

УДК 539.376

П.В. ФЕРНАТИ, Я.В. ПАВЛЮК, В.С. РАГУЛИНА

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЯДЕР ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ

Экспериментально апробирован метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной модели вязкоупругости с независимой от времени нелинейностью. Параметры ядер определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер, которые получены исходя из условия подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования. Дискретные значения ядер в области сингулярности учитываются с помощью весовых функций. В качестве ядра наследственности используется дробно-экспоненциальная функция. Апробация выполнена на задачах расчета деформаций при ступенчатой догрузке, полной разгрузке и релаксации напряжений вязкоупругих и вязкопластичных материалов.

**Ключевые слова:** нелинейная вязкоупругость, вязкопластичность, параметры ядер наследственности, деформация ползучести, релаксация напряжений, функция подобия, весовая функция.

### Введение

Практическое использование механических моделей для решения прикладных задач невозможно без достоверной методики определения параметров, входящих в определяющие уравнения. Для наследственных моделей вязкоупругости эти параметры, как правило, входят в структуру ядер наследственности и определяются по результатам обработки простых легковоспроизводимых экспериментов.

Рассмотренный в данной работе метод предполагает определение параметров ядер наследственности нелинейной модели вязкоупругости, предложенной в [1], путем обработки экспериментальных данных опытов на одноосную ползучесть при стационарных режимах нагружения и кратковременное деформирование.

Целью работы является экспериментальная апробация предложенного в [2] метода определения параметров ядер ползучести и релаксации на задачах расчета деформации и напряжений при нестационарных режимах одноосного нагружения и деформирования.

### 1. Постановка задачи исследования

Рассмотренный в работе метод разработан для нелинейно-вязкоупругопластических материалов, зависимость между деформациями, напряжениями и временем для которых задается в виде [1]

$$\varphi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (1)$$

или решенное относительно  $\sigma(t)$  в виде

$$\sigma(t) = \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau)\varphi_0(\varepsilon(\tau))d\tau. \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon(\cdot)$  – полная деформация, включающая упругую компоненту  $\varepsilon_e$ , пластическую компоненту  $\varepsilon_p$  и деформацию ползучести  $\varepsilon_c$  в моменты времени  $t$  и  $\tau$ ;  $\sigma(\cdot)$  – функция, задающая программу нагружения;  $\varphi_0(\cdot)$  – функция, задающая реальную диаграмму мгновенного деформирования;  $K(t-\tau)$  – ядро ползучести;  $R(t-\tau)$  – ядро релаксации;  $\lambda$  – реологический параметр ( $\lambda > 0$ );  $t$  – время наблюдения;  $\tau$  – время, предшествующее моменту наблюдения.

Определяющие уравнения нелинейной модели вязкоупругости (1), (2) построены исходя из условия существования единой изохронной диаграммы деформирования, которая отражает подобие изохронных диаграмм ползучести  $\varphi_t(\varepsilon)$  и диаграммы мгновенного деформирования  $\varphi_0(\varepsilon)$ . Функция  $\varphi_0(\cdot)$  и ее обращение  $\varphi_0^{-1}$  задаются в виде сглаживающих кубических сплайнов [3], коэффициенты которых определяются в результате аппроксимации экспериментальной диаграммы мгновенного деформирования.

В качестве ядра наследственности может быть использована любая из функций, предложенная в [4, 5]. В данной работе ядро ползучести задается в виде дробно-экспоненциальной функции [5]

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}, \quad (3)$$

а ядро релаксации - в виде ее резольвенты

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}, \quad (4)$$

где  $\alpha, \beta, \lambda$  – параметры, определяемые из базовых экспериментальных данных с помощью рассмотренного метода. Базовые экспериментальные данные содержат реальную диаграмму мгновенного деформирования и серию кривых ползучести при нескольких уровнях постоянных напряжений.

Ядро ползучести в нелинейной модели (1) пропорционально скорости изменения функции подобия  $(1+G(t))$  изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования.

