**УДК 519.652:519.254**

П.О.Приставка, О.Г.Чолишкіна

*Національний авіаційний університет*

# ДОСЛІДЖЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ПОЛІНОМІАЛЬНОГО СПЛАЙНУ НА ОСНОВІ *B*-СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ

**Введено двовимірний поліноміальний сплайн на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку, близький до інтерполяційного у середньому. Отримано коефіцієнти при маномах, знайдено норму сплайн-оператора та визначено похибку апроксимації гладких функцій, заданих на рівномірних сітках вузлів.**

**Постановка проблеми**. Неперервні наближення двовимірних функцій, заданих значеннями на рівномірних сітках вузлів є актуальними в багатьох задачах: просторове моделювання, при реалізації геоінформаційних систем, при побудові різного роду поверхонь спостережень. Для останнього типу задач важливим є врахування наявності, за всяк час випадкової похибки у відліках функції, що спостерігається. При апроксимації за даними такого роду використовують методи, що забезпечують відтворення функцій за відліками, що є усередненими значеннями деяких функцій на елементах двовимірного розбиття – методи апроксимації у середньому.

У подібній постановці задачі застосування мають два типи методів апроксимації: високоточні – такі, що враховують осциляції функцій та методи згладжування, спрямовані на оцінку тренду. Для останнього типу обчислювальний аспект застосування процедур локальної апроксимації є більш привабливим у порівнянні з класичним підходом побудови моделей на підставі методу найменших квадратів. Слід відзначити, що для великих обсягів даних ширина вікна ковзного середнього (дискретної згортки функцій) вже не є вирішальним обчислювальним фактором стримування при застосуванні. Більш того, ширина вікна (кількість членів дискретної згортки або, іншими словами – ширина локального носія) для конкретних задач може мати інформативну змістовну інтерпретацію.

Виходячи із зазначеного, актуальним є отримання нових методів локальної апроксимації гладких двовимірних функцій, заданих значеннями на рівномірних сітках вузлів, для котрих наявні високі згладжувальні властивості при низькій обчислювальній складності.

**Аналіз досліджень та постановка задачі.** На сьогоднішній день серед методів локальної неперервної апроксимації найбільше поширення мають процедури на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів. Обумовлено це тим, що при низький обчислювальній складності, отримують як високоточні, так і такі наближення, що суттєво згладжують функції, які апроксимуються. Відтворення одновимірних гладких функцій на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів висвітлено в багатьох роботах І. Шоенберга, К. Де Бора, М.П. Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О. Лигуном, В.В. Кармазіною [1–3]. У [4] розлого подано дослідження дво- та багатовимірних сплайнів, що є узагальненням одновимірних, близьких до інтерполяційних у середньому на основі *B*-сплайнів другого, третього та четвертого порядків. Е [5] подано дослідження асимптотичних властивостей одновимірного поліноміального сплайну, що є лінійною комбінацією *B*-сплайнів п'ятого порядку. Поставимо за мету даною роботою отримати явний вигляд двовимірного поліноміального сплайну на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку, близького до інтерполяційного у середньому з метою дослідження його норми та якості апроксимації гладких функцій, заданих на рівномірних розбиттях своїми усередненими значеннями.

**Виклад основного матеріалу.** За аналогією з [4] зафіксуємо два розбиття $\Delta_{h_t}$, $\Delta_{h_q}$ осей $T$ і $Q$ точками $t_i = ih_t$, $i \in \mathbf{Z}$, $h_t > 0$, $q_j = jh_q$, $j \in \mathbf{Z}$, $h_q > 0$, відповідно до яких задається розбиття $\Delta_{h_t,h_q}$ дійсної площини $\mathbf{R}_2$ на однакові прямокутні області, кожна з яких визначається координатами лівого нижнього та правого верхнього кута:

$$\Delta_{h_t,h_q} : \left\{ \left( ih_t, jh_q \right), \left( (i+1) h_t, (j+1) h_q \right); i, j \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Двовимірним сплайном порядку $r_t$ дефекту $k_t$ $\left(1 \le k_t \le r_t\right)$ за змінною $t$ і порядку $r_q$ дефекту $k_q$ $\left(1 \le k_q \le r_q\right)$ за змінною $q$, відносно розбиття $\Delta_{h_t,h_q}$, називають функцію $s(t,q) \in C^{r_t - k_t, r_q - k_q}$, яка на кожному елементі розбиття $\Delta_{h_t,h_q}$ є алгебраїчним багаточленом ступеня $r_t$ по $t$ і ступеня $r_q$ по $q$.

