

УДК 539.3

К.В. АВРАМОВ¹, Л.В. РОЗОВА²¹Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков²Национальный технический университет «ХПИ», Харьков, Украина

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РОТОРОВ С ПОДШИПНИКАМИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Получена модель автоколебаний несимметричного однодискового ротора в коротких подшипниках скольжения. Эта модель сводится к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка содержащих нелинейные слагаемые относительно обобщенных координат и скоростей. Полученная динамическая система исследуется нелинейными нормальными формами Шуупера. С помощью этого подхода удалось исследовать автоколебания. Как показывают результаты численного моделирования, эти автоколебания являются неустойчивыми.

Ключевые слова: подшипники скольжения, дискретная модель, метод нелинейных нормальных форм.

Введение

Автоколебания в роторных системах могут возникать вследствие взаимодействия масляной пленки подшипника скольжения с цапфой ротора. Они привели к разрушению ряда роторных систем [1]. В настоящее время для исследования колебаний роторных систем часто применяются современные аналитические и численные методы нелинейной динамики [2]. Позняк [3] получил аналитические результаты, описывающие давления в масляной пленки подшипников скольжения. Используя вариационный подход, Олимпиев [4] получил асимптотическое решение уравнения Рейнольдса. Устойчивость цапфы в подшипнике скольжения рассматривается в монографии [5]. Каринцев, Шульженко [6] получили модель давлений в масляном слое коротких подшипников скольжения. Они исследовали влияние инерции масляного слоя на величины давлений. Филиппов, Шульженко [7] применяют асимптотические методы для исследования автоколебаний в роторах.

В этой статье предлагается новая модель автоколебаний несимметричного однодискового ротора в коротких подшипниках скольжения. Для описания давлений в масляном слое используется модель короткого подшипника. Для исследования автоколебаний ротора в статье предложена модификация метода нелинейных нормальных форм.

1. Уравнения движения системы

Рассмотрим динамику жесткого диска, который крепится к вращающемуся упругому валу. Вал находится в двух коротких подшипниках скольжения (рис. 1). В процессе колебаний цапфы вала А и В так же движутся. Эти движения описываются обобщен-

ными координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . В масляном слое подшипников возникают усилия, действующие на цапфы. Проекция этих сил на оси x и y обозначим $F_x(x_i; y_i)$; $F_y(x_i; y_i)$; $i = \overline{1, 2}$. Предположим, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z (рис.1).

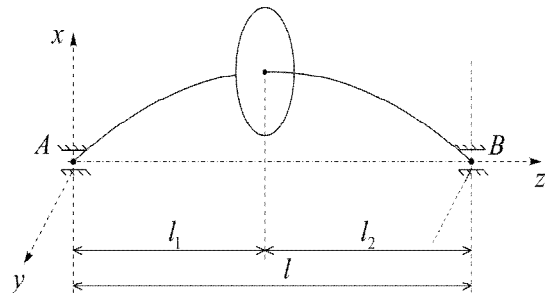


Рис. 1. Схема вращения ротора

Тогда угловую скорость диска представим так:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3; \quad (1)$$

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3;$$

$\omega_2 = \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3$; $\omega_3 = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$,
где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — орты декартовой системы координат, связанной с диском; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — углы поворота диска. Кинетическая энергия диска принимает следующий вид:

$$T = \frac{I_c}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{I_p}{2} (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (2)$$

где x, y — перемещения точек крепления диска к валу.

Потенциальную энергию ротора представим так:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}c_{11} \left[(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1)^2 + (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2}c_{22} \left[\left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{1} \right)^2 + \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{1} \right)^2 \right] + \\ & + c_{12} \left[(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{1} \right) - \right. \\ & \left. - (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{1} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varsigma_1 = \frac{l_1}{1}; \quad \varsigma_2 = \frac{l_2}{1}.$$