Процедурами метода определения параметров ядер наследственности предусмотрено построение осредненной функции подобия изохронных диаграмм ползучести и диаграммы мгновенного деформирования, расчет дискретных значений ядер ползучести по функции подобия и определение параметров ядер по результатам аппроксимации дискретных значений ядер аналитическим выражением ядра.

Осредненные значения функции подобия рассчитываются по формуле

$$\overline{1+G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{\varphi_0(\varepsilon_i(0), 0) \cdot \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j)\}}{\sum_{i=1}^q \{\varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j)\}^2}, \quad (5)$$

полученной из условия наилучшего согласования приведенных изохронных диаграмм и диаграммы мгновенного деформирования.

Дифференцируя численные значения функции подобия (5) по времени получаем значения ядра ползучести

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{d(1+G(t))}{dt}. \quad (6)$$

Характерный вид дискретных значений ядра ползучести  $\tilde{K}(t_j)$ , построенных согласно (6), показан схематически на рис.1 точками. Тонкой сплошной линией нанесена одна из возможных аппроксимаций дискретных значений ядра  $\tilde{K}(t_j)$ .

Параметры ядер нелинейной ползучести  $\tilde{K}(t)$  в (1), (2) могут быть определены по результатам аппроксимации дискретных значений ядер выбранным аналитическим выражением ядра. При этом необходимо учитывать тот факт, что в эксперименте при малых значениях  $t$ , меньших некоторого крити-

ческого момента времени  $t_*$ , проявляются динамические эффекты, связанные с практически мгновенным приложением нагрузки, что искажает экспериментальные значения  $\varepsilon(t_j)$  и соответственно значения функции подобия и ядра ползучести. В результате дискретные значения ядер ползучести в интервале  $\{0, t_*\}$  не будут удовлетворять условию  $\tilde{K}(0) \rightarrow \infty$ , а будут стремиться к некоторой постоянной величине (рис. 1, темные точки). Достигаемая при этом наилучшая аппроксимация дискретных значений ядра  $\tilde{K}(t_j)$ , включая и значения  $\tilde{K}(t_j)$  на интервале  $\{0, t_*\}$ , показана штрихпунктирной линией и не может считаться приемлемой.

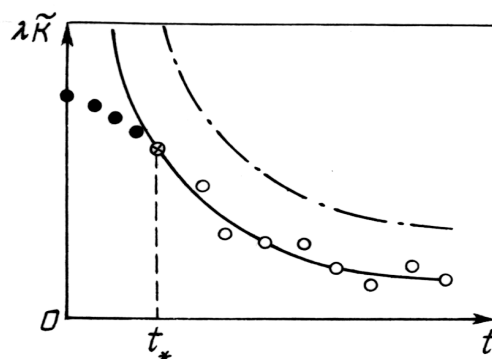


Рис. 1. Характерная зависимость от времени значений ядра ползучести

Учет дискретных значений ядер ползучести  $\tilde{K}(t_j)$  из области  $\{0, t_*\}$ , позволяющий при реализации процедуры аппроксимации удовлетворить условию  $\tilde{K}(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 0$ , осуществляется с использованием весовых функций. В этом случае задача сводится к минимизации функционала

$$F(\lambda, q_s) = \sum_{j=1}^{n_*} \{p_j(t) [\tilde{K}(t_j) - \lambda \tilde{K}(t, q_s)]\}^2 + \sum_{j=n_*+1}^n [\tilde{K}(t_j) - \lambda \tilde{K}(t, q_s)]^2, \quad (7)$$

где весовая функция  $p_j(t)$  задается соотношением

$$p_j(t) = \frac{1}{1 + \left| \frac{\tilde{K}(t_j) - \lambda \tilde{K}(t, q_s)}{\tilde{K}(t_*) - \lambda \tilde{K}(t_*, q_s)} \right|^m}, \quad (8)$$

причем  $p_j(t) \rightarrow 0$ , когда  $K(t, q_s) \rightarrow \infty$ , и  $p_j(t) = 1$ , когда  $\tilde{K}(t_j) = \lambda \tilde{K}(t, q_s)$ . Здесь  $n_*$  – число дискретных значений ядер ползучести в области  $\{0, t_*\}$ ;  $m$  – порядок моментов разностей ( $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ ).