Нехай у вузлах розбиття $\Delta_{h_t,h_q}$ задано значення деякої функції $p(t,q) \in C^{5,5}$ : $p_{i,j}$, $i,j \in \mathbf{Z}$, причому, будемо вважати, що виконується

$$p_{i,j} = \overline{p}_{i,j} + \varepsilon_{i,j} , \tag{1}$$

де

$$\overline{p}_{i,j} = \frac{1}{h_t h_q} \int\limits_{(i-1)h_t}^{ih_t} \int\limits_{(j-1)h_q}^{jh_q} p(t,q)\,dtdq , \;\; i,j \in Z ; \tag{2}$$

$\varepsilon_{i,j}$ – деяка похибка.

Масиву значень $p_{i,j}$ поставимо у відповідність локальний поліноміальний сплайн на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку

$$S_{5,0}(p,t,q) = \sum_{i\in Z} \sum_{j\in Z} B_{5,h_t}(t - ih_t) B_{5,h_q}(q - jh_q) p_{i,j} , \tag{3}$$

де (з точністю до аргументу та кроку розбиття) [5]

$$B_{5,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h;3h], \\ \frac{1}{120}\left(3+\frac{t}{h}\right)^5, & t \in [-3h;-2h], \\ -\frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2 - \frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [-2h;-h], \\ \frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [-h;0], \\ -\frac{1}{12}\left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [0;h], \\ \frac{1}{24}\left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8}\left(\frac{t}{h}\right)^4 + \frac{5}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4}\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{5}{8}\left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [h;2h], \\ \frac{1}{120}\left(3-\frac{t}{h}\right)^5, & t \in [2h;3h]. \end{cases} \tag{4}$$

Підставивши значення *B*-сплайнів типу (4) в вираз (3) неважко отримати явний вигляд сплайну $S_{5,0}\left(p,t,q\right)$. Задля економії місця в таблиці (табл.1) наведено коефіцієнти при маномах сплайну, які можна використовувати при побудові відповідних обчислювальних схем та залучати при дослідженні похибки апроксимації функцій сплайн-оператором.

*Таблиця 1*

**Коефіцієнти при маномах сплайну** $S_{5,0}\left(p,t,q\right)$

| Індекс $p$ | 1 | $x$ | $y$ | $xy$ | $x^2$ | $y^2$ | $x^2y$ | $xy^2$ | $x^2y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$-2,$j$-2 | 1 | -5 | -5 | 25 | 10 | 10 | -50 | -50 | 100 |
| $i$-2,$j$-1 | 237 | -1185 | -375 | 1875 | 2370 | 210 | -3750 | -1050 | 2100 |
| $i$-2,$j$ | 1682 | -8410 | -770 | 3850 | 16820 | -220 | -7700 | 1100 | -2200 |
| $i$-2,$j$+1 | 1682 | -8410 | 770 | -3850 | 16820 | -220 | 7700 | 1100 | -2200 |
| $i$-2,$j$+2 | 237 | -1185 | 375 | -1875 | 2370 | 210 | 3750 | -1050 | 2100 |
| $i$-2,$j$+3 | 1 | -5 | 5 | -25 | 10 | 10 | 50 | -50 | 100 |
| $i$-1,$j$-2 | 237 | -375 | -1185 | 1875 | 210 | 2370 | -1050 | -3750 | 2100 |
| $i$-1,$j$-1 | 56169 | -88875 | -88875 | 140625 | 49770 | 49770 | -78750 | -78750 | 44100 |
| $i$-1,$j$ | 398634 | -630750 | -182490 | 288750 | 353220 | -52140 | -161700 | 82500 | -46200 |
| $i$-1,$j$+1 | 398634 | -630750 | 182490 | -288750 | 353220 | -52140 | 161700 | 82500 | -46200 |
| $i$-1,$j$+2 | 56169 | -88875 | 88875 | -140625 | 49770 | 49770 | 78750 | -78750 | 44100 |
| $i$-1,$j$+3 | 237 | -375 | 1185 | -1875 | 210 | 2370 | 1050 | -3750 | 2100 |
| $i$,$j$-2 | 1682 | -770 | -8410 | 3850 | -220 | 16820 | 1100 | -7700 | -2200 |
| $i$,$j$-1 | 398634 | -182490 | -630750 | 288750 | -52140 | 353220 | 82500 | -161700 | -46200 |
| $i$,$j$ | 2829124 | -1295140 | -1295140 | 592900 | -370040 | -370040 | 169400 | 169400 | 48400 |
| $i$,$j$+1 | 2829124 | -1295140 | 1295140 | -592900 | -370040 | -370040 | -169400 | 169400 | 48400 |
| $i$,$j$+2 | 398634 | -182490 | 630750 | -288750 | -52140 | 353220 | -82500 | -161700 | -46200 |
| $i$,$j$+3 | 1682 | -770 | 8410 | -3850 | -220 | 16820 | -1100 | -7700 | -2200 |
| $i$+1,$j$-2 | 1682 | 770 | -8410 | -3850 | -220 | 16820 | 1100 | 7700 | -2200 |
| $i$+1,$j$-1 | 398634 | 182490 | -630750 | -288750 | -52140 | 353220 | 82500 | 161700 | -46200 |
| $i$+1,$j$ | 2829124 | 1295140 | -1295140 | -592900 | -370040 | -370040 | 169400 | -169400 | 48400 |
| $i$+1,$j$+1 | 2829124 | 1295140 | 1295140 | 592900 | -370040 | -370040 | -169400 | -169400 | 48400 |
| $i$+1,$j$+2 | 398634 | 182490 | 630750 | 288750 | -52140 | 353220 | -82500 | 161700 | -46200 |
| $i$+1,$j$+3 | 1682 | 770 | 8410 | 3850 | -220 | 16820 | -1100 | 7700 | -2200 |
| $i$+2,$j$-2 | 237 | 375 | -1185 | -1875 | 210 | 2370 | -1050 | 3750 | 2100 |
| $i$+2,$j$-1 | 56169 | 88875 | -88875 | -140625 | 49770 | 49770 | -78750 | 78750 | 44100 |
| $i$+2,$j$ | 398634 | 630750 | -182490 | -288750 | 353220 | -52140 | -161700 | -82500 | -46200 |
| $i$+2,$j$+1 | 398634 | 630750 | 182490 | 288750 | 353220 | -52140 | 161700 | -82500 | -46200 |
| $i$+2,$j$+2 | 56169 | 88875 | 88875 | 140625 | 49770 | 49770 | 78750 | 78750 | 44100 |
| $i$+2,$j$+3 | 237 | 375 | 1185 | 1875 | 210 | 2370 | 1050 | 3750 | 2100 |