где c_{11}, c_{22}, c_{12} – элементы матрицы жесткости. Тогда уравнения движения системы состоят из четырех уравнений Лагранжа, описывающих колебания диска, и четырех условий равновесия цапф:

$$m\ddot{x} + c_{11}(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + c_{12} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{1} \right) = -mg;$$

$$m\ddot{y} + c_{11}(y - \varsigma_1 y_2 - \varsigma_2 y_1) - c_{12} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{1} \right) = 0;$$

$$I_e \ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_2 - I_e \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 -$$

$$- \frac{I_p}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_1 \sin^2 \theta_2 + I_p \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 +$$

$$+ c_{22} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{1} \right) - c_{12} (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) = 0;$$

$$I_e \ddot{\theta}_2 + \frac{I_e}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) - I_p \Omega \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 +$$

$$+ c_{22} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{1} \right) + c_{12} (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) = 0;$$

$$\left(\frac{c_{12}}{1} - \varsigma_2 c_{11} \right) (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) +$$

$$+ \left(\frac{c_{22}}{1} - \varsigma_2 c_{12} \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{1} \right) = F_x(x_1, y_1);$$

$$\left(\frac{c_{12}}{1} - \varsigma_2 c_{11} \right) (y - \varsigma_1 y_2 - \varsigma_2 y_1) +$$

$$+ \left(\varsigma_2 c_{12} - \frac{c_{22}}{1} \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{1} \right) = F_y(x_1, y_1);$$

$$\left(\varsigma_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{1} \right) (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) +$$

$$+ \left(\frac{c_{22}}{1} + \varsigma_1 c_{12} \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{1} \right) = -F_x(x_2, y_2);$$

$$\left(\frac{c_{22}}{1} + \varsigma_1 c_{12} \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{1} \right) -$$

$$- \left(\varsigma_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{1} \right) (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) = F_y(x_2, y_2). \quad (4)$$

Динамическую систему (4) приведем к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно представить так:

$$m\ddot{x} = R_X^{(1)}; I_e \ddot{\theta}_2 - I_p \Omega \dot{\theta}_1 + R_X^{(2)} = 0; \quad (5)$$

$$m\ddot{y} = R_Y^{(1)}; I_e \ddot{\theta}_1 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 - R_Y^{(2)} = 0.$$

Силы, действующие на цапфы вала со стороны масляного строя (рис. 1), представим так [2]:

$$[F_X, F_Y]^T =$$

$$= - \int_0^{L_B} \int_0^\pi [\cos(\theta + \phi), \sin(\theta + \phi)]^T p(z_1, \theta) R d\theta dz_1, \quad (6)$$

где L_B – длина подшипника; ϕ – угол линии центров. Давления, действующие на цапфу, со стороны масляного слоя, $p(z_1, \theta)$ определяется из уравнения Рейнольдса [2]. Решение этого уравнения представим так:

$$p(z_1, \theta) = \frac{3\mu}{h^3} \left(\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) (z_1 - L_B) z_1, \quad (7)$$

где μ – вязкость масла; z_1 – продольная локальная координата подшипника скольжения; s – величина зазора между цапфой и подшипником.

В дальнейшем используем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{c}; \quad \tilde{y}_j = \frac{y_j}{c}; \quad H = \frac{h}{c}; \quad \tau = \Omega t. \quad (8)$$

Нелинейные силы F_X, F_Y , действие на цапфы масляного слоя, разделим на две части: линейную $F_{X,1}, F_{Y,1}$ и нелинейную $F_{X,2}, F_{Y,2}$:

$$[F_{X,1}, F_{X,2}]^T = \gamma \int_0^\pi \cos(\theta + \phi_{el}) [R_1, R_2]^T d\theta;$$

$$[F_{Y,1}, F_{Y,2}]^T = \gamma \int_0^\pi \sin(\theta + \phi_{el}) [R_1, R_2]^T d\theta, \quad (9)$$

$$R_1 = \eta^{-3} [(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}'_1) \sin \theta_1 - (\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}'_1) \cos \theta_1 -$$

$$- 3\epsilon \eta^{-1} \sin \theta_1 (\tilde{x}_1 \cos \theta_1 + \tilde{y}_1 \sin \theta_1)];$$

$$R_2 = \eta^{-3} \{ 3\eta^{-1} X [(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}'_1) \sin \theta_1 - (\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}'_1) \cos \theta_1] -$$

$$- 6\epsilon \sin \theta \eta^{-2} X^2 \};$$

$$X = \tilde{x}_1 \cos \theta_1 + \tilde{y}_1 \sin \theta_1; \quad \eta = 1 + \epsilon \cos \theta; \quad \theta_1 = \theta + \phi_{el}.$$