Методика определения значений весовой функции подробно описана в [2].

Экспериментальная апробация метода состоит в определении параметров ядер наследственности из базовых экспериментов, в расчете на их основе деформаций и напряжений для нестационарных режимов нагружения и в сравнении их с экспериментальными данными. В качестве нестационарных режимов нагружения в работе выбраны режимы ступенчатых догрузок и разгрузок, которые в общем виде можно представить с помощью суммы элементарных нагружений

$$\varepsilon(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t - \tau_k) - h(t - \tau_{k+1})) \frac{\sigma_k}{\varepsilon_k}, \quad (9)$$

где  $h(\cdot)$  – единичная функция Хевисайда.

Задача заключается в определении параметров ядер наследственности, согласно процедурам рассмотренного метода, расчете на их основе деформаций нестационарной ползучести и релаксации напряжений и сравнении полученных результатов с экспериментальными данными.

## 2. Определение параметров ядер ползучести и релаксации

Объектами исследования в работе являются два типа материалов: вязкоупругие (нейлон FM 10001, дуралюмин Д16Т при  $\theta = 150^\circ\text{C}$ , дуралюмин Д16Т при  $\theta = 200^\circ\text{C}$ , поливинилхлоридный пластикат) и вязкопластические (стеклопластик ТС-8/3-250,  $\varphi = 45^\circ$ , плексиглас 1А). Переход от вязкоупругого деформирования к вязкопластическому определяется из условия достижения критического значения пассивного нагружения  $\sigma_*$ , величина которого определяется согласно методики, изложенной в [6]. Экспериментальные данные заимствованы соответственно из [7 – 11].

В табл. 1 представлены значения параметров ядер наследственности, найденных для исследованных материалов с помощью рассмотренного в данной работе метода.

Таблица 1

Значения параметров ядер наследственности

Материалы	Параметры		
	$\alpha$	$\beta$ , час <sup>-(1+<math>\alpha</math>)</sup>	$\lambda$ , час <sup>-(1+<math>\alpha</math>)</sup>
Стеклопластик ТС-8/3-250, $\varphi = 45^\circ$	-0,651	0,195	0,124
Поливинилхлоридный пластикат	-0,504	0,339	0,435
Нейлон FM 10001	-0,555	0,662	0,873
Плексиглас 1А	-0,591	0,014	0,020
Дуралюмин Д16Т при $\theta = 150^\circ\text{C}$	-0,426	0,410	0,036
Дуралюмин Д16Т при $\theta = 200^\circ\text{C}$	-0,648	0,074	0,072

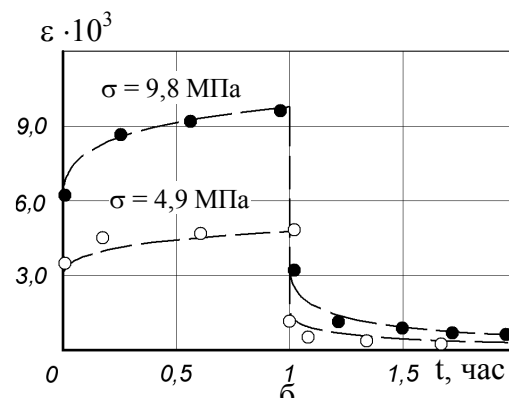
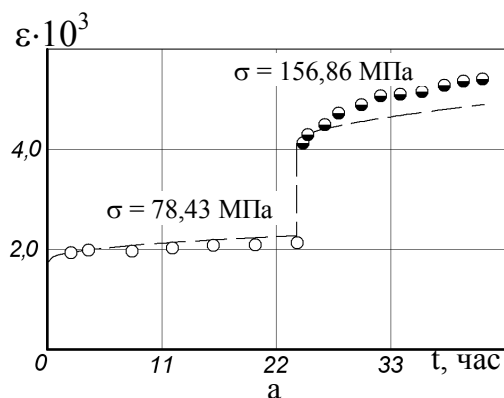


Рис. 2. Зависимость деформации от времени при ступенчатой догрузке дуралюмина Д16Т при  $\theta = 200^\circ\text{C}$  (а) и ступенчатой полной разгрузке нейлона FM 10001 (б)

## 3. Экспериментальная апробация параметров ядер наследственности

Под экспериментальной апробацией понимается расчет деформаций и напряжений для нестационарных режимов нагружения на основе параметров

(табл. 1), найденных из базовых экспериментальных данных. В работе рассмотрены режимы ступенчатых догрузок и разгрузок, а также релаксация напряжений.