*Продовження табл. 1*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i+3,j-2$ | 1 | 5 | -5 | -25 | 10 | 10 | -50 | 50 | 100 |
| $i+3,j-1$ | 237 | 1185 | -375 | -1875 | 2370 | 210 | -3750 | 1050 | 2100 |
| $i+3,j$ | 1682 | 8410 | -770 | -3850 | 16820 | -220 | -7700 | -1100 | -2200 |
| $i+3,j+1$ | 1682 | 8410 | 770 | 3850 | 16820 | -220 | 7700 | -1100 | -2200 |
| $i+3,j+2$ | 237 | 1185 | 375 | 1875 | 2370 | 210 | 3750 | 1050 | 2100 |
| $i+3,j+3$ | 1 | 5 | 5 | 25 | 10 | 10 | 50 | 50 | 100 |

| Індекс $p$ | $x^3$ | $y^3$ | $x^3y$ | $xy^3$ | $x^3y^2$ | $x^2y^3$ | $x^3y^3$ | $x^4$ | $y^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i-2,j-2$ | -10 | -10 | 50 | 50 | -100 | -100 | 100 | 5 | 5 |
| $i-2,j-1$ | -2370 | -30 | 3750 | 150 | -2100 | -300 | 300 | 1185 | -15 |
| $i-2,j$ | -16820 | 140 | 7700 | -700 | 2200 | 1400 | -1400 | 8410 | 10 |
| $i-2,j+1$ | -16820 | -140 | -7700 | 700 | 2200 | -1400 | 1400 | 8410 | 10 |
| $i-2,j+2$ | -2370 | 30 | -3750 | -150 | -2100 | 300 | -300 | 1185 | -15 |
| $i-2,j+3$ | -10 | 10 | -50 | -50 | -100 | 100 | -100 | 5 | 5 |
| $i-1,j-2$ | -30 | -2370 | 150 | 3750 | -300 | -2100 | 300 | -15 | 1185 |
| $i-1,j-1$ | -7110 | -7110 | 11250 | 11250 | -6300 | -6300 | 900 | -3555 | -3555 |
| $i-1,j$ | -50460 | 33180 | 23100 | -52500 | 6600 | 29400 | -4200 | -25230 | 2370 |
| $i-1,j+1$ | -50460 | -33180 | -23100 | 52500 | 6600 | -29400 | 4200 | -25230 | 2370 |
| $i-1,j+2$ | -7110 | 7110 | -11250 | -11250 | -6300 | 6300 | -900 | -3555 | -3555 |
| $i-1,j+3$ | -30 | 2370 | -150 | -3750 | -300 | 2100 | -300 | -15 | 1185 |
| $i,j-2$ | 140 | -16820 | -700 | 7700 | 1400 | 2200 | -1400 | 10 | 8410 |
| $i,j-1$ | 33180 | -50460 | -52500 | 23100 | 29400 | 6600 | -4200 | 2370 | -25230 |
| $i,j$ | 235480 | 235480 | -107800 | -107800 | -30800 | -30800 | 19600 | 16820 | 16820 |
| $i,j+1$ | 235480 | -235480 | 107800 | 107800 | -30800 | 30800 | -19600 | 16820 | 16820 |
| $i,j+2$ | 33180 | 50460 | 52500 | -23100 | 29400 | -6600 | 4200 | 2370 | -25230 |
| $i,j+3$ | 140 | 16820 | 700 | -7700 | 1400 | -2200 | 1400 | 10 | 8410 |
| $i+1,j-2$ | -140 | -16820 | 700 | -7700 | -1400 | 2200 | 1400 | 10 | 8410 |
| $i+1,j-1$ | -33180 | -50460 | 52500 | -23100 | -29400 | 6600 | 4200 | 2370 | -25230 |
| $i+1,j$ | -235480 | 235480 | 107800 | 107800 | 30800 | -30800 | -19600 | 16820 | 16820 |
| $i+1,j+1$ | -235480 | -235480 | -107800 | -107800 | 30800 | 30800 | 19600 | 16820 | 16820 |
| $i+1,j+2$ | -33180 | 50460 | -52500 | 23100 | -29400 | -6600 | -4200 | 2370 | -25230 |
| $i+1,j+3$ | -140 | 16820 | -700 | 7700 | -1400 | -2200 | -1400 | 10 | 8410 |
| $i+2,j-2$ | 30 | -2370 | -150 | -3750 | 300 | -2100 | -300 | -15 | 1185 |
| $i+2,j-1$ | 7110 | -7110 | -11250 | -11250 | 6300 | -6300 | -900 | -3555 | -3555 |
| $i+2,j$ | 50460 | 33180 | -23100 | 52500 | -6600 | 29400 | 4200 | -25230 | 2370 |
| $i+2,j+1$ | 50460 | -33180 | 23100 | -52500 | -6600 | -29400 | -4200 | -25230 | 2370 |
| $i+2,j+2$ | 7110 | 7110 | 11250 | 11250 | 6300 | 6300 | 900 | -3555 | -3555 |
| $i+2,j+3$ | 30 | 2370 | 150 | 3750 | 300 | 2100 | 300 | -15 | 1185 |
| $i+3,j-2$ | 10 | -10 | -50 | -50 | 100 | -100 | -100 | 5 | 5 |

