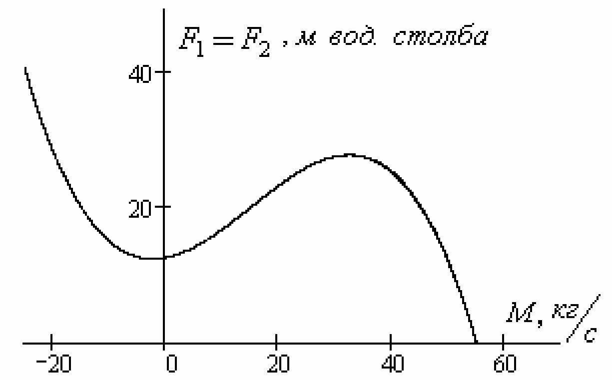

Рис. 2. Напорные характеристики ступеней компрессора

или делая замену: $x = \frac{M_1}{\xi}$, $y = \frac{P_{a2}}{F_1(\xi)}$, $X = \frac{M_2}{\xi}$, $Y = \frac{P_Д}{F_1(\xi)+F_2(\xi)}$, $t = \frac{\tau}{\tau_o}$, приведем систему (1) к безразмерному виду:

$$\begin{cases} \alpha \frac{dx}{d\tau} = \tilde{F}_1(x) - y; \\ \beta \frac{dy}{d\tau} = x - X; \\ \gamma \frac{dX}{d\tau} = \tilde{F}_2(X) - (1+\chi)Y + y; \\ \delta \frac{dY}{d\tau} = X - \sqrt{Y}, \end{cases} \qquad (2)$$

где обозначено: $\alpha = \frac{\tau_o \xi}{F_1(\xi)} L_{a1}$; $\beta = \frac{\tau_o F_1(\xi)}{\xi} C_{a1}$;

$$\gamma = \frac{\tau_o \xi}{F_1(\xi)} L_{a2}; \ \delta = \frac{\tau_o (F_1(\xi) + F_2(\xi))}{\xi} C_{a2};$$

$$\tilde{F}_1(x) = \frac{F_1(\xi x)}{F_1(\xi)}; \quad \tilde{F}_2(X) = \frac{F_2(\xi X)}{F_1(\xi)}; \quad \chi = \frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)}.$$

Далее всюду значение стационарного расхода $\xi = 20\,кг/с$ и $\tau_o = 1с$.

Результаты работы

Определение структуры аттрактора в терминах характеристических показателей Ляпунова

Рассмотрим данный подход в общем случае для произвольной гладкой системы с N степенями свободы:

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \qquad (3)$$

где $X = (x_1,\ x_2,\ \dots\ x_N)$, $F: R^N \to R^N$ – гладкое отображение. Пусть далее $X(t)$ – некоторая фазовая траектория системы (3), а $Y(t)$ – ее траектория с немного измененным начальным условием. Тогда разность $Z(t) = Y(t) - X(t)$ естественно считать малой величиной, по крайней мере, на небольшом интервале изменения времени, и поэтому, подставляя ее в (3), и воспользовавшись разложением Тейлора, получим:

$$\frac{dZ}{dt} = J[X(t)] \cdot Z + O\left(\|Z(t)\|^2\right), \qquad (4)$$

где $J[X(t)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$ – матрица Якоби отображения F, вычисленная на траектории $X(t)$ системы (3).

Далее, пренебрегая в выражении (4) величиной $O\left(\|Z(t)\|^2\right)$, обозначим через $\tilde{Z}(t)$ ее решение с начальным условием $\tilde{Z}(0) = Y(0) - X(0)$. Тогда, как известно, данным решением определяется характеристический ляпуновский показатель по формуле [4]:

$$\Lambda_{\tilde{Z}(t)} = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \left\|\tilde{Z}(T)\right\|, \qquad (5)$$

где $\left\|\tilde{Z}(T)\right\|$ означает обычную норму в R^N вектора $\tilde{Z}(T)$.

Имеется N (по размерности фазового пространства) линейно независимых решений векторного уравнения (4) $Z_i(t)$ (фундаментальная система решений), которым отвечает N ляпуновских показателей (Спектр ляпуновских показателей), нумеруемых в порядке убывания: $\Lambda_1 \ge \Lambda_2 \ge \ldots \ge \Lambda_N$. Наибольшее из этих чисел, Λ_1, называют [4] старшим ляпуновским показателем.