Линейные части сил масляного слоя представим так:

$$F_{X,1} = \gamma [(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}'_1) I_1 - (y_1 + 2\tilde{x}'_1) I_2 - \epsilon 3\tilde{x}_1 I_3 - \epsilon 3\tilde{y}_1 I_4]$$

$$= \gamma [\bar{K}_{11}^{(x)} \tilde{x}_1 + \bar{K}_{12}^{(x)} \tilde{y}_1 + \bar{\beta}_{11}^{(x)} \tilde{x}'_1 + \bar{\beta}_{12}^{(x)} \tilde{y}'_1];$$

$$F_{Y,1} = \gamma [(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}'_1) I_5 - (y_1 + 2\tilde{x}'_1) I_6 - \epsilon 3\tilde{x}_1 I_4 - \epsilon 3\tilde{y}_1 I_6]$$

$$= \gamma [\bar{K}_{11}^{(y)} \tilde{x}_1 + \bar{K}_{12}^{(y)} \tilde{y}_1 + \bar{\beta}_{11}^{(y)} \tilde{x}'_1 + \bar{\beta}_{12}^{(y)} \tilde{y}'_1], \quad (10)$$

где I_1, \dots, I_6 – интегралы, которые определяются в элементарных функциях. Нелинейные части сил $F_{X,2}, F_{Y,2}$ представим так:

$$\begin{aligned}
 F_{X,2} &= \gamma \left\{ 3(\tilde{x}_1^2 - \tilde{y}_1^2 - 2\tilde{x}_1\tilde{y}_1' - 2\tilde{y}_1\tilde{x}_1') I_7 - \right. \\
 &\quad \left. 3\tilde{x}_1(\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}_1') I_8 + 3\tilde{y}_1(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}_1') I_9 - \right. \\
 &\quad \left. - 6\varepsilon\tilde{x}_1^2 I_{10} - 6\varepsilon\tilde{y}_1^2 I_{11} - 12\varepsilon\tilde{x}_1\tilde{y}_1 I_{12} \right\}; \\
 F_{Y,2} &= \gamma \left\{ 3(\tilde{x}_1^2 - \tilde{y}_1^2 - 2\tilde{x}_1\tilde{y}_1' - 2\tilde{y}_1\tilde{x}_1') I_9 - \right. \\
 &\quad \left. - 3\tilde{x}_1(\tilde{y}_1 + 2\tilde{x}_1') I_7 + 3\tilde{y}_1(\tilde{x}_1 - 2\tilde{y}_1') I_{13} - \right. \\
 &\quad \left. - 6\varepsilon\tilde{x}_1^2 I_{12} - 6\varepsilon\tilde{y}_1^2 I_{14} - 12\varepsilon\tilde{x}_1\tilde{y}_1 I_{11} \right\}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где I_7, I_8, \dots, I_{14} – значения интегралов, которые определяются в элементарных функциях.

Отметим, что силы масляного слоя (11) выражаются через обобщенные координаты цапф. Для упрощения уравнений движения ротора (5) выразим эти силы через обобщенные координаты диска. Для этого воспользуемся четырьмя алгебраическими уравнениями системы (4). В этих уравнениях отбросим нелинейные слагаемые и представим их в следующей матричной форме:

$$[R]q = [\tilde{D}]q_1. \quad (12)$$

Теперь из соотношений (12) выразим вектор q_1 и введем его в значения сил масляного слоя (9).

Тогда уравнение движения ротора (5) представим в следующем виде:

$$[M]\ddot{q} + [G]\dot{q} = [K_1]q + [D_1]q' + W(q_1, q_1'), \quad (13)$$

где $[M] = \text{diag}(m, I_e, m, I_e)$; $[G]$ – матрица гироскопических сил, действующих на ротор; $[K_1]$ – матрица линейной части упругих сил масляной пленки; $[D_1]$ – матрица линейной части диссипативных сил масляной пленки; $W = (w_1, \dots, w_4)^T$ – вектор нелинейной части сил масляной пленки; $q' = \frac{dq}{dt}$. Окончательно, система (13) принимает следующий вид:

$$\ddot{q} + [F]\dot{q} + [Q]q = \tilde{W}(q, \dot{q}); \quad (14)$$

$$[F] = [M]^{-1}([G] - [D_1]\Omega^{-1}); [Q] = -[M]^{-1}[K_1];$$

$$\text{где } [F] = \|f_{ij}\|_{j=1,4}^{i=1,4}; [Q] = \|\tilde{Q}_{ij}\|_{j=1,4}^{i=1,4}; \tilde{W} = [\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_4].$$

2. Нелинейные нормальные формы

Нелинейные нормальные формы Шоу-Пьера являются современным методом исследования нелинейных динамических систем. В этой статье предлагается модификация этого метода для исследования автоколебаний роторов.

Линейную часть системы (14) представим так:

$$\dot{z} = [\Gamma]z, \quad (15)$$

где $z = [z_1, \dots, z_8] = [q \dot{q}]^T = [q \ v]^T$; E – единичная

матрица. Из численных расчетов следует, что все собственные значения λ_j матрицы $[\Gamma]$ являются комплексно-сопряженными. Поэтому общее решение системы (15) представим так:

$$z(t) = \sum_{j=1}^4 [C_{2j}W_{2j} \exp(\lambda_{2j}t) + C_{2j-1}W_{2j-1} \exp(\lambda_{2j-1}t)], \quad (16)$$

где $\lambda_{2j} = \bar{\lambda}_{2j-1}$; $W_{2j} = \bar{W}_{2j-1}$; $C_{2j} = \bar{C}_{2j-1}$.

Здесь мы рассмотрим образование автоколебаний вследствие бифуркации Хопфа. В этом случае предельный цикл рождается вследствие потери устойчивости состояний равновесия. В этом случае два характеристических показателя определяются так: $\lambda_{1,2} = \pm i\chi_1$. Потеря устойчивости ротора описывается следующим частным решением системы (15):

$$z(t) = C_2 W_2 \exp(\lambda_2 t) + C_1 W_1 \exp(\lambda_1 t), \quad (17)$$

где $W_1 = \gamma_1 - i\delta_1$; $C_1 = K_1^{(1)} - iK_1^{(2)}$; $\lambda_1 = \alpha_1 - i\chi_1$; $\gamma_1 = \{\gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_1^{(8)}\}$; $\delta_1 = \{\delta_1^{(1)}, \dots, \delta_1^{(8)}\}$; $K_1^{(1)}, K_1^{(2)}$ –

константы интегрирования. Отметим, что решение (17) является центральным многообразием. Его можно представить так:

$$z_v(t) = \gamma_1^{(v)} \eta_1(t) + \delta_1^{(v)} \eta_2(t); \quad v = \bar{1}, 8; \quad (18)$$

$$\eta_1(t) = 2 \exp(\alpha_1 t) [K_1^{(1)} \cos(\chi_1 t) - K_1^{(2)} \sin(\chi_1 t)];$$

$$\eta_2(t) = -2 \exp(\alpha_1 t) [K_1^{(1)} \sin(\chi_1 t) + K_1^{(2)} \cos(\chi_1 t)].$$

Первую и пятую координату вектора z представим так:

$$x = \gamma_1^{(1)} \eta_1(t) + \delta_1^{(1)} \eta_2(t); \quad \dot{x} = \gamma_1^{(5)} \eta_1(t) + \delta_1^{(5)} \eta_2(t).$$

Эти уравнения можно представить так:

$$\eta_1(t) = \frac{x\delta_1^{(5)} - \dot{x}\delta_1^{(1)}}{\gamma_1^{(1)}\delta_1^{(5)} - \gamma_1^{(5)}\delta_1^{(1)}}; \quad \eta_2(t) = \frac{\dot{x}\gamma_1^{(1)} - x\gamma_1^{(5)}}{\gamma_1^{(1)}\delta_1^{(5)} - \gamma_1^{(5)}\delta_1^{(1)}}. \quad (19)$$

В общем случае, нелинейную нормальную форму можно записать в виде:

$$q_j = Q_j(x, v) = a_{j1}x + a_{j2}v + a_{j3}x^2 + a_{j4}v^2 + a_{j5}xv + \dots;$$

$$\dot{q}_j = Q_{j+4}(x, v) = a_{4+j,1}x + a_{4+j,2}v + a_{4+j,3}x^2 + a_{4+j,4}v^2 + a_{4+j,5}xv + \dots; \quad j = \bar{2}, 4, \quad (20)$$

где $v = \dot{x}$. Нелинейная нормальная форма (20) удовлетворяет системе уравнений в частных производных. Для вывода этой системы, уравнения (20) дифференцируются по времени, а в полученные уравнения вводятся (14). В результате приходим к следующей системе уравнений в частных производных относительно $Q_j(x, v)$; $Q_{j+4}(x, v)$:

$$-f_{j1}v - \sum_{v=2}^4 f_{jv}Q_{v+4}(x, v) - \tilde{Q}_{j1}x - \sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{jv}Q_v(x, v) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{W}_j(x, Q_2(x, v), \dots, v, Q_6(x, v), \dots) = \frac{\partial Q_{j+4}}{\partial x} v + \\
 & + \frac{\partial Q_{j+4}}{\partial v} \left\{ -f_{11} v - \sum_{v=2}^4 f_{1v} Q_{v+4}(x, v) - \tilde{Q}_{11} x - \right. \\
 & \left. - \sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{1v} Q_v(x, v) + \tilde{W}_1(x, Q_2(x, v), \dots, v, Q_6(x, v)) \right\}; \quad (21) \\
 & Q_{j+4}(x, v) - \frac{\partial Q_j}{\partial x} v + \frac{\partial Q_j}{\partial v} \left\{ f_{11} v + \sum_{v=2}^4 f_{1v} Q_{v+4}(x, v) + \tilde{Q}_{11} x + \right. \\
 & \left. + \sum_{v=2}^4 \tilde{Q}_{1v} Q_v(x, v) - \tilde{W}_1(x, Q_2(x, v), \dots, v, Q_6(x, v)) \right\} = 0;
 \end{aligned}$$

Теперь нелинейные моды (20) вводятся в систему (21) и приравниваются коэффициенты при $x^{j_1} v^{j_2}$; $j_1 = 0, 1, \dots$; $j_2 = 0, 1, \dots$. Приходим к системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов.

Теперь линейная часть нелинейной нормальной формы (20) вводится в функцию $\tilde{W}(q, \dot{q})$ динамической системы (14). В результате получим:

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}_j(q, \dot{q}) &= \tilde{W}_j(x, Q_2(x, v), \dots, v, Q_6(x, v), \dots) = \\
 &= \gamma_{11}^{(j)} x^2 + \gamma_{12}^{(j)} xv + \gamma_{22}^{(j)} v^2; \quad j = \overline{1, 4}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Уравнения (22) вводятся в (21) и приравниваются коэффициенты при x^2, xv, v^2 . Тогда получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $(a_{23}, a_{24}, a_{25}, \dots, a_{83}, a_{84}, a_{85})$.

Исследуем движения на полученной нелинейной нормальной форме. Для этого нелинейная форма (20) вводится в первое уравнение системы (14). В результате приходим к следующей динамической системе с одной степенью свободы:

$$\Omega A_S^{(1)} \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^2 + \delta \dot{x}^2 + \varepsilon x \dot{x} = 0. \quad (23)$$

Для исследования динамической системы (23) воспользуемся методом гармонического баланса. Тогда движения представим так:

$$x = A_0 + A_S^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_1) + A_C \cos(2\omega t + \varphi_2), \quad (24)$$

где $A_0, A_S^{(1)}, A_C, \varphi_1, \varphi_2, \omega$ – неизвестные параметры. Так как система (14) является автономной, она инвариантна относительно замены переменных $t = t_1 + t_0$, где t_0 – произвольное число. Предположим, что $t_0 = -\frac{\varphi_1}{\omega}$. Тогда решение (24) представим так:

$$x = A_0 + A_S^{(1)} \sin(\omega t) + A_C^{(2)} \cos(2\omega t) + A_S^{(2)} \sin(2\omega t). \quad (25)$$

Решение (25) введем в уравнение (23) и приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках $\sin(v\omega t)$ и $\cos(v\omega t)$; $v = 0, 1, 2$. В результате получим систему пяти нелинейных алгебраических

уравнений относительно $(\omega, A_0, A_S^{(1)}, A_S^{(2)}, A_C^{(2)})$:

$$\begin{aligned}
 & \beta A_0 + \gamma \left(A_0^2 + \frac{A_S^{(1)2}}{2} + \frac{A_C^{(2)2}}{2} + \frac{A_S^{(2)2}}{2} \right) + \\
 & + \delta \omega^2 \left(\frac{A_S^{(1)2}}{2} + 2A_C^{(2)2} + 2A_S^{(2)2} \right) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\beta - \omega^2 + 2\gamma A_0 - \gamma A_C^{(2)} - 2\delta \omega^2 A_C^{(2)} - \frac{\varepsilon \omega}{2} A_S^{(2)} = 0; \quad (26)$$

$$\alpha \omega + \gamma A_S^{(2)} + 2\delta \omega^2 A_S^{(2)} + \varepsilon \omega A_0 - \frac{\varepsilon \omega}{2} A_C^{(2)} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 & (\beta - 4\omega^2) A_S^{(2)} - \alpha A_C^{(2)} 2\omega + 2\gamma A_0 A_S^{(2)} + \\
 & + \varepsilon \omega \left(\frac{A_S^{(1)2}}{2} - 2A_C^{(2)} A_0 \right) = 0; \\
 & \alpha 2\omega A_S^{(2)} + (\beta - 4\omega^2) A_C^{(2)} +
 \end{aligned}$$

$$+ \gamma (2A_0 A_C^{(2)} - 0.5 A_S^{(1)2}) + \frac{\delta \omega^2}{2} A_S^{(1)2} + \varepsilon 2\omega A_S^{(2)} A_0 = 0.$$

Результаты анализа автоколебаний ротора представляются на амплитудно-частотной характеристике. Ее расчет производится следующим образом. Задается значение Ω с некоторым шагом. Для каждого значения Ω амплитуды автоколебаний ротора определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений (26).

3. Численный анализ автоколебаний

Рассмотрим автоколебания ротора со следующими параметрами:

$$R = 0,057 \text{ м}; \quad \mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad L_B = 28,5 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$c = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad m = 374 \text{ кг}; \quad l_1 = 0,5 \text{ м};$$

$$l_2 = 0,648 \text{ м}; \quad I_p = 28,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_e = 14,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad (27)$$

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad J = 8,29 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Собственная частота прямой прецессии ротора имеет следующее численное значение: $\Omega_{*,1} = 394 \text{ рад/с}$. Угловая скорость, при которой ротор теряет устойчивость равномерного вращения, составляет $\tilde{\Omega} = 2110 \text{ рад/с}$. Итак, при $\Omega < \tilde{\Omega}$ равномерное вращение ротора устойчиво, а неустойчиво в противном случае. При $\Omega = \tilde{\Omega}$ наблюдается бифуркация Хопфа. Вследствие этой бифуркации рождается предельный цикл. Для исследования таких предельных циклов используются нелинейные нормальные моды, рассмотренные выше. Амплитудно-частотная характеристика ротора представлена на рис. 2, где показана зависимость первой гармоники ряда Фурье $A_1^{(s)}$ от угловой скорости вращения ротора Ω .