Продовження табл. 1

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$+3,$j$-1 | 2370 | -30 | -3750 | -150 | 2100 | -300 | -300 | 1185 | -15 |
| $i$+3,$j$ | 16820 | 140 | -7700 | 700 | -2200 | 1400 | 1400 | 8410 | 10 |
| $i$+3,$j$+1 | 16820 | -140 | 7700 | -700 | -2200 | -1400 | -1400 | 8410 | 10 |
| $i$+3,$j$+2 | 2370 | 30 | 3750 | 150 | 2100 | 300 | 300 | 1185 | -15 |
| $i$+3,$j$+3 | 10 | 10 | 50 | 50 | 100 | 100 | 100 | 5 | 5 |
| Індекс $p$ | $x^4y$ | $xy^4$ | $x^4y^2$ | $x^2y^4$ | $x^4y^3$ | $x^3y^4$ | $x^4y^4$ | $x^5$ | $y^5$ |
| $i$-2,$j$-2 | -25 | -25 | 50 | 50 | -50 | -50 | 25 | -1 | -1 |
| $i$-2,$j$-1 | -1875 | 75 | 1050 | -150 | -150 | 150 | -75 | -237 | 5 |
| $i$-2,$j$ | -3850 | -50 | -1100 | 100 | 700 | -100 | 50 | -1682 | -10 |
| $i$-2,$j$+1 | 3850 | -50 | -1100 | 100 | -700 | -100 | 50 | -1682 | 10 |
| $i$-2,$j$+2 | 1875 | 75 | 1050 | -150 | 150 | 150 | -75 | -237 | -5 |
| $i$-2,$j$+3 | 25 | -25 | 50 | 50 | 50 | -50 | 25 | -1 | 1 |
| $i$-1,$j$-2 | 75 | -1875 | -150 | 1050 | 150 | -150 | -75 | 5 | -237 |
| $i$-1,$j$-1 | 5625 | 5625 | -3150 | -3150 | 450 | 450 | 225 | 1185 | 1185 |
| $i$-1,$j$ | 11550 | -3750 | 3300 | 2100 | -2100 | -300 | -150 | 8410 | -2370 |
| $i$-1,$j$+1 | -11550 | -3750 | 3300 | 2100 | 2100 | -300 | -150 | 8410 | 2370 |
| $i$-1,$j$+2 | -5625 | 5625 | -3150 | -3150 | -450 | 450 | 225 | 1185 | -1185 |
| $i$-1,$j$+3 | -75 | -1875 | -150 | 1050 | -150 | -150 | -75 | 5 | 237 |
| $i$,$j$-2 | -50 | -3850 | 100 | -1100 | -100 | 700 | 50 | -10 | -1682 |
| $i$,$j$-1 | -3750 | 11550 | 2100 | 3300 | -300 | -2100 | -150 | -2370 | 8410 |
| $i$,$j$ | -7700 | -7700 | -2200 | -2200 | 1400 | 1400 | 100 | -16820 | -16820 |
| $i$,$j$+1 | 7700 | -7700 | -2200 | -2200 | -1400 | 1400 | 100 | -16820 | 16820 |
| $i$,$j$+2 | 3750 | 11550 | 2100 | 3300 | 300 | -2100 | -150 | -2370 | -8410 |
| $i$,$j$+3 | 50 | -3850 | 100 | -1100 | 100 | 700 | 50 | -10 | 1682 |
| $i$+1,$j$-2 | -50 | 3850 | 100 | -1100 | -100 | -700 | 50 | 10 | -1682 |
| $i$+1,$j$-1 | -3750 | -11550 | 2100 | 3300 | -300 | 2100 | -150 | 2370 | 8410 |
| $i$+1,$j$ | -7700 | 7700 | -2200 | -2200 | 1400 | -1400 | 100 | 16820 | -16820 |
| $i$+1,$j$+1 | 7700 | 7700 | -2200 | -2200 | -1400 | -1400 | 100 | 16820 | 16820 |
| $i$+1,$j$+2 | 3750 | -11550 | 2100 | 3300 | 300 | 2100 | -150 | 2370 | -8410 |
| $i$+1,$j$+3 | 50 | 3850 | 100 | -1100 | 100 | -700 | 50 | 10 | 1682 |
| $i$+2,$j$-2 | 75 | 1875 | -150 | 1050 | 150 | 150 | -75 | -5 | -237 |
| $i$+2,$j$-1 | 5625 | -5625 | -3150 | -3150 | 450 | -450 | 225 | -1185 | 1185 |
| $i$+2,$j$ | 11550 | 3750 | 3300 | 2100 | -2100 | 300 | -150 | -8410 | -2370 |
| $i$+2,$j$+1 | -11550 | 3750 | 3300 | 2100 | 2100 | 300 | -150 | -8410 | 2370 |
| $i$+2,$j$+2 | -5625 | -5625 | -3150 | -3150 | -450 | -450 | 225 | -1185 | -1185 |
| $i$+2,$j$+3 | -75 | 1875 | -150 | 1050 | -150 | 150 | -75 | -5 | 237 |
| $i$+3,$j$-2 | -25 | 25 | 50 | 50 | -50 | 50 | 25 | 1 | -1 |
| $i$+3,$j$-1 | -1875 | -75 | 1050 | -150 | -150 | -150 | -75 | 237 | 5 |