Таким образом, для каждой траектории $X(t)$ системы (3), уравнение в вариациях (4) даст определенный спектр ляпуновских показателей. Присутствие в этом спектре показателя Λ означает, что существует такое возмущение исходной траектории, которое эволюционирует во времени, грубо говоря, как $\exp(\Lambda t)$ (пока амплитуда мала и оправдано использование линейного приближения). Следовательно, наличие в спектре хотя бы одного положительного ляпуновского показателя означает неустойчивость рассматриваемой фазовой траектории, которое и постулируется как наличие хаоса в динамической системе.

Рассматривая динамику диссипативной системы в установившемся режиме, т.е. динамику на аттракторе, если аттрактор представляет собой состояние равновесия или предельный цикл, то он состоит из одной траектории, и соответствующий спектр ляпуновских показателей естественным образом выступает как атрибут этого аттрактора. Однако аттрактор может иметь более сложную природу и включать множество траекторий, как, например, тор или странный аттрактор. В этом случае возникает вопрос, можно ли говорить о ляпуновских показателях аттрактора, поскольку разные траектории на нем могут иметь разные ляпуновские показатели. Один из подходов состоит в выборе произвольной траектории на аттракторе и ее спектр ляпуновских показателей постулируется как спектр аттрактора в целом. Математическую основу для этого утверждения дает так эргодическая теорема В.И. Оселедеца [4].

Численное построение аттрактора

Для определения фазовых траекторий (в частности, ее аттракторов) системы (2) воспользуемся следующим вариантом метода Эйлера с переменным шагом:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n \cdot f_n, y_{n+1} = y_n + \varepsilon_n \cdot g_n, \\ X_{n+1} = X_n + \varepsilon_n \cdot F_n, Y_{n+1} = Y_n + \varepsilon_n \cdot G_n \\ \varepsilon_n = \varepsilon \Big/ \sqrt{f_n^2 + g_n^2 + F_n^2 + G_n^2}, (n = 0,1,2,...) \\ f_n = F_1(x_n) - y_n, g_n = x_n - X_n, G_n = X_n - \sqrt{Y_n}, \\ F_n = F_2(X_n) - (1+\chi) \cdot Y_n + y_n. \end{cases} \tag{6}$$

Задавшись начальной фазовой точкой (x_0, y_0, X_0, Y_0) рекуррентно по формулам (6) строится ломаная Эйлера, каждое звено которой имеет длину ε. Обоснование сходимости и устойчивости численного метода (6) в более общем случае (с наличием запаздывающего аргумента) приведено в [8]. Фазовое пространство $\{x, y, X, Y\}$ рассматриваемой системы четырехмерно, поэтому для анализа ее аттрактора будем рассматривать его сечения, например, на трехмерное подпространство $\{Y = 0\}$ (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что в рассматриваемой системе возможны три вида аттракторов: предельный цикл (а-б-д-е), тор (в), странный аттрактор (г).

Заключение

Для динамической системы, являющейся математической моделью движений в двухступенчатой компрессорной машине с управляемыми объемами, расположенными на выходе каждой ее ступени (рис. 1), определены аттракторы и исследован их характер при варьировании акустических параметров нагнетателя.

Полученные аттракторы свидетельствуют о существенном отличии помпажа двухступенчатого нагнетателя в сравнении с одноступенчатым. В частности, наличия режима стохастических автоколебаний, которому соответствует странный аттрактор, присущий лишь динамическим системам с фазовым пространством размерности более чем два, что невозможно для одноступенчатого компрессора.

