

УДК 532.526

В.Т. МОВЧАН, Є.О. ШКВАР, Т.В. КОЗЛОВА

*Національний авіаційний університет, Україна***АЛГЕБРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ КОЕФІЦІЄНТА
ТУРБУЛЕНТНОЇ В'ЯЗКОСТІ ДЛЯ ПРИСТІННИХ ТЕЧІЙ**

Наведено напрацьовані універсальні алгебро-диференціальні моделі коефіцієнта турбулентної в'язкості, які здатні враховувати основні фізичні особливості зсувної пристінної течії. У ролі диференціальної моделі на даному етапі досліджень використано двопараметричну k - ϵ модель, хоча можливості цього підходу є значно ширшими. Крім того, запропонована гібридна модель, складена з однопараметричної диференціальної k моделі доповненою одержаною напівемпіричною залежністю для ϵ у пристінній області та знову k - ϵ моделі – в зовнішній області.

Ключові слова: турбулентність, турбулентна в'язкість, алгебраїчні, диференціальні та гібридні моделі турбулентності, зсувна течія, примежовий шар.

**Актуальність, аналіз стану
та підходи до вирішення проблеми
математичного моделювання
турбулентних течій**

Течії, з якими доводиться мати справу в авіаційній науці й практиці, є у переважній більшості турбулентними. Оскільки процеси, що мають місце в турбулентних течіях є надскладними, знання механізмів їх протікання – недостатніми, а наявні результати фізичних експериментів – надто неповними. Використання гіпотез в дослідженні турбулентності при проведенні числових експериментів дає змогу з'ясувати глибинну суть явища турбулентності та одержати нові як якісні, так і кількісні знання стосовно нього, а також покращити якість математичного прогнозування динаміки розвитку турбулентної течії.

Найбільш інформативним, а тому і найперспективнішим з існуючих підходів до математичного моделювання турбулентних течій є метод прямого числового моделювання (Direct Numerical Simulation – DNS), у якому не закладається ніяких припущень стосовно характеристик турбулентності та не використовується розкладань характеристик руху на осереднену та пульсаційну складові (за Рейнольдсом), а система рівнянь Нав'є-Стокса розв'язується у нестационарній постановці з надто малою дискретизацією як за простором, так і у часі. Багато успішних спроб впевнюють у працездатності й дієвості цього підходу навіть за умови відсутності доведення єдиності розв'язку системи рівнянь Нав'є-Стокса [1-4]. Суттєвим недоліком методу є вкрай висока вимогливість до обчислювальних ресурсів, що обумовлена широким спектром масштабів вихрових

структур турбулентності і тією обставиною, що найменші з них, які відповідають за дисипативний механізм турбулентного руху, мусять бути належним чином враховані роздільною здатністю сітки. Саме ця обставина і висуває вкрай жорсткі вимоги до зменшення розмірів комірок сітки по мірі зростання числа Рейнольдса. За оцінками Moïn, Kim [5] кількість вузлів сітки мусить зростати пропорційно $Re^{9/4}$. Отже розрахунки за методом DNS на сьогодні мають скоріше академічне, ніж прикладне значення.

Ефективним шляхом до розширення можливостей розглянутого вище методу DNS із збереженням його основних властивостей став метод моделювання динаміки великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES) [6], який не накладає таких жорстких обмежень на розміри сітки, як DNS. Згідно сучасних оцінок [7], кількість вузлів сітки для реалізації методу LES при моделюванні вільної турбулентності мусить зростати пропорційно $Re^{9/8}$, при моделюванні примежового шару в цілому – пропорційно $Re^{1,2}$, що є суттєво меншим за вимоги методу DNS, але все одно надмірним для розв'язання актуальних сучасних задач прикладного спрямування.

Ще однією сучасною альтернативою технології напівемпіричного моделювання є метод від'єднаних вихорів (Detached Eddy Simulation – DES). Цей метод довів свою обчислювальну економічність і спроможність достовірного відтворення характеристик течій з масштабними рециркуляційними зонами [8]. Він продемонстрував ефективність і перспективність побудови комбінованих модельних представлень і відповідних числових методів.

У роботі Спаларта [9], наведено порівняння обчислювальних ресурсів, необхідних для реалізації розглянутих вище методів моделювання турбулент-

ного обтікання типових конфігурацій літака чи автомобіля разом із прогнозами забезпечення цими ресурсами у майбутньому. З аналізу витікає, що у найближчі 40-50 років переважатимуть методи RANS і DES, які потребують використання напівемпіричних підходів, отже проблема подальшого удосконалення технології напівемпіричного моделювання впродовж цього часу не втратить своєї актуальності.

Міра надійності коректного відтворення параметрів турбулентності $k-\epsilon$ моделлю поблизу обтічної поверхні є невисокою через порушення принципу локальної рівноваги, покладеного в її основу, що, однак, не заважає цій моделі забезпечувати гідні результати вже з віртуальної нижньої межі логарифмічної області (за умови нехтування буферним прошарком). Проблема адекватного запису рівнянь $k-\epsilon$ моделі і, перш за все, рівняння переносу ϵ біля стінки і до сьогодні не знайшла свого вирішення. Вільною від зазначених вище проблем $k-\epsilon$ моделі щодо відтворення пристінних ефектів є $k-\omega$ модель. Найбільш суттєвою перевагою даного типу модельного опису турбулентності є можливість коректного задання граничних умов на стінці і, відповідно, виконання розрахунків безпосередньо від обтічної поверхні без додаткових зусиль по адаптації моделі в пристінній зоні введенням низькорейнольдсових поправок. Уїлкокс, характеризуючи клас $k-\omega$ моделей, пояснює їх перевагу перед $k-\epsilon$ моделями тим, що перші більш адекватно відтворюють властивості пристінної турбулентності [10]. Саме тому $k-\omega$ моделі краще у порівнянні з $k-\epsilon$ моделями прогнозують характеристики передвідричних та відричних турбулентних течій [11]. З іншого боку, Уїлкокс називає і найсуттєвіший недолік $k-\omega$ моделей, який полягає в їх надзвичайній чутливості до параметрів турбулентності на зовнішній межі зсувної течії, які формалізуються відповідними межовими умовами [11, 12], що не є притаманним $k-\epsilon$ моделям. Наведена інформація щодо $k-\omega$ та $k-\epsilon$ напрямків моделювання турбулентності дозволяє підсумувати, що ці моделі, хоч і відносяться до одного класу моделей з двома диференціальними рівняннями переносу, згідно відмінностям структури демонструють протилежні властивості. Так, $k-\omega$ модель є добре адаптованою поблизу обтічної поверхні, тобто у внутрішній області примезового шару, тоді як коректний розрахунок динаміки великомасштабної турбулентності пов'язаний зі складностями й додатковими зусиллями. Напроти, $k-\epsilon$ модель демонструє ефективність і невибагливість при моделюванні властивостей зовнішньої області, зумовлених переважно рухом великомасштабних турбулентних структур, а поблизу обтічної поверхні

ця модель втрачає фізичну обґрунтованість, а, отже, і надійність. З метою подолання неуніверсальності $k-\omega$ та $k-\epsilon$ напрямків моделювання турбулентності Ментером [13–15] було здійснено вдалу спробу їх об'єднання на основі локалізації використання кожної з них. Цей підхід отримав назву зонального принципу моделювання. Так, $k-\omega$ модель в її оригінальному вигляді використовувалася поблизу стінки, тоді як у зовнішній області застосовується $k-\epsilon$ модель, переформульована у термінах k та ω . Лапін [13], передбачаючи перспективність гібридного принципу побудови моделей турбулентності, пояснив причини успішності моделі Ментера саме структурними особливостями її будови: “Висока ефективність цієї, по суті гібридної моделі, не у останню чергу пов'язана із використанням у внутрішній (пристінній) області $k-\omega$ моделі, початково орієнтованої на опис дрібномасштабної турбулентності, а у зовнішній області – $k-\epsilon$ моделі турбулентності, спрямованої на відтворення динаміки великомасштабних когерентних структур. Заради справедливості зазначимо услід за Шалаєвим [16], що ще раніше у роботах Мовчана [17, 18] був напрацьований зональний підхід. Однак, на відміну від Ментера, який при розбудові зонального підходу застосував у різних областях пристінної течії різні диференціальні моделі, Мовчан у пристінній області застосував власну алгебраїчну базову модель, а у зовнішній області послідовно спочатку $k-1$, а за тим $k-\epsilon$ моделі коефіцієнта турбулентності в'язкості. Пізніше Шквар [19] при моделюванні турбулентних пристінних струменів у зовнішній частині пристінної області, а також у струменевій і слідній областях успішно використав диференціальну $k-\epsilon$ модель турбулентності, продемонструвавши перевагу і більшу універсальність застосування для цього типу течії диференціальних моделей, оскільки останні значно краще адаптовані до відтворення великомасштабної турбулентності. У результаті проведення масштабного комплексу досліджень можливостей математичного моделювання ряду засобів управління турбулентними примезовими шарами, у тому числі у різноманітних випадках комбінованих впливів, тобто одночасної дії кількох керувальних засобів [20, 21]. Одночасно варто зазначити і наявність традиційних недоліків, притаманних диференціальним моделям. Так, спираючись на власні дослідження щодо застосовності більшості математичних моделей, Гарбарук [22] дійшов висновку, який повністю підтверджує відомий з наукової літератури факт нездатності моделей типу $k-\epsilon$ із необхідною для практики точністю передбачати процес розвитку примезових шарів при значних несприятливих градієнтах тиску. Так само цей

висновок відноситься й до алгебраїчних моделей рейнольдсових напружень, в основу яких покладено $k-\epsilon$ підхід. Завадою для значного розповсюдження гібридних алгебро-диференціальних моделей за думкою ряду авторів є відсутність визначення меж між областями, у яких використовуються різні алгебраїчні моделі, а отже і відсутність граничних умов на межах між областями для турбулентних характеристик [23]. Ці зауваження можна легко зняти, якщо застосовувати для пристінної області алгебраїчну модель Мовчана [24, 25]. Так само, на нашу думку, можна вирішити й проблему алгебраїчних моделей рейнольдсових напружень на основі $k-\epsilon$ підходу, створивши гібридну модель: у пристінній області, чи можливо в її частині, використати алгебраїчну модель коефіцієнта турбулентної в'язкості, а у зовнішній області алгебраїчну модель рейнольдсових напружень (АМРН). Запорукою успіху такого підходу є виконане Шкваром [26] узагальнення алгебраїчної моделі [25] з використанням АМРН на просторовий випадок турбулентного обтікання ковзного крила.

Побудова ієрархії моделей турбулентності

Основою напівемпіричного моделювання турбулентності є рівняння Рейнольдса, доповнені гіпотезою Буссінеска, які для нестисливої течії у декартовій системі координат x_i записуються так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i U_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{2}{3} k \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (1) \\ \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0, \end{aligned}$$

де U_i – осереднені компоненти вектора швидкості,
 v – коефіцієнт кінематичної в'язкості,
 v_t – коефіцієнт кінематичної турбулентної в'язкості,
 p – осереднений тиск,
 ρ – густина.

Оскільки система (1) не замкнена, то її необхідно доповнити підходящими гіпотезами, які дозволять визначити k та v_t . При цьому моделі, які їх описують, мають бути відносно простими, що є особливо важливим при розрахунках складних просторових течій. Разом із тим вони повинні бути справедливими як для частини течії з повністю розвинутою турбулентністю, де можна знехтувати в'язкістю, так і для іншої частини течії, а саме у в'язкому й буферному прошарках.

