УДК 629.7.054

В.Н. МЕЛЬНИК, В.В. КАРАЧУН

Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина

УСИЛИЯ И МОМЕНТЫ НА КРАЯХ ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ

Интегрирование дифференциальных уравнений оболочечных фрагментов конструкции с целью определения координатных функций требуют для различного класса задач формулирования граничных условий. В работе рассматривается отдельный вид тонкой оболочки – выпуклой, с величиной подъема δ. Очерчиваются аналитические операторы по трем нелинейным координатам для случаев $z=0$*,* $z=1$*. Выполнены все необходимые процедуры для применения Фурье-анализа при приведении дифференциальных уравнений к виду, удобному для интегрирования.*

Ключевые слова: *оболочка, граничные условия, перерезывающие усилия, граничные условия на срез.*

Введение

Постановка проблемы и ее связь с научно-техническими задачами. Установлено, что оболочечные фрагменты конструкции летательных аппаратов, а также комплектующих, в режиме эксплуатационного функционирования испытывают действия целого ряда возмущающих факторов, которые в той или иной степени приводят к перемещениям поверхности. Интегрированная оценка генерируемой вибрации поверхности приводит к изменению динамических свойств оболочек, особенно нежелательных при наличии носителей кинетического момента.

Первым шагом борьбы с этой неприятностью является переход к ненулевой гауссовой кривизне оболочки с целью ужесточения конструкции в поперечном направлении.

Авторами рассмотрен один из технических вариантов – бочкообразные конструкции.

Обзор публикаций и выделение нерешенных задач. Изучение динамики оболочечных конструкций проводилось множеством исследователей.

Здесь и наличие взаимно-перпендикулярных плоскостей геометрической и массовой симметрии [1, 2], и толщина оболочки [3, 4], и наличие ребер жесткости [5, 6]. Наконец, сами задачи имели трехмерную или двумерную структуру [7].

Построенная на базе гипотез Кирхгофа приближенная теория, нашедшая широкое применение, предполагала определенные ограничения на относительную толщину $\frac{h}{R}$ (h – толщина, R – минимальный линейный размер срединной поверхности) [8].

Особенностью работ последнего периода можно считать усложнение расчетных моделей наряду с учетом все большего числа возмущающих факторов. Существенным отличием можно назвать:

– отказ от гипотезы схожестям форм;

– усовершенствование асимптотических методов расчета колебаний.

Большое количество важных для теории и практики задач проанализировано, например, в работах [9 – 11].

Авторы рассматривают оригинальную задачу – наличие двух, одновременно действующих, возмущающих факторов. Кинематическое возмущение и проникающее акустическое излучение пространственной структуры.

Постановка задачи данного исследования. Широкое использование оболочечных фрагментов объясняет постоянное внимание исследователей при изучении особенностей их функционирования.

Данная работа ориентируется на создание универсального теоретического аппарата расчетных моделей оболочек.

Решение поставленных задач предусматривает нахождение координатных функций на основе Фурье-анализа и метода Бубнова-Галеркина. Объемность исследований ограничивает изложение только вопросами формулирования граничных условий и создания операторов их реализации.

Изложение основного материала с обоснованием полученных научных результатов

Примем во внимание, что на краях оболочки должны выполняться условия:

$$(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)_{\substack{z=0\\z=1}}=0\,;\ \ (\chi_1+\nu\chi_2)_{\substack{z=0\\z=1}}=0\,;$$

$$Q_1=\left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}(\chi_1+\nu\chi_2)+2(1-\nu)\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\right]_{\substack{z=0\\z=1}}=0\,.\quad(1)$$

Для безразмерных величин имеем:

$$\xi(z)\big|_{z=0} = -\frac{\delta}{R\ (1+\zeta)};$$

$$\xi(z)\big|_{z=1} = \frac{\delta}{R\ (1+\zeta)};$$

$$\xi'(z)\big|_{z=0} = -\frac{4\delta}{R\ l(1+\zeta)};$$

$$\xi'(z)\big|_{z=1} = \frac{4\delta}{R\ l(1+\zeta)};$$

$$\left|\xi(z)\right|_{\substack{z=0\\z=l}} = \frac{\delta}{R\ (1+\zeta)} \langle 1; \quad \eta = \frac{R}{l}; \quad \zeta = \frac{\delta}{R};$$

$$\mu = 8\zeta(1+\zeta)\eta^2 = \frac{8\delta}{R}(1+\zeta)\frac{R^2}{l^2} = 8(1+\zeta)\left(\frac{\delta}{l}\right)\left(\frac{R}{l}\right);$$

$$2\mu\,\xi(z)\big|_{\substack{z=0\\z=l}} = \pm 16(1+\zeta)\left(\frac{\delta}{l}\right)\left(\frac{R}{l}\right)\frac{\delta}{R(1+\zeta)} = \pm 16\left(\frac{\delta}{l}\right)^2,$$

где $\xi(z)$ – линия меридиана;

δ – подъем линии меридиана.