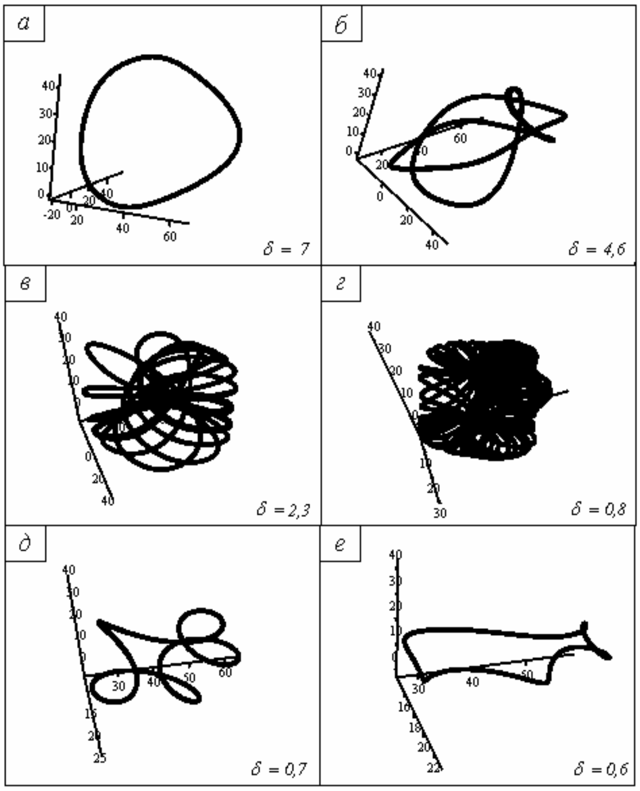

Рис. 3. Сечение аттрактора при $\alpha = 2$, $\beta = 7$, $\gamma = 2$, $\chi = 1$ и варьировании параметра δ

Литература

1. *Казакевич В.В. Автоколебания (помпаж) в компрессорах / В.В. Казакевич. − М.: Машиностроение, 1974. − 264 с.*

2. *Ронжин О.В. К теории помпажа в двухступенчатом компрессоре / О.В. Ронжин // Труды ЛК ВВИА им. Можайского. – 1958. – Вып. 204. – С. 25-52.*

3. *К проблеме нейтрализации помпажа двухступенчатого лопатного нагнетателя / В.В. Гоцуленко, В.Н. Гоцуленко, О.В. Дубина и др. // Системные технологии. – 2007. – № 3’(50). – С. 109-120.*

4. *Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. − М.: Физматлит, 2001. − 295 с.*

5. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики / Р. Рихтмайер. – Т. 2. –М.: Мир, 1984. − 375 с.

6. Заславский Г.М. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса / Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев. − М.: Наука, 1988. − 368 с.

7. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М.: Мир, 1988. – 306 с.

8. Гоцуленко В.В. Об одном численном методе интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / В.В. Гоцуленко // Математическое моделирование. – 2004. – № 2 (12). – С. 5-7.

Поступила в редакцию: 16.10.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проректор по научной работе А.В. Садовой, Днепродзержинский государственный технический университет, Днепродзержинск.

ВИЗНАЧЕННЯ АТТРАКТОРІВ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ДВОХСТУПЕНЕВИМ ЛОПАТЕВИМ НАГНІТАЧЕМ

В.В. Гоцуленко , В.В. Піцик

Визначені аттрактори та встановлені закономірності їх зміни при варіюванні акустичних параметрів нелінійної системи диференціальних рівнянь, що описує нестаціонарні рухи (помпаж) в пневмосистемі, яка включає двохступеневий лопатевий нагнітач з керованими об'ємами, розташованими на виході з кожної ступені лопатевого нагнітача. Це дозволило теоретичним шляхом, за допомогою характеристичних ляпуновських показників аттрактора, встановити наявність режиму стохастичних автоколивань (що відповідає дивному аттрактору), який раніше спостерігався на практиці.

Ключові слова: помпаж, аттрактор, характеристичний показник Ляпунова, автоколивання, акустичні параметри, нестійкість.

DEFINITION ATTRACTORS OF DYNAMIC SYSTEM WITH TWO-LEVEL ROTARY COMPRESSOR

V.V. Gotsulenko, V.V. Pizik

Are determined attractors and laws of their change at a variation of acoustic parameters of system of the equations describing non-stationary movements (surge) in a pneumatic system, including two-level rotary compressor with the controlled volumes located on an output of each step of a supercharger. It has allowed to establish in the theoretical way presence of a mode of stochastic self-oscillations (corresponding strange attractor) which were earlier observed in practice.

Key words: surge, attractor, Lyapunov's characteristic parameter, self-oscillations, acoustic parameters, instability.

Гоцуленко Владимир Владимирович – канд. техн. наук, старший преподаватель кафедры компьютерных и информационных технологий института предпринимательства “Стратегия”, Желтые Воды, Украина, e-mail: gosul@ukr.net.

Пицык Виктория Викторовна – аспирант кафедры промышленной теплоэнергетики Днепродзержинского государственного технического университета, Днепродзержинск, Украина.