### 3.1. Вязкоупругие материалы

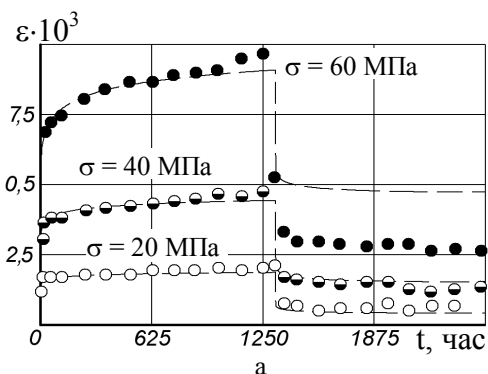
Для режима однократной ступенчатой догрузки сумма (9) будет состоять из двух слагаемых, а определяющее уравнение (1) с учетом режима нагружения и структуры ядра наследственности примет вид

$$\varepsilon(t) = \varphi_0^{-1} \left\{ h(t) \sigma_1 \cdot \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + h(t-t_1) \Delta \sigma_1 \cdot \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) \right\}, \quad (10)$$

где  $t_1$  – время начала догрузки;  $\sigma_1$  – начальное напряжение;  $\Delta \sigma_1$  – приращение напряжения.

Величина обратной ползучести  $\varepsilon_r$  нелинейно-рассчитывается также по уравнению (10). В этом случае  $\Delta \sigma_1$  принимает отрицательное значение, а по модулю равно  $\sigma_1$ .

На рис. 2 результаты расчетов деформаций нестационарной ползучести при ступенчатой догрузке (а) и полной разгрузке (б) сопоставлены с экспериментальными данными (точки).



### 3.2. Вязкопластические материалы

Величина деформации обратной ползучести  $\varepsilon_r$  нелинейно-вязкопластических материалов при полной разгрузке рассчитывается по уравнению

$$\varepsilon(t) = \varphi_0^{-1} \left\{ \sigma_1 h(t_1) \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_1^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) \right\} + \frac{\sigma_1}{E_p} \left[ \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_1^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} - 1 \right], \quad (11)$$

которое получено из (1) с учетом (9) и в предположении, что разгрузка подчиняется закону линейной упругости, причем мгновенный модуль упругости при разгрузке  $E_p$  совпадает с мгновенным модулем упругости при нагрузке.

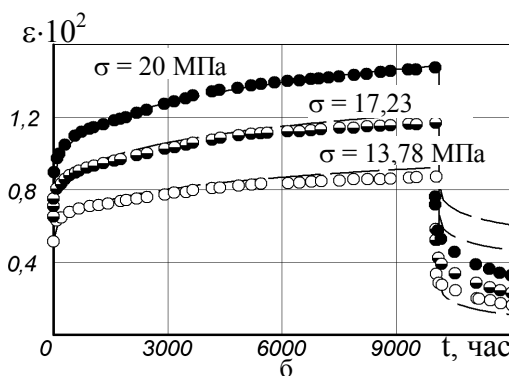


Рис. 3. Зависимость деформации от времени при полной разгрузке стеклопластика ТС-8/3-250,  $\varphi = 45^\circ$ , (а) и плексигласа 1А (б)

На рис. 3 сопоставлены результаты расчетов (линии) деформаций нестационарной ползучести вязкопластических материалов при ступенчатой полной разгрузке с экспериментальными данными (точки). Величина критического значения пассивного нагружения  $\sigma_*$  составляла для стеклопластика ТС-8/3-250 35,21 МПа, а для плексигласа – 1А 14,14 МПа.