Допоміжні моделі турбулентності. Звернемося спочатку до побудови гібридної об'єднаної моделі, яка в пристінній області є алгебраїчною, а у зовнішній – диференціальною. Ще у першій половині сімдесятих років минулого століття Мовчаном на основі відомої структури примежового шару була запропонована двошарова алгебраїчна модель, яка поєднувала за допомогою гіперболічного тангенса дві різні моделі для зовнішньої та пристінної областей [24]. Модель у процесі досліджень як у роботах її автора [25], так і його учнів та послідовників розвивалася та доповнювалась додатковими деталями з метою застосування її при розв'язуванні багатьох проблем турбулентних течій [27]. На сьогодні її беззаперечно можна вважати одним з найрозвиненіших серед існуючих напівемпіричних описів турбулентного руху алгебраїчного рівня. Дана модель може бути подана наступним сімейством співвідношень.

Базова модель

$$v_t = v_{t \text{ out}} \text{th} \frac{v_{t \text{ in}}}{v_{t \text{ out}}}. \quad (2)$$

Алгебраїчна модель

$$v_t = \gamma v_{t \text{ out}} \text{th} \frac{v_{t \text{ in}}}{v_{t \text{ out}}}.$$

Пристінна область алгебраїчної моделі

$$v_{t \text{ in}} = l D_m, \quad l = \kappa y \sqrt{\tau^+} v_*, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} D_m = \text{th} \left(\text{sh}^2 [\kappa_0 y^+ (1 + \kappa_3 |y^+ - 30|) \sqrt{\tau^+}] \times \right. \\ \left. \times \text{th} [\text{sh}^2 (\kappa_2 y^+ \sqrt{\tau^+}) / (\kappa y^+ \sqrt{\tau^+})] \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Зовнішня область

$$v_{t \text{ out}} = \chi U_H \delta^* \quad (5)$$

Тут $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa, \chi$ – модельні коефіцієнти,

$y^+ = y v_* / \nu$ – нормальна до обтічної поверхні координата y , збезрозмірена згідно закону стінки,

$v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамічна швидкість, $\tau^+ = \tau / \tau_w$ – збезрозмірене напруження тертя за його значенням на поверхні τ_w , що визначається залежно від

параметру градієнта тиску $p^+ = \frac{v}{\rho v_*^3} \frac{dp}{dx}$ наступним

$$\text{чином: } \tau^+ = \begin{cases} 1 + p^+ y^+ & \text{при } p^+ \geq 0, \\ (1 - p^+ y^+)^{-1} & \text{при } p^+ < 0; \end{cases}$$

$\gamma = \sqrt{1 - \bar{y}}$ – функція врахування переміжності турбулентної течії, $\bar{y} = y / \delta$ – нормальна до обтічної поверхні координата y , збезрозмірена за товщиною зсувної течії δ ,

U_H – швидкість на зовнішній межі примежового

шару,

δ^* – інтегральна товщина витіснення.

Лінеаризація аргументу функції $\text{sh}^2[\kappa_0 y^+ \sqrt{\tau^+} (1 + \kappa_3 |y^+ - 30|)]$ надала можливість отримати спрощений варіант демпферної функції

$$D_m = \text{th} \frac{\text{sh}^2(\kappa_1 y^+ \sqrt{\tau^+}) \text{th}[\text{sh}^2(\kappa_2 y^+ \sqrt{\tau^+})]}{\kappa y^+ \sqrt{\tau^+}}, \quad (6)$$

що дозволило знайти аналітичні розподіли швидкості для в'язкого й перехідного прошарків. При розбудові гібридних моделей [19-21] у пристінній області використовуємо формули (3) та (6), а у зовнішній області – диференціальну $k-\varepsilon$ модель

$$v_{\text{tout}} = C_1 \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (7)$$

де C_1 – модельний коефіцієнт.

При оцінці можливостей двопараметричних диференціальних моделей необхідно пам'ятати, що указані моделі, як правило, спочатку напрацьовувались для вільних течій, а потім почали переноситись на пристінні течії без необхідного урахування процесів переносу та структури течії у пристінній області. Використання пристінних функцій чи емпіричних залежностей, що враховують вплив локального числа Рейнольдса, не базується на урахуванні реальних змін структури турбулентних потоків. Так, наприклад, використання пристінних функцій, що засновані на класичному логарифмічному законі, має підставу для застосування тільки при незначних перепадах тиску. Тим більше, вказаний прийом не можна вважати прийнятним у передвідривній області, оскільки логарифмічний закон у ній не виконується. Тому пошуки математичних моделей з можливостями отримання розрахунків течій при значних несприятливих градієнтах тиску з можливим відривом стали стимулом до напрацювання гібридних моделей. Необхідні умови для розбудови задекларованої моделі на межі, яка розділяє застосування різних моделей, можна отримати з наближених розв'язків, якщо вони відомі. Мовчаном були знайдені наближені аналітичні розв'язки для кінетичної енергії турбулентності k та швидкості її дисипації ε у в'язкому та перехідному прошарках. Оскільки справедливості логарифмічного закону рівносильна достовірності наступних виразів $v_t \frac{\partial U}{\partial y} = v_*$,

$v_t = \kappa v_*$, а породження турбулентності $-\overline{u'v'} = v_t \frac{\partial U}{\partial y}$ урівноважує швидкість її дисипації

$\varepsilon = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y}$, то $\varepsilon = v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$ або $\varepsilon = v_*^2 \frac{\partial U}{\partial y}$. За-

стосувавши отримане й формулу (7), знаходимо

$k^2 = v_t \frac{v_*^2}{C_1} \frac{\partial U}{\partial y}$. З наведеного у логарифмічному прошарку для безградієнтної течії маємо $\varepsilon = v_*^3 / (\kappa y)$, $k = v_*^2 / \sqrt{C_1}$.

Рівняння переносу кінетичної енергії, запропоноване Чженом [23], яке є справедливим як у шарі розвинутої турбулентності, так і у в'язкому й буферному прошарках, записується так:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(k U_j - v_\Sigma \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) = G - \varepsilon - \frac{2k v}{y^2}, \quad (8)$$

де $G = v_t S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$, $S_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$, $v_\Sigma = v + v_t$.

Тому резонно припустити, що вираз для k^2 є застосовним і у перехідному й в'язкому прошарках, та, використавши ще формулу Ренні для розподілу швидкості $U^+ = \text{th}(\kappa_1 y^+) / \kappa_1$ і формулу для коефіцієнта турбулентної в'язкості із алгебраїчної моделі $v_t = v \text{sh}^2(\kappa_1 y^+) \text{th}[\text{sh}^2(\kappa_2 y^+)]$, отримуємо

$$\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{v_*^4}{v} \frac{\text{th}^2(\kappa_1 y^+)}{\text{ch}^2(\kappa_1 y^+)} \text{th}[\text{sh}^2(\kappa_2 y^+)],$$

$$k = \frac{v_*^2}{\sqrt{C_1}} \text{th}(\kappa_1 y^+) \sqrt{\text{th}[\text{sh}^2(\kappa_2 y^+)]}.$$

Запропоновано задавати дисипативний член як суму двох доданків так, щоб перший з них надавав основний внесок поблизу стінки, а другий удалині:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \alpha_1 \frac{\kappa v}{L^2} + \alpha_2 \frac{k^{3/2}}{L},$$

де L – лінійний масштаб турбулентності, α_1, α_2 – сталі, $\varepsilon_1 = \alpha_1 \kappa v / y^2$ – поправка для урівноваження молекулярної дифузії, $\varepsilon_2 = \alpha_2 k^{3/2} / L$ – ізотропна дисипація.

Для градієнтних пристінних течій наведені формули подаються наступним чином: $k = v_*^2 \tau^+ / \sqrt{C_1}$,

$\varepsilon = (v_* \sqrt{\tau^+})^3 / (\kappa y)$ – у логарифмічному прошарку;

$$k = \frac{v_*^2 \tau^+}{\sqrt{C_1}} \text{th}(\kappa_1 y^+ \sqrt{\tau^+}) \text{th}^{1/2}[\text{sh}^2(\kappa_2 y^+ \sqrt{\tau^+})],$$

$$\varepsilon = \frac{(v_*^2 \tau^+)^2}{v} \frac{\text{th}^2(\kappa_1 y^+ \sqrt{\tau^+})}{\text{ch}^2(\kappa_1 y^+ \sqrt{\tau^+})} \text{th}[\text{sh}^2(\kappa_2 y^+ \sqrt{\tau^+})] + \varepsilon_1$$

у в'язкому і буферному прошарках.

Деяке коригування та уточнення отриманих вище формул для розподілів кінетичної енергії турбулентності, швидкості її дисипації та рейнольдсового напруження дозволило отримати наступне. У

в'язкому і буферному прошарках:

$$\bar{k} = \frac{k}{\nu_*^2 \tau^+} = \frac{1}{C_0} \text{th}(\kappa_1 y^+ \sqrt{\tau^+}) \sqrt{\text{th}[\text{sh}^2(\kappa_2 y^+ \sqrt{\tau^+})]}, \quad (9)$$

$$C_0 = 0,16[1 + \text{th}(0,13 y^+ \sqrt{\tau^+})], \quad k^+ = \frac{y \sqrt{k}}{\nu}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon \nu}{\nu_*^4 \tau^{+2}} = \frac{\text{sh}^2 \kappa_{11} \sqrt{k^+}}{\text{ch}^4 \kappa_{11} \sqrt{k^+}} \text{th}[\text{sh}^2(\kappa_{22} \sqrt{k^+})] + D_\varepsilon, \quad (10)$$

$$D_\varepsilon = 0,0316 \frac{\bar{k} D_0}{k^+}, \quad D_0 = 1 - \text{th} \left[\frac{\sqrt{k^+} (\sqrt{k^+} - 4,3)}{2} \right], \quad (11)$$

а у логарифмічному прошарку:

$$\bar{k} \cong 1/C_0, \quad \bar{\tau} \cong 1, \quad \bar{\varepsilon} = 1/(\kappa_{01} k^+), \quad (12)$$

де κ_{11}, κ_{21} – модельні коефіцієнти.

На рис. 1-3 показано порівняння розрахунків за наведеними вище формулами з експериментами ряду авторів для пристінної області. Як слідує з наведених результатів, порівняння підтвердили достовірність отриманих наближень для кінетичної енергії турбулентності k , швидкості її дисипації ε та напруження тертя τ у пристінній області.

Отримані дискретні наближення для основних характеристик у в'язкому, буферному та логарифмічному прошарках дозволили запропонувати наступну однопараметричну диференціальну модель для k у пристінній області [28], доповнену алгебраїчною моделлю для ε

$$\bar{v}_{t \text{ in}} = \kappa_{01} k^+ \nu D_m, \quad (13)$$

$$D_m = \text{th} \frac{\text{sh}^2(\kappa_{11} \sqrt{k^+}) \text{th}[\text{sh}^2(\kappa_{21} \sqrt{k^+})]}{\kappa_{01} k^+},$$

$$\bar{\varepsilon} = \max(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2), \quad \hat{\varepsilon}_2 = (\kappa_{01} k^+)^{-1},$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \frac{\text{th}^2(\kappa_{11} \sqrt{k^+})}{\text{ch}^2(\kappa_{11} \sqrt{k^+})} \text{th}[\text{sh}^2(\kappa_{22} \sqrt{k^+})] + D_\varepsilon,$$

$$D_\varepsilon = 0,0316 \frac{\bar{k} D_0}{k^+}, \quad D_0 = 1 - \text{th} \left[0,5 \sqrt{k^+} (\sqrt{k^+} - 4,3) \right],$$

де κ_{01}, κ_{22} – модельні коефіцієнти.

Співставлення результатів розрахунків за запропонованою моделлю турбулентної в'язкості (13) з розрахунками за іншими алгебраїчними модельними представленнями та експериментальними даними ряду авторів для пристінної області, представлені на рис. 4, свідчать про несуперечливість запропонованої залежності $\bar{v}_t(y^+)$ як по відношенню до розрахунків за відомими алгебраїчними формулами, так і до класичних експериментальних даних.

У зовнішній області використовується диференціальна $k-\varepsilon$ модель (7) при $C_1 = 0,09$, у якій ε

знаходиться із рівняння переносу для розвинутої турбулентності

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon U_j - \nu_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k},$$

де $\nu_\varepsilon = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$.

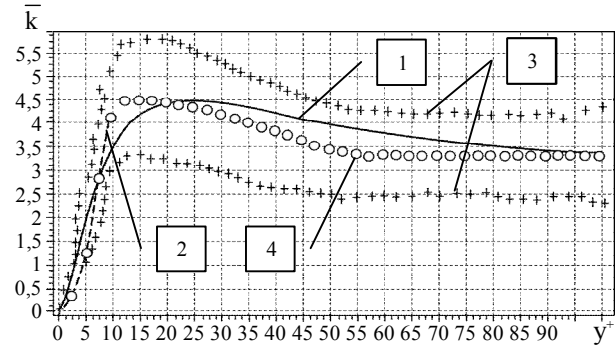


Рис. 1. Залежність $\bar{k}(y^+)$ в околі стінки:

1 – розрахунок за (9); 2 – апроксимація

$\bar{k} = 0,05(y^+)^2$; 3, 4 – експериментальні дані

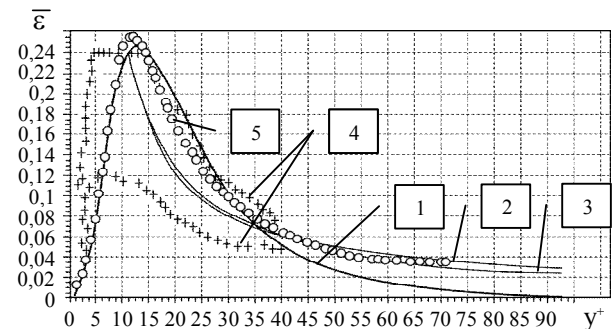


Рис. 2. Залежність $\bar{\varepsilon}(y^+)$ в околі стінки:

1 – розрахунок за (10); 2 – апроксимація

$\bar{\varepsilon} = 1/(\kappa_{01} k^+)$; 3 – апроксимація $\bar{\varepsilon} = 1/(\kappa y^+)$;

4, 5 – експериментальні дані

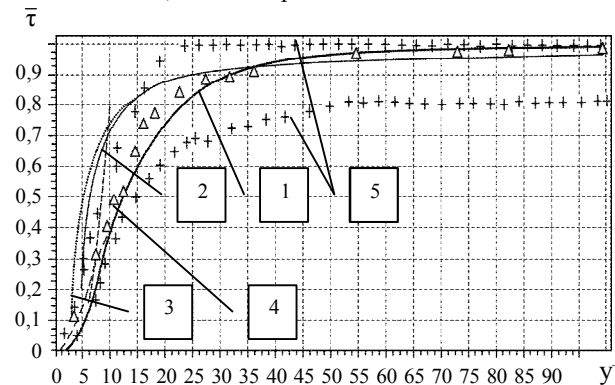


Рис. 3. Залежність $\bar{\tau}(y^+)$ в околі стінки: 1 – розра-

хунок за (11); 2 – апроксимація $\bar{\tau} = 1 - 1/(k_0 y^+)$;

3 – апроксимація $\bar{\tau} = 1 - 1/(\kappa_{01} k^+)$;

4, 5 – експериментальні дані

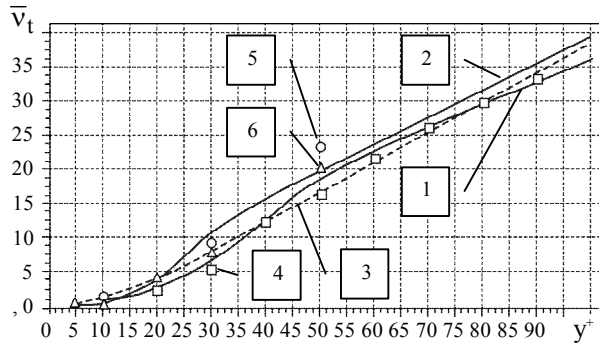


Рис. 4. Залежність $\bar{v}_t(y^+)$ в околі стінки:

1 – розрахунок за (13); 2 – розрахунок за алгебраїчною моделлю Мовчана (3, 6); 3 – розрахунок за формулою Ван-Дріста; 4, 5, 6 – експериментальні дані

Отже, тепер для проведення розрахунків застосовуємо базову загальну модель (2) та систему (1).

Розроблена модель тестувалася розрахунками турбулентного пристінного струменя, цікавого як модельний тестовий випадок, що характеризується немонотонністю профілів швидкості та інших визначальних характеристик. На рис. 5-7 наведені результати співставлення розрахунків та експериментальних даних по розподілах осереднених швидкості $U(y)/U_H$, поздовжньої складової пульсаційної швидкості $\sqrt{u'^2}/U_H$ та турбулентного напруження

тертя $-\overline{u'v'}(y)/U_H^2$ в турбулентному пристінному струмені, що формується на поперечно профільованій поверхні [19]. Оребрення було здійснене квадратними борозенками розмірами 1x1 мм. Кола зображають відповідні експериментальні дані для гладкої поверхні. Рис. 8 демонструє результати розрахунків локального коефіцієнту тертя $C_f = 2\tau_w/(\rho U_H^2)$ вздовж напрямку розвитку пристінного струменя для гладкої, поздовжньо та поперечно профільованих поверхонь. Рис. 9, 10 ілюструють результати розрахунків профілів $U(y)/U_H$ та $\sqrt{u'^2}/U_H$ в примежовому шарі на циліндричному тілі обертання за тандемом пристроїв руйнування великих вихорів (ПРВВ), дослідженого експериментально [29].

Як слідує з наведених зіставлень, усі наявні визначальні характеристики як пристінного струменя, так і примежового шару за ПРВВ, отримані експериментальним шляхом, були відтворені числовими розрахунками на основі гібридної моделі турбулентної в'язкості з належною точністю.

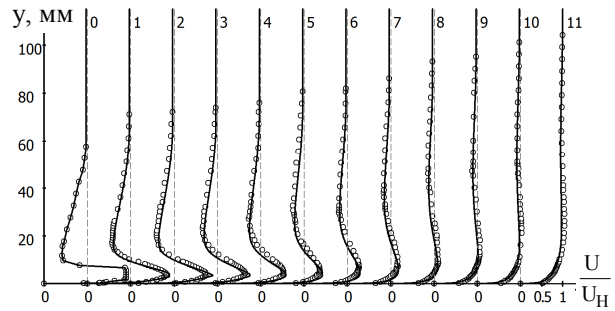


Рис. 5. Профілі поздовжньої осередненої швидкості $U(y)/U_H$ в пристінному струмені на профільованій у поперечному напрямку поверхні (повітря, $U_H = 22$ м/с). Відстані від зрізу сопла до перерізів, у яких проводилися вимірювання та розрахунки профілів, вздовж поздовжньої координати Δx , мм: 0 - 0, 1 - 50, 2 - 68,0, 3 - 92,5, 4 - 126, 5 - 171, 6 - 233, 7 - 316, 8 - 430, 9 - 585, 10 - 796, 11 - 1082. Лінії – розрахунки, кола – експеримент [19]

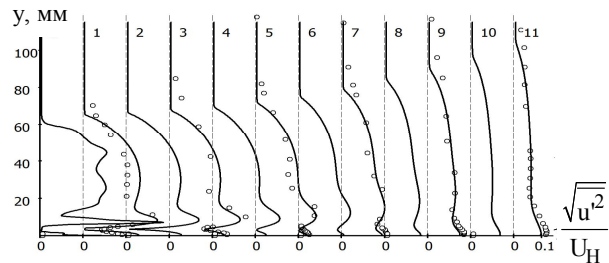


Рис. 6. Профілі пульсаційної швидкості

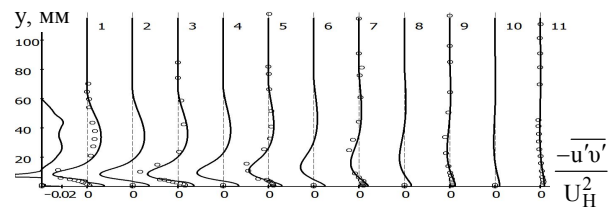


Рис. 7. Профілі турбулентного напруження тертя

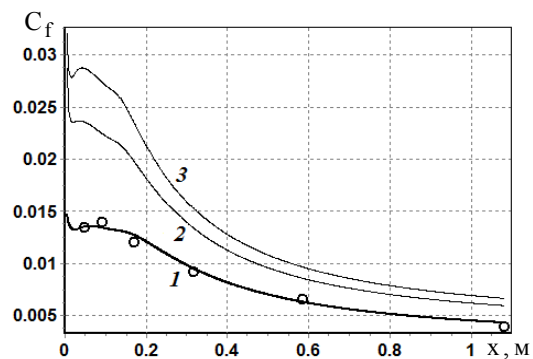


Рис. 8. Розподіли обчисленого локального коефіцієнту тертя $C_f(x)$ в пристінному струмені: 1 – гладка поверхня; 2 – поперечно оребрена поверхня; 3 – поздовжньо оребрена поверхня; кола – експериментальні дані для гладкої поверхні [19]

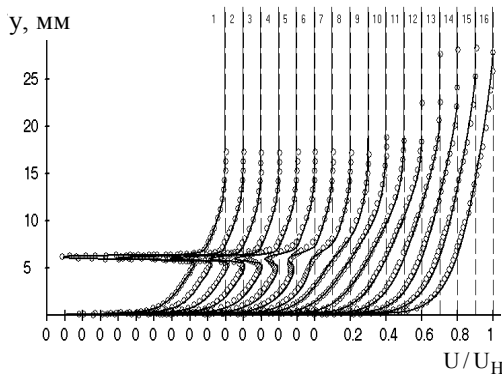


Рис. 9. Профілі поздовжньої осередненої швидкості $U(y)/U_H$ в примежовому шарі на циліндричному тілі діаметром 100 мм за ПРВВ у вигляді утворених з тонких пластин кілець (повітря, $U_H = 25$ м/с). Відстані від зрізу сопла до перерізів, у яких проводилися вимірювання та розрахунки профілів, вздовж поздовжньої координати Δx , мм: 0,000738 (1); 0,00288 (2); 0,00565 (3); 0,00935 (4); 0,0121 (5); 0,0214 (6); 0,0307 (7); 0,0584 (8); 0,151 (9); 0,244 (10); 0,336 (11); 0,429 (12); 0,614 (13); 0,8 (14); 0,984 (15); 1,17 (16). Лінії – розрахунки, кола – експериментальні дані [29]

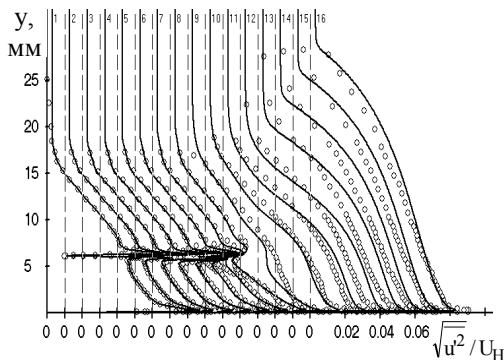


Рис. 10. Профілі пульсаційної швидкості

Заключення

Запропоновано підхід до вирішення проблеми побудови гібридної алгебро-диференціальної двопараметричної моделі, яка відтворює перевагу в пристінній області алгебраїчної моделі, а в зовнішній області – двопараметричної диференціальної $k-\epsilon$ моделі коефіцієнта турбулентної в'язкості.

При вирішенні поставленої проблеми була розв'язана задача одержання аналітичних залежностей напівемпіричного характеру для кінетичної енергії k й її дисипації ϵ , чи не вперше, для пристінної області, починаючи від обтічної поверхні.

Виконане тестування шляхом зіставлення отриманих аналітичних залежностей для кінетичної енергії турбулентності k , швидкості її дисипації ϵ , коефіцієнта турбулентної в'язкості ν_t й турбулентного напруження τ з іншими відомими апроксимаціями та експериментальними результатами

(рис. 1-4) довело наявність як якісної, так і кількісної відповідності між ними.

Окрім цього вказаний підхід надав можливість створити ще одну гібридну модель, що об'єднує однопараметричну диференціальну модель для кінетичної енергії k , доповнену аналітичною напівемпіричною моделлю для ϵ у пристінній області, з $k-\epsilon$ моделлю в зовнішній області.

Література

1. Douglas, C. Chu. A direct numerical simulation of laminar and turbulent flow over riblet-mounted surfaces [Text]/ C. Chu Douglas, George Em. Karniadakis // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1993. – № 250. – P. 1–42.
2. El-Samni, O.A. Drag reduction of turbulent flow over thin rectangular riblets [Text]/ O.A. El-Samni, H.H. Chun, H.S. Yoon // *International Journal of Engineering Science*. – February–August 2007. – Volume 45, Issues 2–8. – P. 436–454.
3. Goldstein, D. Direct numerical simulation of turbulent flow over a modelled riblet covered surface [Text]/ D. Goldstein, R. Handler, L. Sirovich // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1995. – Vol. 302. – P. 333–376.
4. Choi, Haecheon. Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets [Text]/ Haecheon Choi, Parviz Moin, John Kim // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1993. – № 255. – P. 503–539.
5. Moin, P. Tackling Turbulence with Supercomputers [Text]/ P. Moin, J. Kim // *Scientific American*. – 1997. – № 276. – P. 62–68.
6. Солотов, В.Г. Моделирование турбулентных течений. Расчет больших вихрей [Текст]/ В.Г. Солотов. – X.: ХНАДУ. – 2011. – 211 с.
7. Wilcox, D.C. A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-shear flows [Text]/ D.C. Wilcox // *AIAA Paper*. – 1993, AIAA-93-2905.
8. Spalart, P.R. Strategies for turbulence modeling and simulations [Text]/ P.R. Spalart // *4-th International Symposium on Engineering Turbulence Modeling and Measurements*. FRANTOUT&CCAS, Porticcio Ajaccio, (Corsica, France, May 24-26, 1999).
9. Chappmann, D. Computational aerodynamics, development and outlook [Text] / D. Chappmann // *AIAA J.* – 1979. – V. 17. – P. 1293–1313.
10. Метод моделирования отсоединенных вихрей для расчета отрывных турбулентных течений: предпосылки, основная идея и примеры применения [Текст]/ М.Х. Стрелец, А.К. Травин, М.Л. Шур, Ф.Р. Спаларт // *Научно-технические ведомости*. – 2004. – № 2. – С. 1–27.
11. Wilcox, D.C. Comparison of two-equation turbulence model for boundary layers with pressure gradient [Text]/ D.C. Wilcox // *AIAA Journal*. – 1993. – V. 31, №8. – P. 1414–1421.
12. Wilcox, D.C. A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-shear flows [Text]/ D.C. Wilcox // *AIAA Paper*. – 1993, AIAA-93-2905.
13. Menter, F.R. Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows [Text]/ F.R. Menter // *AIAA Paper*. – 1993, AIAA-93-2906.
14. Menter, F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications [Text]/ F.R. Menter // *AIAA Journal*. – August 1994. – Vol. 32, №8. – P. 1598–1605.
15. Menter, F.R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model [Text]/ F.R. Menter, M. Kuntz, R. Langtry // *Turbulence, Heat and Mass Transfer*; 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers. – Begell House, Inc. – 2003. – P. 625–632.
16. Шалаев, В.И. Применение аналитических методов в современной аэромеханике. Часть I. Теория пограничного слоя [Текст]/ В. И. Шалаев. – М.: МФТИ, 2010. – 300 с.
17. Мовчан, В.Т. К построению непрерывной

алгебраической модели коэффициента турбулентной вязкости [Текст] / В.Т. Мовчан // Бионика. – 1986. – Вып. 20. – С. 58–60.

18. Мовчан, В.Т. О коэффициенте турбулентной вязкости в двухпараметрической $k - \epsilon$ модели [Текст] / В.Т. Мовчан // Бионика. – 1985. – Вып. 19. – С. 80–82.

19. Шквар, Є.О. Фізичне та математичне моделювання напівобмежених турбулентних струменевих течій на оребрених поверхнях [Текст] / Є.О. Шквар, Т.В. Козлова, А.О. Бондарець // Промислова гідраліка і пневматика. – 2011. – №1(31). – С. 35–41.

20. Шквар, Є.О. Технології управління турбулентним обтіканням поверхонь транспортних засобів – ефективний резерв заощадження пального та зменшення забруднення атмосфери [Електронний ресурс] / Є.О. Шквар, Т.В. Козлова, А.О. Бондарець // Енергетика і автоматика. – 2010. – №4 (6). – Режим доступу: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/ieia/2010_4/index.htm. – 30.06.2012 р.

21. Шквар, Є.О. Математичне моделювання турбулентних пристінних течій, модифікованих пристроями руйнування великих вихорів [Текст] / Є.О. Шквар // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних сил. – Харків: ХУПС. – 2010. – Вип. 1 (23). – С. 170–177.

22. Гарбарук, А.В. Современные полуэмпирические модели турбулентности для пристенных течений: тестирование и сравнительный анализ [Текст] / автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 // Гарбарук Андрей Викторович; СПбГТУ. – СПб., 1999. – 14 с.

23. Кузьминов, А.В. Метод расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости на основе

двухслойной $k - \epsilon$ модели [Текст] / А.В. Кузьминов, В.Н. Лапин, С.Г. Черный // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6, № 5. – С. 73–86.

24. Мовчан, В.Т. Приближенный метод вычисления профилей напряжения трения и скоростей в турбулентном потоке с положительным градиентом давления [Текст] // Тезисы доклада III Всесоюзной НТК по прикладной аэродинамике. – К., 1973. – С. 115. // Гидромеханика. – К., 1975. – Вып. 26. – С. 25–28.

25. Мовчан, В.Т. Приближенно-аналитическое исследование турбулентного пограничного слоя [Текст] / В.Т. Мовчан // ПМТФ. – 1982. – № 3. – С. 102–111.

26. Мхитарян, А.М. Математическое и численное моделирование турбулентного пограничного слоя на скользящем крыле [Текст] / А.М. Мхитарян, В.Т. Мовчан, Е.А. Шквар // Прикладная аэродинамика: сб. науч. трудов. – К.: КИИГА. – 1993. – С. 3–16.

27. Алгебраические модели турбулентной вязкости и теплопроводности в расчетах пристенных турбулентных течений [Текст] / М. Лунис, В.И. Мамчук, В.Т. Мовчан, Л.А. Романюк, Е.А. Шквар // Прикладна гідромеханіка. – К.: ІГМ. – 2001. – Т. 3 (75), №1. – С. 37–45.

28. Мовчан, В.Т. Різновіневі математичні моделі коефіцієнта турбулентної в'язкості [Текст] / В.Т. Мовчан, Є.О. Шквар // Прикладна гідромеханіка. – 2010. – Т. 12, №1. – С. 55–67.

29. Горшков, В.Г. Влияние устройств разрушения крупных вихрей на характеристики турбулентного пограничного слоя на теле вращения [Текст] / В.Г. Горшков, В.И. Корнилов. – Новосибирск: ИТПМ, 2003. – Препринт № 4. – 42 с.

Надійшла до редакції 30.06.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф., гл.н.с. каф. аерогідродинаміки Ю.О. Крашаниця, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є.Жуковського «ХАІ», Харків.

АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ ПРИСТЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

В.Т. Мовчан, Е.А. Шквар, Т.В. Козлова

Приведены разработанные достаточно простые и универсальные алгебро-дифференциальные модели коэффициента турбулентной вязкости, которые способны учитывать основные физические особенности сдвиговых пристенных течений. Предложенный подход предусматривает использование алгебраической модели турбулентной вязкости в пристеночной области и дифференциальной модели во внешней области с их соответствующим сращиванием. В качестве дифференциальной модели на данном этапе исследований использована двухпараметрическая $k - \epsilon$ модель, хотя возможности этого подхода значительно шире. Кроме того, предложена гибридная модель, составленная из однопараметрической дифференциальной k модели, дополненной полученной полуэмпирической зависимостью для ϵ в пристеночной области и опять же $k - \epsilon$ модели – во внешней области. Проведенное тестирование подтвердило действенность предложенного направления разработки полуэмпирического моделирования турбулентности, а также его преимущества и перспективность по отношению к возможностям чисто алгебраического и дифференциального подходов.

Ключевые слова: турбулентность, турбулентная вязкость, алгебраические, дифференциальные и гибридные модели турбулентности, сдвиговое течение, пограничный слой.

ALGEBRAICALLY-DIFFERENTIAL MODELS OF TURBULENT VISCOSITY COEFFICIENT FOR SHEAR FLOWS

V.T. Movchan, Ye.O. Shkvar, T.V. Kozlova

The simple enough and universal algebraically-differential models of turbulent viscosity coefficient, which are able to take into account the principal physical features of near-wall shear flows, are proposed. The proposed approach involves the use of an algebraic model of turbulent viscosity in the near-wall region together with the differential model in an external region with their corresponding jointing. As a differential model the two-equation $k - \epsilon$ one is used at this stage of the research, although the possibilities of this approach are much wider. In addition, the hybrid model is proposed that consists of a one-equation differential k model together with developed semi-empirical dependence for ϵ in the near-wall region and the mentioned above $k - \epsilon$ model – in the outer region. Testing confirmed the effectiveness of the proposed direction of semi-empirical turbulence model development as well as its advantages and perspectives regarding the possibilities of purely algebraic and differential approaches.

Key words: turbulence, turbulent viscosity, algebraic, differential and hybrid models of turbulence, shear flow, boundary layer.

Мовчан Володимир Тимофійович – д-р фіз.-мат. наук, проф., п.н.с. каф. авіаційних двигунів, Національний авіаційний університет, Київ, Україна, e-mail: mov-vt@ukr.net.

Шквар Євгеній Олексійович – д-р техн. наук, доц., проф. каф. вищої та обчислювальної математики, Національний авіаційний університет, Київ, Україна, e-mail: eush@ukr.net.

Козлова Тетяна Володимирівна – канд. техн. наук, доцент кафедри землевпорядних технологій, Національний авіаційний університет, Київ, Україна, e-mail: t_kozlova@ukr.net.