Рассматриваются такие оболочки, для которых имеет место соотношение

$$\left|2\mu\,\xi(z)\right| \langle\langle 1,$$

поэтому

$$16\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \langle 1;$$

$$\frac{\delta}{l} \langle \frac{1}{4}.$$

Это позволит в дальнейшем всеми членами, содержащими $2\mu\,\xi(z)$, пренебречь ввиду малости по сравнению с единицей.

Для продольных упругих перемещений поверхности получаем:

$$\left[\frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{4\nu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)U_z + \frac{\nu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\times \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{(\nu+\mu)}{(1+\zeta)}\left(\frac{1}{R}\right)W\right]_{z=0} = 0; \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{4\nu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)U_z + \frac{\nu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\times \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{(\nu+\mu)}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)W\right]_{z=1} = 0. \quad (3)$$

Аналогично для направления параллели имеем:

$$\left[\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial U_z}{\partial \varphi} - \frac{4}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)U_\varphi\right]_{z=0} = 0; \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial U_z}{\partial \varphi} + \frac{4}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)U_\varphi\right]_{z=1} = 0. \quad (5)$$

Наконец, формулируем граничные условия на контуре $z=0$ и $z=1$:

$$\left[-\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - \frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{4\mu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{4\nu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}\right]_{z=0} = 0; \quad (6)$$

или так:

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{4(\nu+\mu)}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}\right]_{z=0} = 0; \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{4(\nu+\mu)}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}\right]_{z=1} = 0. \quad (8)$$

Наконец, сформулируем граничные условия на краях $z=0$ и $z=1$ для перерезывающего усилия, то есть, анализируем выражение:

$$Q_1 = \left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}(\chi_1 + \nu\chi_2) + 2(1-\nu)\frac{1}{A_2}\frac{\partial \tau}{\partial \varphi}\right]_{\substack{z=0\\z=1}} = 0.$$

С этой целью обратимся к формуле

$$\frac{l^3}{h}\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}(\chi_1 + \nu\chi_2) \cong \frac{l^3}{h}\frac{\partial}{\partial z}(\chi_1 + \nu\chi_2) =$$

$$= \frac{8\mu}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{8\mu}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{2z-1}{\left[1+2\mu\xi(z)\right]^2}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{8\mu}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} - \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\,\partial \varphi^2} -$$

$$- \frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\,\partial \varphi} +$$

$$+ \frac{8\nu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{4\nu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)(2z-1)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}.$$

Откуда получаем:

$$\frac{l^3}{h}\frac{\partial}{\partial z}(\chi_1 + \nu\chi_2)\bigg|_{z=0} = \frac{8(\nu+\mu)}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z} -$$

$$- \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} - \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\,\partial \varphi^2} - \frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} -$$

$$- \frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\,\partial \varphi} - \frac{4\nu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}; \quad (9)$$

$$\frac{l^3}{h}\frac{\partial}{\partial z}(\chi_1+\nu\chi_2)\Big|_{z=1}=\frac{8(\mu+\nu)}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}-$$

$$-\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}-\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}-\frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-$$

$$-\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}+\frac{(16\mu+4\nu)}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}. \quad (10)$$

Вычислим слагаемое $2(1-\nu)\frac{l^3}{h}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}$. После упрощений, получим:

$$2(1-\nu)\frac{l^3}{h}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}==2(1-\nu)\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}-\frac{4(2z-1)}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}\right].$$

Это позволяет записать следующее:

$$2(1-\nu)\frac{l^3}{h}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\Big|_{z=0}==2(1-\nu)\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}+\frac{4}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}\right]; \quad (11)$$

$$2(1-\nu)\frac{l^3}{h}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\Big|_{z=1}=2(1-\nu)\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}-\frac{4}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}\right]. \quad (12)$$

Таким образом, на краю $z=0$ имеем такое граничное условие:

$$\left\{\frac{8(\nu+\mu)}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}-\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\times\right.$$

$$\times\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}-\frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}-$$

$$-\frac{4\nu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+2(1-\nu)\left[-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}+\right.$$

$$+\frac{4}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}-$$

$$\left.\left.-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}\right]\right\}_{z=0}=0; \quad (13)$$