### 3.3. Релаксация напряжений

Определяющее уравнение релаксации напряжений (2) для случая постоянных деформаций с учетом структуры ядра релаксации (4) записывается

в виде

$$\sigma_k(t) = \varphi_0(\varepsilon(0)) \cdot \left( 1 - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right), \quad (12)$$

где  $\varepsilon(0)$  – начальная деформация, которая в процессе вязкоупругого деформирования удерживается постоянной.

На рис. 4 сопоставлены результаты расчетов (линии) релаксации напряжений при фиксированных уровнях деформации с экспериментальными данными (точки) для исследованных материалов. При расчетах релаксации напряжений, согласно уравнению (12), использовались значения параметров представленных в табл. 1.

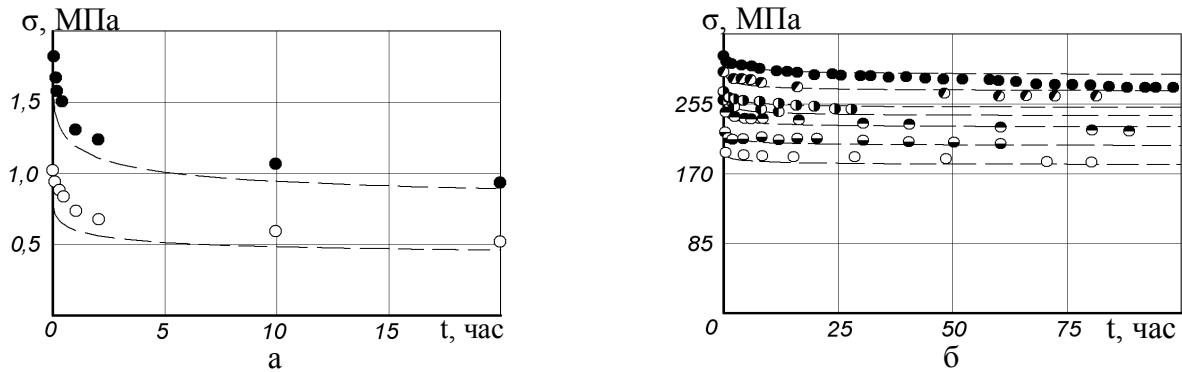


Рис. 4. Зависимость изменения напряжений от времени при релаксации поливинилхлоридного пластика (а) и дуралюмина Д16Т при  $\theta = 150^\circ\text{C}$

### Заключение

Из сравнения экспериментальных и расчетных данных, представленных на рис. 2 – 4, видно, что значения параметров, найденные из базовых экспериментальных данных с помощью рассмотренного в работе метода, позволяют достичь удовлетворительного согласования с опытными данными расчета нестационарных режимов нагружения с использованием определяющего уравнения (1). Максимальная погрешность для вязкоупругих материалов не превысила 10%.

Погрешность, полученная для вязкопластических материалов при полной разгрузке, в случае, когда величина начального нагружения не превышает величину критического значения пассивного нагружения  $\sigma_*$ , также не превысила 10%. Когда начальные напряжения превышали величину критического значения пассивного нагружения, погрешности расчета деформаций ползучести оказались значительно больше. По видимому, это связано с тем, что эти материалы на начальной стадии деформирования проявляли пластические свойства, для учета которых необходимы другие определяющие уравнения и дополнительные базовые эксперименты.

При расчете релаксации напряжений максимальная погрешность не превысила 15%. Необходимо отметить, что для нахождения значений параметров, входящих в уравнение (12) были использованы также эксперименты на одноосную ползучесть при нескольких уровнях постоянных напряжений.

### Литература

1. Голуб, В.П. *Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования* [Текст] / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, П.В. Фернати // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 20 – 34.
2. Голуб, В.П. *Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих*

*материалов с использованием весовых функций* [Текст] / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, В.С. Рагулина // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 70 – 80.