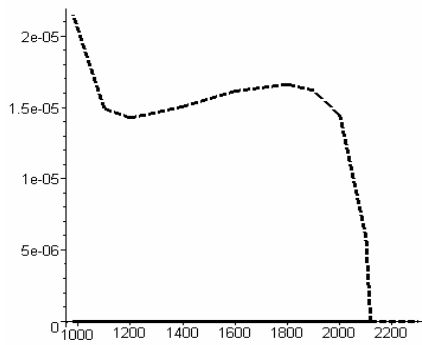


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика ротора

Устойчивые колебания на этом рисунке показаны сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной. Решение $A_S^{(1)} = 0$ описывает устойчивое равномерное вращение ротора. Пунктирная кривая на этом рисунке показывает неустойчивые автоколебания ротора. Эти неустойчивые автоколебания претерпевают седло-узловую бифуркацию и преобразуются в устойчивые, которые исследуются прямым численным интегрированием.

Литература

1. Zhang X.Y. On site testing and analysis of the oil whirl phenomena in national made 200MW stream

turbine generator systems / X.Y. Zhang // *Power Industry*. – 1992. – № 12. – P. 32-37.

2. Legrand M. Nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the Invariant Manifold Method / M. Legrand, D. Jiang, C. Pierre., S.W. Shaw // *International Journal of Rotating Machinery*. – 2004. – № 10. – P. 319-335.

3. Позняк Э.Л. Неустойчивые колебания роторов на подшипниках скольжения / Э.Л. Позняк // *Динамика гибких роторов*. – М.: Наука, 1972. – С. 22-29.

4. Олимпиев В.И. О собственных частотах ротора на подшипниках скольжения / В.И. Олимпиев // *Изв. АН СССР, ОТН*. – 1960. – № 3. – С. 24-29.

5. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов / А. Тондл. – Л.: Энергия, 1971. – 386 с.

6. Каринцев И.Б. Статические и динамические характеристики масляной пленки коротких подшипников скольжения / И.Б. Каринцев, Н.Г. Шульженко // *В кн.: Динамика и прочность машин*. – Х.: ХГУ, 1972. – Вып. 16. – С. 14-18.

7. Филиппов А.П. Устойчивость колебаний ненагруженного неуравновешенного ротора в коротких опорах жидкостного трения / А.П. Филиппов, Н.Г. Шульженко // *Машиноведение*. – 1973. – № 4. – С. 21-28.

Поступила в редакцию 12.05.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой О.К. Морачковский, Харьковский национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА РОТОРІВ З ПІДШИПНИКАМИ КОВЗАННЯ

К.В. Аврамов, Л.В. Розова

Отримано модель автоколивань несиметричного ротору у коротких підшипниках ковзання. Ця модель зводиться до системи чотирьох диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійними доданками відносно узагальнених координат та швидкостей. Отримана динамічна система досліджується нелінійними формами. З допомогою цього підходу досліджено автоколивання. Як показують результати чисельного модулювання, ці автоколивання є нестійкими.

Ключові слова: підшипники ковзання, дискретна модель, метод нелінійних форм.

NONLINEAR DYNAMICS OF ROTORS WITH JOURNAL BEARINGS

K.V. Avramov, L.V. Rozova

The model of vibrations of unsymmetrical one disk rotor in short journal bearings is obtained. The model is reduced to the system of four ordinary differential equations with nonlinear terms with respect to the general coordinates and velocities. The obtained dynamical system is studied by nonlinear modes. The self vibrations are analyzed by means of nonlinear modes. As shown the results of the numerical simulation, these self vibrations are unstable.

Key words: journal bearing, discrete model, nonlinear modes.

Аврамов Константин Витальевич – д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела нестационарных механических процессов Института проблем машиностроения им А.Н.Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, e-mail: kvavr@kharkov.ua.

Розова Людмила Викторовна – канд. техн. наук, старший преподаватель кафедры газогидромеханики и теплообмена Национального технического университета «ХПИ», Харьков, Украина.