*Продовження табл. 1*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$+3,$j$ | -3850 | 50 | -1100 | 100 | 700 | 100 | 50 | 1682 | -10 |
| $i$+3,$j$+1 | 3850 | 50 | -1100 | 100 | -700 | 100 | 50 | 1682 | 10 |
| $i$+3,$j$+2 | 1875 | -75 | 1050 | -150 | 150 | -150 | -75 | 237 | -5 |
| $i$+3,$j$+3 | 25 | 25 | 50 | 50 | 50 | 50 | 25 | 1 | 1 |
| Індекс $p$ | $x^5y$ | $xy^5$ | $x^5y^2$ | $x^2y^5$ | $x^5y^3$ | $x^3y^5$ | $x^5y^4$ | $x^4y^5$ | $x^5y^5$ |
| $i$-2,$j$-2 | 5 | 5 | -10 | -10 | 10 | 10 | -5 | -5 | 1 |
| $i$-2,$j$-1 | 375 | -25 | -210 | 50 | 30 | -50 | 15 | 25 | -5 |
| $i$-2,$j$ | 770 | 50 | 220 | -100 | -140 | 100 | -10 | -50 | 10 |
| $i$-2,$j$+1 | -770 | -50 | 220 | 100 | 140 | -100 | -10 | 50 | -10 |
| $i$-2,$j$+2 | -375 | 25 | -210 | -50 | -30 | 50 | 15 | -25 | 5 |
| $i$-2,$j$+3 | -5 | -5 | -10 | 10 | -10 | -10 | -5 | 5 | -1 |
| $i$-1,$j$-2 | -25 | 375 | 50 | -210 | -50 | 30 | 25 | 15 | -5 |
| $i$-1,$j$-1 | -1875 | -1875 | 1050 | 1050 | -150 | -150 | -75 | -75 | 25 |
| $i$-1,$j$ | -3850 | 3750 | -1100 | -2100 | 700 | 300 | 50 | 150 | -50 |
| $i$-1,$j$+1 | 3850 | -3750 | -1100 | 2100 | -700 | -300 | 50 | -150 | 50 |
| $i$-1,$j$+2 | 1875 | 1875 | 1050 | -1050 | 150 | 150 | -75 | 75 | -25 |
| $i$-1,$j$+3 | 25 | -375 | 50 | 210 | 50 | -30 | 25 | -15 | 5 |
| $i$,$j$-2 | 50 | 770 | -100 | 220 | 100 | -140 | -50 | -10 | 10 |
| $i$,$j$-1 | 3750 | -3850 | -2100 | -1100 | 300 | 700 | 150 | 50 | -50 |
| $i$,$j$ | 7700 | 7700 | 2200 | 2200 | -1400 | -1400 | -100 | -100 | 100 |
| $i$,$j$+1 | -7700 | -7700 | 2200 | -2200 | 1400 | 1400 | -100 | 100 | -100 |
| $i$,$j$+2 | -3750 | 3850 | -2100 | 1100 | -300 | -700 | 150 | -50 | 50 |
| $i$,$j$+3 | -50 | -770 | -100 | -220 | -100 | 140 | -50 | 10 | -10 |
| $i$+1,$j$-2 | -50 | -770 | 100 | 220 | -100 | 140 | 50 | -10 | -10 |
| $i$+1,$j$-1 | -3750 | 3850 | 2100 | -1100 | -300 | -700 | -150 | 50 | 50 |
| $i$+1,$j$ | -7700 | -7700 | -2200 | 2200 | 1400 | 1400 | 100 | -100 | -100 |
| $i$+1,$j$+1 | 7700 | 7700 | -2200 | -2200 | -1400 | -1400 | 100 | 100 | 100 |
| $i$+1,$j$+2 | 3750 | -3850 | 2100 | 1100 | 300 | 700 | -150 | -50 | -50 |
| $i$+1,$j$+3 | 50 | 770 | 100 | -220 | 100 | -140 | 50 | 10 | 10 |
| $i$+2,$j$-2 | 25 | -375 | -50 | -210 | 50 | -30 | -25 | 15 | 5 |
| $i$+2,$j$-1 | 1875 | 1875 | -1050 | 1050 | 150 | 150 | 75 | -75 | -25 |
| $i$+2,$j$ | 3850 | -3750 | 1100 | -2100 | -700 | -300 | -50 | 150 | 50 |
| $i$+2,$j$+1 | -3850 | 3750 | 1100 | 2100 | 700 | 300 | -50 | -150 | -50 |
| $i$+2,$j$+2 | -1875 | -1875 | -1050 | -1050 | -150 | -150 | 75 | 75 | 25 |
| $i$+2,$j$+3 | -25 | 375 | -50 | 210 | -50 | 30 | -25 | -15 | -5 |
| $i$+3,$j$-2 | -5 | -5 | 10 | -10 | -10 | -10 | 5 | -5 | -1 |
| $i$+3,$j$-1 | -375 | 25 | 210 | 50 | -30 | 50 | -15 | 25 | 5 |
| $i$+3,$j$ | -770 | -50 | -220 | -100 | 140 | -100 | 10 | -50 | -10 |