3. Голуб, В.П. *О применении сглаживающих сплайн-аппроксимаций в задачах идентификации параметров ползучести* [Текст] / В.П. Голуб, А.Д. Погребняк, И.Б. Романенко // Прикл. механика. – 1997. – № 33, № 6. – С. 52-61.

4. Колтунов, М.А. *Ползучесть и релаксация* [Текст]: моногр. / М.А. Колтунов. – М.: Высш. шк., 1976. – 279 с.

5. Работнов, Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел* [Текст]: моногр. / Ю.Н. Работнов. – М.: Наук, 1977. – 384 с.

6. Голуб, В.П. *К задаче расчета деформаций обратной ползучести нелинейно-вязкоупруго-пластических материалов при полной разгрузке* [Текст] / В.П. Голуб, Я.В. Павлюк, П.В. Фернати // Проблемы оптимального проектирования сооружений: тез. докл. 2-й Всероссийской конф. – Новосибирск, 5-6 апреля 2011. – С. 80 – 93.

7. Marin, J. *Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion* [Text] / J. Marin, A.C. Webber, G.F. Weissmann // Proc. of the ASTM. – 1954.- Vol. 54. – P. 1313 – 1343.

8. Наместников, В.С. *Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках* [Текст] / В.С. Наместников, А.А. Хвостунов // ПМТФ. – 1960. – № 4. – С. 90 – 95.

9. Самарин, Ю.П. *О ползучести поливинилхлоридного пластика при переменных нагрузках* [Текст] / Ю.П. Самарин, О.В. Сорокин // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195. – С. 333 – 336.

10. Работнов, Ю.Н. *Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250* [Текст] / Ю.Н. Работнов, А.Х. Паперник, Е.И. Степанычев // Механика полимеров. – 1971. – № 3. – С. 391 – 397.

11. Marin, J. *Relations for plexiglas subjected to various stresses* [Text] / J. Marin, P. Yoh-Han // Trans. of the ASME. – October 1952. – Vol. 74, N 7. – P. 1231 – 1240.

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Б.П. Маслов, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина.

### ПРО ОДИН МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЯДЕР ПОВЗУЧОСТІ ТА РЕЛАКСАЦІЇ

*П.В. Фернати, Я.В. Павлюк, В.С. Рагуліна*

Експериментально апробовано метод визначення параметрів ядер спадковості в нелінійній моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю. Параметри ядер визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер, що отримано виходячи із умови подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування. Дискретні значення ядер в області сингулярності враховуються за допомогою вагових функцій. У якості ядра спадковості використана дробово-експоненційна функція. Апробацію виконано на задачах розрахунку деформацій при ступеневому довантаженні, повному розвантаженні та релаксації напружень в'язкопружних та в'язкопластичних матеріалів.

**Ключові слова:** нелінійна в'язкопружність, в'язкопластичність, параметри ядер спадковості, деформація повзучості, релаксація напружень, функція подібності, вагова функція.

### ABOUT ONE METHOD OF DETERMINATION OF PARAMETERS OF CREEP AND RELAXATION KERNELS

*P.V. Fernati, Ya.V. Pavluk, V.S. Ragulina*

The method of the determination of heredity kernel parameters in a non-linear viscoelastic model with the time independent nonlinearity has been approved experimentally. The kernel parameters are determined using the approximation of discrete values of kernels obtained from the similarity condition between isochroneus creep diagrams and a momentary deformation diagram. The discrete values of kernel in the singularity domain are taking into account by means of weight functions. The kernel of heredity is used in the form of exponential-fractional function. The approval has been carried out on calculation problems of deformations at step additional load, at full unloading and stress relaxation rate of viscoelastic and viscoplastic materials.

**Key words:** non-linear viscoelasticity, viscoplasticity, heredity kernels parameters, creep rate, stress relaxation rate, exponential-fractional function, similarity function, weight functions.

**Фернати Павел Викторович** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела механики ползучести Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина.

**Павлюк Ярослав Викторович** – кандидат технических наук, младший научный сотрудник отдела механики ползучести Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина.

**Рагулина Вера Сергеевна** – инженер 1 категории отдела механики ползучести Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина.