

УДК 621.9.06-529:621.7.044

В.Ф. СОРОКИН, В.В. КОМБАРОВ*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

СРАВНЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРАЕКТОРИЙ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ ЧПУ ОБРАБОТКИ СПЛАЙНАМИ ТРЕТЬЕЙ И ПЯТОЙ СТЕПЕНЕЙ

Рассмотрена проблема обеспечения плавности изменения кинематических параметров движения инструмента при высокоскоростной ЧПУ обработке сложнофасонных поверхностей. Отмечено, что при криволинейной обработке скорости движения рабочих органов станка с ЧПУ по каждой оси всегда переменны. Это приводит к появлению осевых ускорений и рывков. Обоснована необходимость представления траектории перемещения инструмента в сплайновых интерполяторах систем ЧПУ сплайн-функциями степени не ниже пятой. Приведены результаты сравнительного эксперимента, показывающего, что при моделировании траектории движения кубическими сплайнами, функции изменения по времени ускорений становятся не гладкими, а функции рывков терпят разрывы.

Ключевые слова: высокоскоростная обработка, система ЧПУ, сплайн, интерполяция, скорость, ускорение, рывок.

Введение

В современных системах ЧПУ существует устойчивая тенденция применения для обработки сложнофасонных поверхностей вместо линейно-круговых сплайновых интерполяторов. К достоинствам которых можно отнести повышение гладкости траектории движения инструмента, увеличение кинематической и динамической стабильности процесса высокоскоростной обработки, повышение точности и качества обрабатываемой поверхности, компактность управляющей программы и др. [1].

Современные микропроцессорные системы ЧПУ содержат блок сплайновой интерполяции и позволяют задавать траекторию движения инструмента посредством сплайн-функций. В этих системах наибольшее употребление получили NURBS-кривые (Non Uniform Rational B-spline) [9, 10, 15] и B-сплайны (B-spline) [3, 4, 5, 7]. Упоминаются также A-сплайны (Akima spline) и C-сплайны (Cubic spline). Перечень некоторых систем ЧПУ, имеющих сплайновый интерполятор, приведен в работах [1, 2].

Разнообразие форм представления криволинейных траекторий в системах ЧПУ свидетельствует о существовании противоречий у разработчиков этих систем, отсутствии канонической формы представления кривых и поверхностей сплайн-функциями, а значит об актуальности продолжения исследований в этом направлении.

Как известно, сплайном степени n дефекта 1 называют кусочно-полиномиальную функцию, со-

стоящую из множества участков полиномов степени n , сопряженных на границах участков до $n - 1$ производной включительно.

В существующих интерполяторах систем ЧПУ в основном используются сплайн-функции второй и третьей степени [5, 13]. В работах [11, 12, 14, 16] рассматривается возможность использования в интерполяторах сплайнов пятой степени, но не обосновывается причина такого решения.

Поэтому **целью данной статьи** является обоснование и экспериментальное подтверждение необходимости представления траектории перемещения инструмента при высокоскоростной обработке сложнофасонных поверхностей на станках с ЧПУ сплайн-функциями степени не ниже пятой.

1. Обоснование применения в системах ЧПУ сплайнов пятой степени

Рассмотрим участок криволинейной траектории движения инструмента, математическая модель которого представлена в виде векторно-параметрического уравнения кривой в p -мерном пространстве

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u), \quad u \in [u_0, u_T], \quad (1)$$

где $p \geq 2$ – количество координат обработки; u_0 – значение параметра в момент времени $t = 0$; u_T – значение параметра в момент времени $t = T$; T – общее время обработки данного участка (сек); t – текущее время (сек).

Например, параметрическое уравнение траектории для трехкоординатной обработки с програм-

мируемыми осями X, Y, Z – будет иметь вид:

$$X = x(u), \quad Y = y(u), \quad Z = z(u). \quad (2)$$

Реализация технологического процесса высокоскоростной обработки требует высокой подачи инструмента по контуру обработки, которая задается технологом исходя из условий обеспечения рациональных режимов резания, а возможность получения требуемого качества изготавливаемой детали зависит от стабильности обеспечения заданного скоростного режима и точности позиционирования инструмента.

При перемещении по криволинейной траектории скорости движения рабочих органов станка, вычисляемые как проекции вектора контурной скорости на соответствующие оси, даже при постоянной контурной подаче, будут переменными. Изменения осевых скоростей приводят к появлению осевых ускорений и рывков.

На появление осевых ускорений и рывков влияют также нормальная (центростремительная) составляющая контурного ускорения, которая прямо пропорциональна кривизне траектории и квадрату скорости перемещения инструмента по этой траектории, а также нормальная составляющая контурного рывка.

В этих условиях естественно предположить, что качество процесса высокоскоростной обработки будет выше при плавном характере изменения во времени кинематических параметров движения.

Это предположение позволяет выдвинуть гипотезу о том, что функции осевой скорости $V^i(t)$, осевого ускорения $A^i(t)$, и осевого рывка $J^i(t)$ на рассматриваемом участке траектории должны быть гладкими при любом t .

Контурными значениями кинематических параметров движения $\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{j}$ будем называть соответственно векторы скорости, ускорения и рывка в произвольной точке траектории, определяемой параметром u .

Математическая связь между контурными и осевыми значениями кинематических параметров движения определяется формулами

$$\begin{aligned} V^i(t) &= |\mathbf{v}| \cdot \hat{v}^i(t), \\ A^i(t) &= |\mathbf{a}| \cdot \hat{a}^i(t), \\ J^i(t) &= |\mathbf{j}| \cdot \hat{j}^i(t), \quad i = \overline{1, p}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\hat{v}^i(u), \hat{a}^i(u), \hat{j}^i(u)$ – координаты единичных векторов направления скорости, ускорения и рывка.

А связь между самими кинематическими параметрами движения, как известно, определяется фун-

даментальными дифференциальными соотношениями

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad (4)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}; \quad (5)$$

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}; \quad (6)$$

Отсюда следует, что гладкое изменение рывка получим только при условии, что функция (1) будет как минимум четырежды непрерывно дифференцируема.

Поэтому математическую модель криволинейной траектории движения необходимо строить в классе сплайн-функций степени не ниже пятой.

2. Моделирование траектории движения сплайнами третьей и пятой степени

Важной задачей при разработке сплайнового интерполятора является выбор типа сплайна и способа его представления в управляющей программе [1].

Так как информация о траектории движения инструмента должна обрабатываться в режиме реального времени, то для решения этой задачи необходим метод, обеспечивающий получение сплайн-функций с высоким уровнем информативности и вычисляемости.

Здесь информативность – это наличие структуры данных, которая обеспечивает эффективное формирование, поиск, передачу и хранение данных в малом объеме памяти компьютера (при этом данные должны создаваться однократно), а вычисляемость – это наличие простых и экономичных алгоритмов вычисления основных геометрических и дифференциальных характеристик движения (точек позиционирования, скорости, ускорения, рывка и др.), необходимых для организации управления.

Таковыми свойствами обладает метод оптимального отображения в пространство В-сплайнов [7, 8].

В качестве примера рассмотрим моделирование этим методом траектории, заданной точками, приведенными в таблице 1. Для усложнения эксперимента точка T_6 задана «не плавно» относительно соседних точек, что делает траекторию волнистой, а точка T_{11} совпадает с точкой T_2 , что делает траекторию самопересекающейся. В последнем столбце таблицы 1 приведены значения параметра u , соответствующие в модели (2) координате каждой точки.

Таблица 1
Координаты траектории инструмента

№ п/п	X	Y	Z	U
T ₁	-22.487	-32.138	-9.651	0.0
T ₂	-19.136	-24.651	-5.515	1.0
T ₃	-13.453	-16.461	-3.008	2.0
T ₄	-6.926	-8.681	-1.755	3.0
T ₅	0.164	-1.465	-1.629	4.0
T ₆	10.000	0.000	0.000	5.0
T ₇	12.654	6.638	-6.016	6.0
T ₈	19.804	9.026	-10.779	7.0
T ₉	25.950	10.033	-15.917	8.0
T ₁₀	30.978	10.424	-20.554	9.0
T ₁₁	-19.136	-24.651	-5.515	18.0

После решения задачи моделирования точечно-заданной кривой сплайн-функциями третьей ($n = 3$) и пятой ($n = 5$) степени, получим гладкую траекторию движения инструмента (рис. 1).

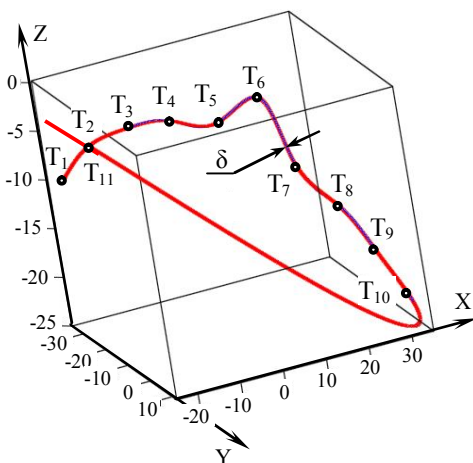


Рис. 1. Модели траектории движения, заданные сплайнами третьей и пятой степени

Как видно из рисунка, обе кривые имеют качественно одинаковый вид, а количественно отличаются друг от друга не более чем на $\delta = 0.02$ мм, что в масштабе данного рисунка не различимо. У кривой третьей степени вторая производная не гладкая, а третья производная терпит разрыв. Разрывы происходят в узловых точках «склейки» полиномов, которые в данном случае совпадают с целыми значениями параметра $u_i = i$ ($i=0, 1, 2, \dots$). У кривой пятой степени гладкие производные до третьей включительно.

3. Численное моделирование кинематических параметров движения

Численный эксперимент по определению законов изменения кинематических параметров движения при задании траектории сплайнами различных степеней проведем в следующей постановке.

Пусть заданы:

– постоянная подача движения инструмента по криволинейной траектории $F = 3$ м/мин = 50 мм/сек;

– время такта управления станком $\tau = 0.001$ сек.

Тогда расстояние, проходимое инструментом за один такт управления будет равно $S_\tau = F \cdot \tau = 0.05$ мм.

Направление вектора контурной скорости (\mathbf{v}) всегда известно, так как совпадает с направлением касательной прямой к кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ (рис. 2).

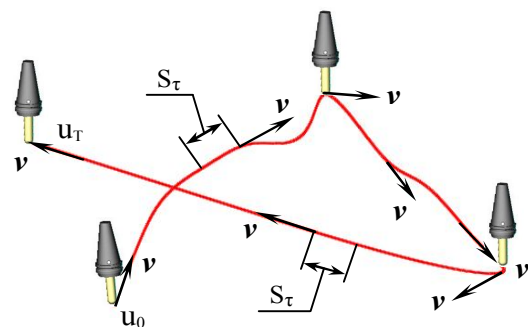


Рис. 2 Участок траектории движения инструмента

Учитывая это, можно вычислить значения осевых скоростей по всей траектории движения с шагом по времени равным такту управления τ .

Для этого на каждом шаге вначале, решая уравнение

$$S_\tau = \int_{u_{k-1}}^{u_k} \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du, \quad (7)$$

где $x'(u)$, $y'(u)$, $z'(u)$ – производные функции (1) по u , находим значение параметра u_k ($u_0 < u_k \leq u_T$), при котором длина дуги на участке траектории, определяемом интервалом $[u_{k-1}, u_k]$, будет равна S_τ .

Для исключения постороннего шума результатов, решать уравнение (7) необходимо численными методами, обеспечивающими сходимость итерационного процесса с погрешностью $\epsilon \leq 1 \cdot 10^{-17}$. Такая точность вычислений необходима для получения достоверных данных о положении на уровне $1 \cdot 10^{-7} \dots 1 \cdot 10^{-8}$ м [6].

Далее из (3) получим формулы для вычисления значений осевых скоростей по всей траектории движения:

$$V_X(\tau \cdot k) = F \cdot \frac{x'(u_k)}{\sqrt{[x'(u_k)]^2 + [y'(u_k)]^2 + [z'(u_k)]^2}},$$

$$V_Y(\tau \cdot k) = F \cdot \frac{y'(u_k)}{\sqrt{[x'(u_k)]^2 + [y'(u_k)]^2 + [z'(u_k)]^2}}, \quad (8)$$

$$V_Z(\tau \cdot k) = F \cdot \frac{z'(u_k)}{\sqrt{[x'(u_k)]^2 + [y'(u_k)]^2 + [z'(u_k)]^2}},$$

где V_X, V_Y, V_Z – скорости движения по осям X, Y, Z; $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – номер такта управления СЧПУ. Графики осевых скоростей представлены на рис. 3.

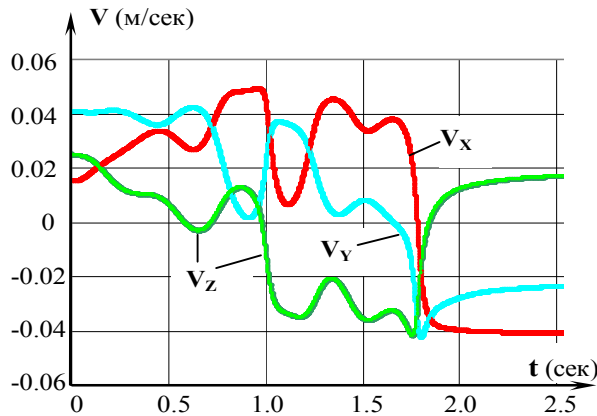


Рис. 3. Графики осевых скоростей: V_X – по оси X, V_Y – по оси Y, V_Z – по оси Z

Значения осевых ускорений получим в конечно-разностном представлении по формулам:

$$\begin{aligned} \dot{A}_X(\tau \cdot k) &= \frac{V_X[\tau \cdot k] - V_X[\tau \cdot (k-1)]}{\tau}, \\ \dot{A}_Y(\tau \cdot k) &= \frac{V_Y[\tau \cdot k] - V_Y[\tau \cdot (k-1)]}{\tau}, \\ \dot{A}_Z(\tau \cdot k) &= \frac{V_Z[\tau \cdot k] - V_Z[\tau \cdot (k-1)]}{\tau}. \end{aligned} \quad (9)$$

Графики осевых ускорений при разных степенях сплайн-функций представлены на рис. 4 – 6.

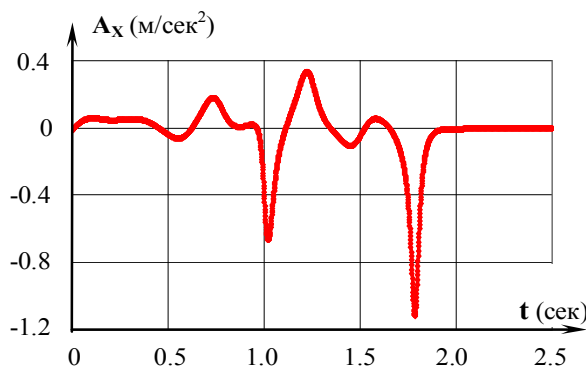


Рис. 4. График ускорения по оси X при задании траектории сплайнами пятой степени

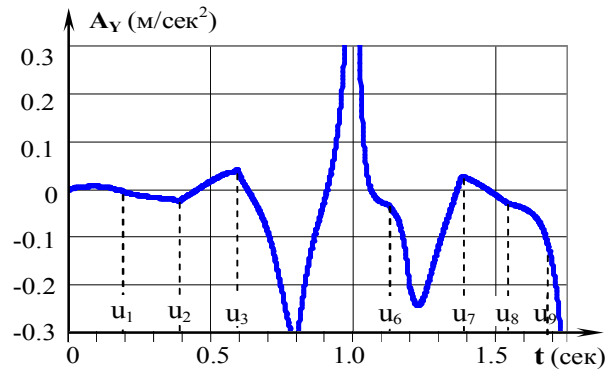


Рис. 5. График ускорения по оси Y при задании траектории сплайнами третьей степени