*Закінчення табл. 1*

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i+3,j+1$ | 770 | 50 | -220 | 100 | -140 | 100 | 10 | 50 | 10 |
| $i+3,j+2$ | 375 | -25 | 210 | -50 | 30 | -50 | -15 | -25 | -5 |
| $i+3,j+3$ | 5 | 5 | 10 | 10 | 10 | 10 | 5 | 5 | 1 |

**Примітка.** При реалізації обчислювальної схеми всі, коефіцієнти мають бути поділені на число 14745600.

Для значення функції $p(t,q)$ на $(i,j)$-му елементі розбиття можемо записати:

$$\left|p(t,q)-S_{5,0}(p,t,q)\right|\le\left|p(t,q)-S_{5,0}(\overline{p},t,q)\right|+\varepsilon\left\|S_{5,0}\right\|,\quad (5)$$

де $\varepsilon=\max\limits_{i,j}\left\{\varepsilon_{i,j}\right\}$; $\left\|S_{5,0}\right\|=\sup\limits_{\left|\varepsilon_{i,j}\right|\le 1}\max\limits_{t,q}\left|S_{5,0}(\varepsilon,t,q)\right|$.

Таким чином, для визначення якості апроксимації функції $p(t,q)$ сплайном (3), необхідно оцінити кожен із складників правої частини (5).

**Теорема 1.** Якщо $p(t,q)\in C^{3,3}$, то при $h_t\to 0$, $h_q\to 0$ рівномірно за $t$ і $q$ має місце асимптотична рівність

$$p(t,q)-S_{5,0}(\overline{p},t)=-\frac{7h_t^2}{24}\cdot p''_{t^2}(t,q)-\frac{7h_q^2}{24}\cdot p''_{q^2}(t,q)-$$
$$-\frac{49h_t^2h_q^2}{576}\cdot p^{(4)}_{t^2q^2}(t,q)+o\left(h^4\right),$$

де $h=\max\left\{h_t,h_q\right\}$.

**Доведення.** Розглянемо розкладення функції $p(t,q)\in C^{3,3}$ у ряд Тейлора поблизу точки $\left((i-0,5)h_t;(j-0,5)h_q\right)$:

$$p(t,q)=p(t^*,q^*)+p'_t(t^*,q^*)\tau+p'_q(t^*,q^*)\nu+\frac{1}{2}p''_{t^2}(t^*,q^*)\tau^2+$$
$$+p''_{tq}(t^*,q^*)\tau\nu+\frac{1}{2}p''_{q^2}(t^*,q^*)\nu^2+\frac{1}{6}p'''_{t^3}(t^*,q^*)\tau^3+\frac{1}{2}p'''_{t^2q}(t^*,q^*)\tau^2\nu+$$
$$+\frac{1}{2}p'''_{tq^2}(t^*,q^*)\tau\nu^2+\frac{1}{6}p'''_{q^3}(t^*,q^*)\nu^3+\frac{1}{6}p^{(4)}_{t^3q}(t^*,q^*)\tau^3\nu+$$
$$+\frac{1}{6}p^{(4)}_{t^3q}(t^*,q^*)\tau^3\nu+\frac{1}{4}p^{(4)}_{t^2q^2}(t^*,q^*)\tau^2\nu^2+\frac{1}{6}p^{(4)}_{tq^3}(t^*,q^*)\tau\nu^3+$$

$$+\frac{1}{12}p^{(5)}_{t^3q^2}\left(t^*,q^*\right)\tau^3\nu^2+\frac{1}{12}p^{(5)}_{t^2q^3}\left(t^*,q^*\right)\tau^2\nu^3+\frac{1}{36}p^{(6)}_{t^3q^3}\left(t^*,q^*\right)\tau^3\nu^3+o\left(h^6\right),$$

де $t^*=\left(i-0,5\right)h_t$, $q^*=\left(j-0,5\right)h_q$, $\tau=t-t^*$, $\nu=q-q^*$.

Розкладення сплайну $S_{5,0}\left(\bar{p},t,q\right)$ у ряд Тейлора поблизу точки $\left(t^*,q^*\right)$ має вигляд:

$$S_{5,0}\left(\bar{p},t,q\right)=S_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)+S'_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_t\tau+S'_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_q\nu+$$

$$+\frac{1}{2}S''_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{t^2}\tau^2+S''_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{tq}\tau\nu+\frac{1}{2}S''_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{q^2}\nu^2+$$

$$+\frac{1}{6}S'''_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{t^3}\tau^3+\frac{1}{2}S'''_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{t^2q}\tau^2\nu+\frac{1}{2}S'''_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{tq^2}\tau\nu^2+$$

$$+\frac{1}{6}S'''_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{q^3}\nu^3+\frac{1}{6}S^{(4)}_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{t^3q}\tau^3\nu+\frac{1}{4}S^{(4)}_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{t^2q^2}\tau^2\nu^2+$$

$$+\frac{1}{6}S^{(4)}_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{tq^3}\tau\nu^3+\frac{1}{12}S^{(5)}_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{t^3q^2}\tau^3\nu^2+$$

$$+\frac{1}{12}S^{(5)}_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{t^2q^3}\tau^2\nu^3+\frac{1}{36}S^{(6)}_{5,0}\left(\bar{p},t^*,q^*\right)_{t^3q^3}\tau^3\nu^3,$$

або (з урахуванням розкладень в ряд Тейлора кожного із складників та величин $p_{ii,jj}$, $ii=\overline{i-2,i+3}$, $jj=\overline{j-2,j+3}$:

$$S_{5,0}\left(\bar{p},t,q\right)=p+\frac{7}{24}p''_{t^2}h_t^2+\frac{7}{24}p''_{q^2}h_q^2+\frac{49}{576}p^{(4)}_{t^2q^2}h_t^2h_q^2+p'_t\tau+$$

$$+\frac{7}{24}p'''_{t^3}h_t^2\tau+\frac{7}{24}p'''_{tq^2}h_q^2\tau+\frac{49}{576}p^{(5)}_{t^3q^2}h_t^2h_q^2\tau+p'_q\nu+\frac{7}{24}p'''_{t^2q}h_t^2\nu+$$

$$+\frac{7}{24}p'''_{q^3}h_q^2\nu+\frac{49}{576}p^{(5)}_{t^2q^3}h_t^2h_q^2\nu+\frac{1}{2}p^{(4)}_{t^2q^2}\tau^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{24}p^{(4)}_{t^2q^2}h_q^2\tau^2+$$