на краю $z=1$ получаем граничное условие для перерезывающего усилия Q_1:

$$\left\{\frac{8(\nu+\mu)}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}-\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}-\right.$$

$$-\frac{\mu}{(1+\zeta)}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}+$$

$$+\frac{(16\mu+4\nu)}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+2(1-\nu)\left[-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\times\right.$$

$$\times\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}-\frac{4}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}-$$

$$\left.\left.-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}\right]\right\}_{z=1}=0. \quad (14)$$

Запишем выражение (13) в более компактном виде:

$$\left\{\frac{8(\nu+\mu)}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}\times\right.$$

$$\times(\nu+2-2\nu)-\frac{\mu}{(1+\zeta)}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-$$

$$-\frac{1}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}(\nu+2-2\nu)-\frac{16\mu+4\nu}{(1+\zeta)}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{8(1-\nu)}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right\}_{z=0}=0.$$

Или так –

$$\left\{-\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}-\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}-\frac{16\mu+4\nu}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{8(1-\nu)}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+\frac{8(\nu+\mu)}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}-$$

$$\left.-\frac{\mu}{(1+\zeta)}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}\right\}_{z=0}=0. \quad (15)$$

Аналогично упростим выражение (14):

$$\left\{-\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}-\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}+\frac{16\mu+4\nu}{(1+\zeta)}\times\right.$$

$$-\frac{8(1-\nu)}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{8(\nu+\mu)}{(1+\zeta)}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{\mu}{(1+\zeta)}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-$$

$$\left.-\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}\right\}_{z=1}=0. \qquad (16)$$

Таким образом, сформулированы граничные условия на срез. Следует напомнить, что величина $\frac{1}{R}\rangle\rangle 1$ и дальнейшие упрощения следует проводить осторожно.

Для дальнейшего удобства выпишем граничные условия вместе:

На краю $z=0$:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial U_z}{\partial z}+\dfrac{4\nu}{1+\zeta}\left(\dfrac{\delta}{R}\right)U_z+\dfrac{\nu}{1+\zeta}\times\\ \times\left(\dfrac{1}{R}\right)\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}-\dfrac{\mu+\nu}{1+\zeta}\left(\dfrac{1}{R}\right)W\end{array}\right]_{z=0}=0; \qquad (17)$$

$$\left[\frac{\partial U_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial U_z}{\partial\varphi}-\frac{4}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)U_\varphi\right]_{z=0}=0; \qquad (18)$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+\frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial U_z}{\partial z}+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{4(\nu+\mu)}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}\right]_{z=0}=0; \qquad (19)$$

$$\left[-\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}-\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}-\frac{16\mu+4\nu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{8(1-\nu)}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+\frac{8(\nu+\mu)}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}-$$

$$\left.-\frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}\right]_{z=0}=0. \qquad (20)$$

На краю $z=1$:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial U_z}{\partial z}-\dfrac{4\nu}{1+\zeta}\left(\dfrac{\delta}{R}\right)U_z+\dfrac{\nu}{1+\zeta}\left(\dfrac{1}{R}\right)\times\\ \times\dfrac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}-\dfrac{\mu+\nu}{1+\zeta}\left(\dfrac{1}{R}\right)W\end{array}\right]_{z=1}=0; \qquad (21)$$

$$\left[\frac{\partial U_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial U_z}{\partial\varphi}+\frac{4}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)U_\varphi\right]_{z=1}=0; \qquad (22)$$

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+\frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial U_z}{\partial z}+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{4(\nu+\mu)}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}\right]_{z=1}=0; \qquad (23)$$

$$\left[-\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}-\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial\varphi^2}+\frac{16\mu+4\nu}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\times\right.$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-\frac{8(1-\nu)}{(1+\zeta)^3}\left(\frac{1}{R}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+\frac{8(\nu+\mu)}{1+\zeta}\left(\frac{\delta}{R}\right)\frac{\partial W}{\partial z}-$$

$$\left.-\frac{\mu}{1+\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}-\frac{2-\nu}{(1+\zeta)^2}\left(\frac{1}{R}\right)^2\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z\partial\varphi}\right]_{z=1}=0. \qquad (24)$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований в данном направлении

Проведенные аналитические исследования оболочки выполнены для самого общего случая функционирования прибора – поверхность оболочечной части предполагается нагруженной внешним возмущающим воздействием произвольной структуры и природы проявления, механизм воздействия может носить пространственный характер, либо выступать в качестве сосредоточенной на элементе поверхности нагрузки заданной интенсивности – и, поэтому, существенно расширяют возможности анализа динамики конструкции. Выполнены все необходимые предварительные процедуры для решения одной их главных задач – определение координатных функций фрагмента.