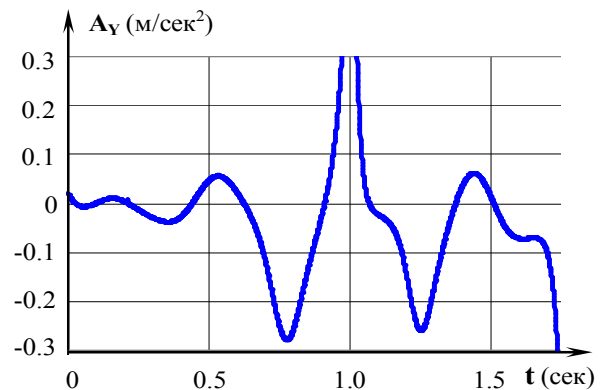


Рис. 6. График ускорения по оси Y при задании траектории сплайнами пятой степени

Значения осевых рывков вычислим также в конечно-разностном представлении по формулам:

$$\begin{aligned} J_X(\tau \cdot k) &= \frac{A_X[\tau \cdot k] - A_X[\tau \cdot (k-1)]}{\tau}, \\ J_Y(\tau \cdot k) &= \frac{A_Y[\tau \cdot k] - A_Y[\tau \cdot (k-1)]}{\tau}, \\ J_Z(\tau \cdot k) &= \frac{A_Z[\tau \cdot k] - A_Z[\tau \cdot (k-1)]}{\tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

Графики рывков по разным осям при разных степенях сплайн-функций представлены на рис. 7 – 13.

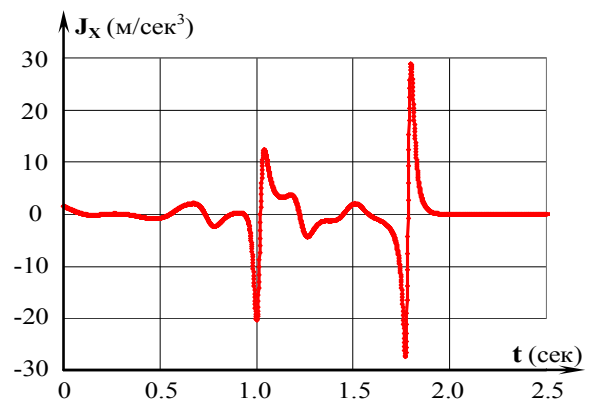


Рис. 7. График рывка по оси X при задании траектории сплайнами пятой степени

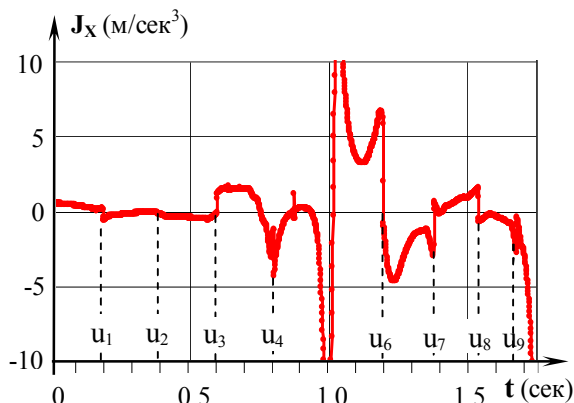


Рис. 8. График рывка по оси X при задании траектории сплайнами третьей степени

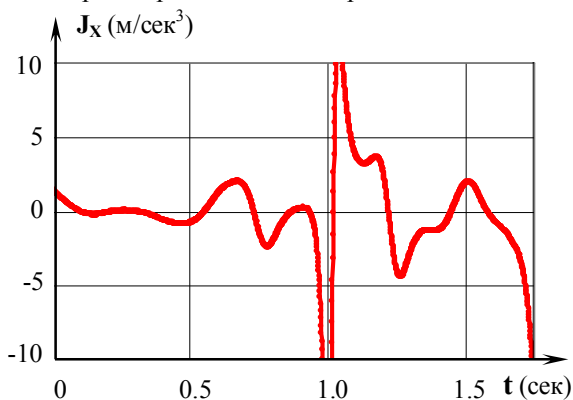


Рис. 9. График рывка по оси X при задании траектории сплайнами пятой степени

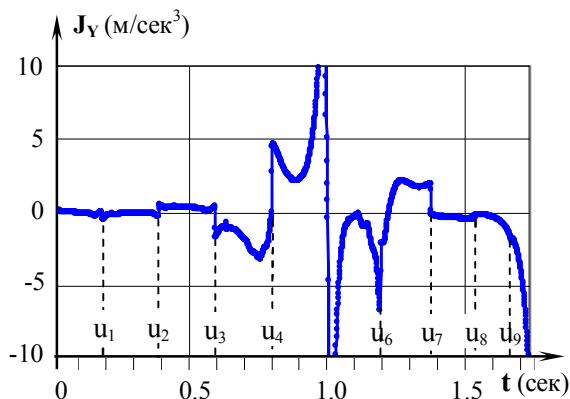


Рис. 10. График рывка по оси Y при задании траектории сплайнами третьей степени

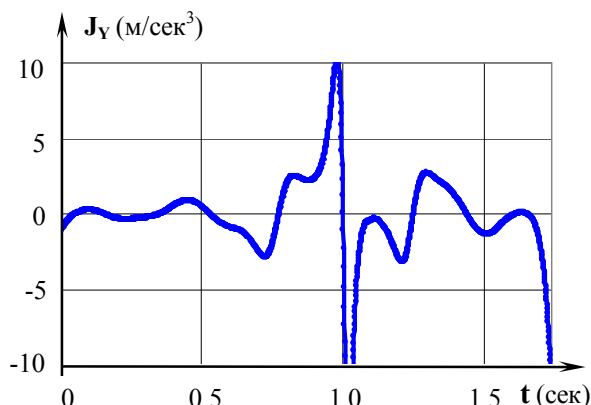


Рис. 11. График рывка по оси Y при задании траектории сплайнами пятой степени

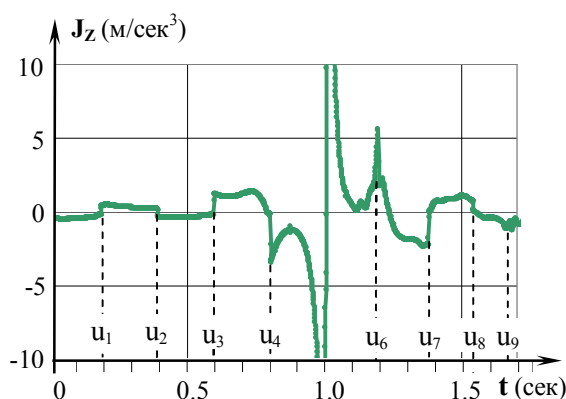


Рис. 12. График рывка по оси Z при задании траектории сплайнами третьей степени

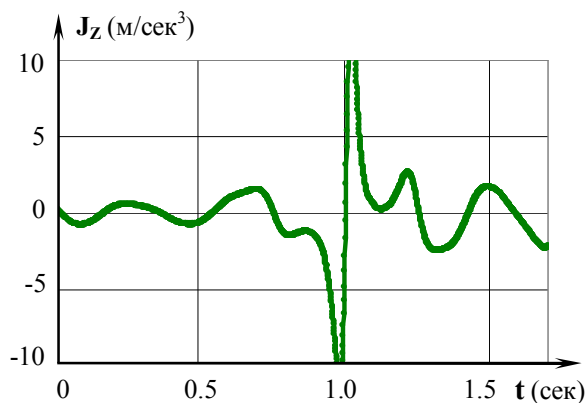


Рис. 13. График рывка по оси Z при задании траектории сплайнами пятой степени

При решении задачи (7) устанавливается взаимно-однозначное соответствие параметра u уравнения кривой (1) и временем обработки $t = \tau \cdot k$. В таблице 2 указано время, соответствующее параметру узловых точек сплайна — u_i

Таблица 2

Соответствие узлов сплайна времени обработки

u	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
t	0.19	0.40	0.6	0.8	1.01	1.2	1.38	1.54	1.68

Как следует из рисунков 5, 8, 10, 12 изломы функции осевого ускорения и разрывы функций осевых рывков при моделировании траектории движения сплайнами третьей степени происходят именно в эти моменты времени. При моделировании траектории сплайнами пятой степени (рис. 4, 6, 7, 9, 11, 13) изломов и разрывов не наблюдается. В каждый момент времени функции осевых ускорений и рывков плавны.

Этот факт является экспериментальным подтверждением влияния параметров математической модели криволинейных траекторий высокоскоростной ЧПУ обработки на гладкость и стабильность изменения кинематических параметров движения рабочих органов оборудования.

Заключение

Рассмотрена проблема влияния параметров математических моделей, используемых для представления криволинейных траекторий высокоскоростной обработки в сплайновых интерполяторах систем ЧПУ на кинематические параметры движения рабочих органов оборудования.

Теоретически обосновано и экспериментально подтверждено утверждение, что для получения гладкости и стабильности изменения кинематических параметров движения рабочих органов оборудования (скорости, ускорения, рывка) необходимо представление траекторий обработки сложнофасонных поверхностей сплайн-функциями степени не ниже пятой.

Литература

1. Мартинов, Г.М. Проблемы использования сплайновой интерполяции в системах ЧПУ при обработке скульптурных поверхностей [Текст] / Г.М. Мартинов, В.Л. Сосонкин // Автоматизация в промышленности. – 2006. – № 11. – С. 3 – 9.
2. Мартинова, Л. И. Сплайн-контуры в системе ЧПУ [Текст] / Л.И. Мартинова, Г.М. Мартинов // Стружка. – 2007. – № 1. – С. 74 – 77.
3. Мацевитый, Ю.М. Сплайн идентификация теплофизических процессов [Текст] / Ю.М. Мацевитый, Е.Н. Бут. – К.: Наукова думка, 2010. – 240 с.
4. Раисов, Ю.А. В-сплайн интерполяция для двухуровневых систем ЧПУ [Текст] / Ю.А. Раисов, И.В. Бычков, П.А. Кулаков // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2008. – № 5-6. – С. 71 – 74.
5. Раисов, Ю.А. Кубическая В-сплайн интерполяция точечно-заданных кривых (модификация общего метода) [Текст] / Ю.А. Раисов, И.В. Бычков, Н.И. Бычков // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2011. – № 2. – С. 73 – 74.
6. Комбаров, В.В. Определение физических величин перемещения органов станков с ЧПУ [Текст] / В.В. Комбаров, Е.В. Комбарова, Е.А. Криживец //

Авиационно-космическая техника и технология. – 2011. – № 7 (84) – С. 109 – 115.

7. Сорокин, В.Ф. Модифицированный метод приближения функций В-сплайнами [Текст] / В.Ф. Сорокин, В.А. Леховицер, Е.Н. Бут // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: ГАКУ «ХАИ», 1999. – № 3. – С. 28 – 38.

8. Сорокин, В.Ф. Математическая модель сложно фасонной поверхности для адаптивного программного управления металлообрабатывающим оборудованием [Текст] / В.Ф. Сорокин // Технологические системы. – 2002. – № 5 (16). – С. 44 – 51.

9. Beudaert, X. Feedrate interpolation with axis jerk constraints on 5-axis NURBS and G1 tool path [Text] / X. Beudaert, S. Lavernhe, C. Tournier // International J. of Machine Tools & Manuf. – 2012. – Vol. 57. – P. 73 – 82.

10. NURBS Interpolator with Confined Chord Error and Tangential and Centripetal Acceleration Control [Text] / A. Bardine, S. Campanelli, P. Foglia, C. A. Prete // Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT): International Congress, 18-20 Oct. 2010: Conference Publications. – P. 489 – 496.

11. Erkorkmaz, K. Quintic spline interpolation with minimal feed fluctuation [Text] / K. Erkorkmaz, Y. Altintas // J. Manuf. Sci. Eng. – 2005. – Vol. 127. – P. 339 – 349.

12. A control polygon scheme for design of planar C^2 PH quintic spline curves [Text] / F. Pelosi, M.L. Sampoli, R.T. Farouki, C. Manni // Comput Aided Geom Des. – 2007. – V. 24 (1). – P. 28 – 52.

13. Curve fitting and optimal interpolation on CNC machines based on quadratic B-splines [Text] / M. Zhang, W. Yan, C.M. Yuan, D. Wang, X.S. Gao // MM Research Preprints, 2010. – V. 29. – P. 71 – 91, Accepted by Scinece China, Series F, 2011.

14. Wang, F.C. Open architecture controllers for machine tools. Part2: a real time quintic spline interpolator [Text] / F.C. Wang, P.K. Wright // Journal of Manuf. Science & Engineering. – 1998. – Vol. 120, No. 2. – P. 425 – 432.

15. PC-based controller with real-time look-ahead NURBS interpolator [Text] / H.T. Yau, J.B. Wang, C.Y. Hsu, C.H. Yeh // Computer-Aided Design & Applications. – 2007. – V. 4 (1-6). – P. 331 – 340.

16. Chen, J.-H. An S-curve Acceleration/ Deceleration Design for CNC Machine Tools Using Quintic Feedrate Function [Text] / J.-H. Chen, S.-S. Yeh, J.-T. Sun // Comp.-Aided Design & Applications. – 2011. – V. 8 (4). – P. 583 – 592.

Поступила в редакцию 31.05.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф., гл.н.с. Ю.А. Раисов, Институт проблем машиностроения АН Украины, Харьков, Украина.

**ПОРІВНЯННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ РУХУ
ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ТРАЕКТОРІЇ ВИСОКОШВИДКІСНОЇ ЧПК
ОБРОБКИ СПЛАЙНАМИ ТРЕТЬОГО ТА П'ЯТОГО СТУПЕНЯ**

В.Ф. Сорокін, В.В. Комбаров

Розглянуто проблему забезпечення плавності зміни кінематичних параметрів руху інструмента при високошвидкісній ЧПК обробці складнофасонних поверхонь. Відзначено, що при криволінійній обробці швидкості руху робочих органів верстата зі ЧПК по кожній вісі завжди змінні. Це призводить до появи вісьових прискорень і ривків. Обґрунтовано необхідність представлення траєкторії переміщення інструменту в сплайнових інтерполяторах систем ЧПК сплайн-функціями ступеню не нижче п'ятої. Показано, що модель криволінійної траєкторії необхідно будувати в класі сплайн-функцій ступеня не нижче п'ятої. Наведено результати порівняльного експерименту, що показує, що при моделюванні траєкторії руху кубічними сплайнами, функції зміни в часі прискорень стають не гладкими, а функції ривків терплять розриви.

Ключові слова: високошвидкісна обробка, система ЧПК, сплайн, інтерполяція, швидкість, прискорення, ривок.

**COMPARISON OF KINEMATICAL PARAMETERS OF MOVEMENT AT PATH MODELING
OF HIGH-SPEED CNC PROCESSING WITH CUBIC AND QUINTIC SPLINES**

V.F. Sorokin, V.V. Kombarov

Problem of smoothness providing of kinematical parameters change of tool movement at high-speed CNC processing of complex-shaped surfaces is considered. There is noted that movement velocities of CNC machine working parts along each axis are always variable at curvilinear processing. It leads to occurrence of axial accelerations and jerks. Necessity of path representation of tool movement with spline-functions of a degree not below the fifth in spline interpolators of CNC systems is proved. The results of comparative experiment are given. The experiment shows that functions of accelerations change at time get not smooth and jerks functions have breaks at modeling of movement path with splines of the third degree.

Key words: high-speed milling, CNC system, spline, interpolation, velocity, acceleration, jerk.

Сорокін Владимир Федорович – доктор технических наук, доцент кафедры технологии производства авиационных двигателей Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: sovladf@ukr.net.

Комбаров Владимир Викторович – научный сотрудник кафедры технологии производства летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: kombarov1@mail.ru.