Результаты изучения расчетной модели могут быть сформулированы следующим образом:

– периодичность силовых и кинематических полей создает теоретическую базу для использования метода Фурье с целью приведения дифференциальных уравнений к виду, удобному для интегрирования. Практически реализуется возможность независимого изучения динамического состояния по виду упругой деформации поверхности оболочки – осесимметричной ($k = 0$), антисимметричной ($k = 1$), циклического динамического деформирования ($k \geq 2$);

– сделаны предпосылки для выбора аналитических аппроксимаций упругих перемещений по трем направлениям и выбора корректирующих функций Кравчука для удовлетворения граничным условиям на краях;

– сформулированы граничные условия для поплавкового подвеса, края которого свободны от закреплений. Выполнены операции разделения переменных в граничных условиях в соответствии с исходными предпосылками метода Фурье. Построена система независимых аналитических структур для изучения напряженно-деформированного состояния подвеса.

Литература

1. *Карачун В.В. Напряженно-деформированное состояние поверхности круговой цилиндрической оболочки под действием акустической волны / В.В. Карачун, В.Г. Лозовик // Проблемы прочности. – 1997. – № 3. – С. 139-144.*

2. *Многомерные задачи нестационарной упругости подвеса поплавкового гироскопа / МОН Ук-*

раины, Нац. техн. ун-т Украины "КПИ"; В.В. Карачун, В.Г. Лозовик, Е.Р. Потапова и др. – К.: «Корнейчук», 2000. – 128 с.

3. Новожилов В.В. Расчет оболочек тел вращения / В.В. Новожилов. – М.: Изв. АН СССР, ОТН, 1946. – № 7. – С. 51-62.

4. Штаерман И.Я. К теории симметричной деформации анизотропных упругих оболочек / И.Я. Штаерман. – К.: Киевск. политехн. и с.х. институт, 1924. – Вып. 1-2. – С. 37-43.

5. Власов В.З. Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней / В.З. Власов // Изв. АН СССР, ОТН. – М., 1949. – № 6. – С. 41-45.

6. Балабух Л.И. Приближенная теория основного напряженного состояния цилиндрической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами / Л.И. Балабух, С.И. Галкин // Тр. Тр. VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. Баку, 1966. – М.: Наука, 1966. – С. 94-102.

7. Donnell L. A discussion of thin shell theory / L. Donnell. – Proc. fifth Congr. for Appl. Mech., 1939.

8. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек / Ин-т пробл. механики / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 517 с. – Библиогр.: с. 510-512.

9. Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями: монография / Э.И. Григолюк, А.Г. Горшков; Моск. гос. ун-т. Институ механики. – М.: МГУ, 1968. – 180 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 177-179.

10. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкции со средой / В.Д. Кубенко; Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины. – К.: Наук. думка, 1979. – 134 с. – Библиогр.: с. 131-133.

11. Горшков А.Г. Взаимодействие слабых нестационарных волн давления с упругими оболочками // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 3. – С. 155-164.

Поступила в редакцию 15.04.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.М. Рыжков, Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина.

ЗУСИЛЛЯ І МОМЕНТИ НА КРАЯХ ОБОЛОНКИ

В.М. Мельник, В.В. Карачун

Інтегрування диференціальних рівнянь оболонкових фрагментів конструкції з метою визначення координатних функцій потребує для різного класу задач формулювання граничних умов. В роботі вивчається окремий вид тонкої оболонки – опуклої, з величиною підйому δ. Окреслюються аналітичні оператори за трьома нелінійними координатами для випадків z = 0, z = 1. Виконані всі необхідні процедури для застосування Фур'є-аналізу при приведені диференціальних рівнянь до вигляду, зручного для інтегрування.

Ключові слова: оболонка, граничні умови, перерізуючи зусилля, граничні умови на зріз.

THE EFFORTS AND MOMENTS BY THE BORDERS OF THE CONVEX ENVELOPE

V.N. Mel'nick, V.V. Karachun

Integration of differential equations of envelope fragments of construction with the purpose of determination of co-ordinate functions needs for a different class in the tasks of formulation of maximum conditions. A separate type of thin shell envelope is studied in this research – protuberant, with the size of lifting δ. Analytical operators are described after three nonlinear co-ordinates for cases of z = 0, z = 1. All necessary procedures are executed for application of Fourier-analysis at bringing differential equations over to the kind, comfortable for integration.

Key words: envelope, beside condition, cut efforts, beside condition by cut.

Мельник Виктория Николаевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры биотехники и инженерии Национального технического университета Украины «КПИ», Киев, Украина, e-mail: karachun1@gala.net.

Карачун Владимир Владимирович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой биотехники и инженерии Национального технического университета Украины «КПИ», Киев, Украина, karachun1@gala.net.