$$+p''_{tq}\tau\nu+\frac{7}{24}p^{(4)}_{t^3q}h_t^2\tau\nu+\frac{7}{24}p^{(4)}_{tq^3}h_q^2\tau\nu+\frac{49}{576}p^{(6)}_{t^3q^3}h_t^2h_q^2\tau\nu+\frac{1}{2}p^{(4)}_{t^2q^2}\nu^2+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{24}p^{(4)}_{t^2q^2}h_t^2\nu^2+\frac{1}{6}p'''_{t^3}\tau^3+\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{24}p^{(5)}_{t^3q^2}h_q^2\tau^3+\frac{1}{2}p'''_{t^2q}\tau^2\nu+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{24}p^{(5)}_{t^2q^3}h_q^2\tau^2\nu+$$

$$+\frac{1}{2}p'''_{tq^2}\tau\nu^2,$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{24}p^{(5)}_{t^3q^2}h_t^2\tau\nu^2+\frac{1}{6}p'''_{q^3}\nu^3+\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{24}p^{(5)}_{t^2q^3}h_t^2\nu^3+\frac{1}{6}p^{(4)}_{t^3q}\tau^3\nu+$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{24}p^{(6)}_{t^3q^3}h_q^2\tau^3\nu+\frac{1}{4}p^{(4)}_{t^2q^2}\tau^2\nu^2+\frac{1}{6}p^{(4)}_{tq^3}\tau\nu^3+\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{24}p^{(6)}_{t^3q^3}h_t^2\tau\nu^3+$$
$$+\frac{1}{12}p^{(5)}_{t^3q^2}\tau^3\nu^2+\frac{1}{12}p^{(5)}_{t^2q^3}\tau^2\nu^3+\frac{1}{36}p^{(6)}_{t^3q^3}\tau^3\nu^3+o\left(h^4\right).$$

Тоді

$$p(t,q)-S(\bar{p},t,q)=$$
$$=-\frac{7}{24}h_t^2\left(p''_{t^2}+p'''_{t^3}\tau+p'''_{t^2q}\nu+p^{(4)}_{t^3q}\tau\nu+\frac{1}{2}p^{(4)}_{t^2q^2}\nu^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}p^{(5)}_{t^3q^2}\tau\nu^2+\frac{1}{6}p^{(5)}_{t^2q^3}\nu^3+\frac{1}{6}p^{(6)}_{t^3q^3}\tau\nu^3\right)-\frac{7}{24}h_q^2\left(p''_{q^2}+p'''_{tq^2}\tau+p'''_{t^3}\nu+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}p^{(4)}_{t^2q^2}\tau^2+p^{(4)}_{tq^3}\tau\nu+\frac{1}{6}p^{(5)}_{t^3q^2}\tau^3+\frac{1}{2}p^{(5)}_{t^2q^3}\tau^2\nu+\frac{1}{6}p^{(6)}_{t^3q^3}\tau^3\nu\right)-$$
$$-\frac{49}{576}h_t^2h_q^2\left(p^{(4)}_{t^2q^2}+p^{(5)}_{t^3q^2}\tau+p^{(5)}_{t^2q^3}\nu+p^{(6)}_{t^3q^3}\tau\nu\right)+o\left(h^4\right)=$$
$$=-\frac{7}{24}h_t^2\cdot p''_{t^2}(t,q)-\frac{7}{24}h_q^2\cdot p''_{q^2}(t,q)-\frac{49}{576}h_t^2h_q^2\cdot p^{(4)}_{t^2q^2}(t,q)+o\left(h^4\right),$$

де $p''_{t^2}(t,q)=p''_{t^2}+p'''_{t^3}\tau+p'''_{t^2q}\nu+p^{(4)}_{t^3q}\tau\nu+\frac{1}{2}p^{(4)}_{t^2q^2}\nu^2+$

$$+\frac{1}{2}p^{(5)}_{t^3q^2}\tau\nu^2+\frac{1}{6}p^{(5)}_{t^2q^3}\nu^3+\frac{1}{6}p^{(6)}_{t^3q^3}\tau\nu^3;$$

$$p''_{q^2}(t,q)=p''_{q^2}+p'''_{tq^2}\tau+p'''_{t^3}\nu+\frac{1}{2}p^{(4)}_{t^2q^2}\tau^2+p^{(4)}_{tq^3}\tau\nu+$$
$$+\frac{1}{6}p^{(5)}_{t^3q^2}\tau^3+\frac{1}{2}p^{(5)}_{t^2q^3}\tau^2\nu+\frac{1}{6}p^{(6)}_{t^3q^3}\tau^3\nu;$$
$$p^{(4)}_{t^2q^2}(t,q)=p^{(4)}_{t^2q^2}+p^{(5)}_{t^3q^2}\tau+p^{(5)}_{t^2q^3}\nu+p^{(6)}_{t^3q^3}\tau\nu,$$

– розкладення у ряд Тейлора похідних функції $p(t,q)\in C^{3,3}$ поблизу точки $(t^*,q^*)$.

Теорему доведено.

**Слідство 1.** При $h_t \to 0$, $h_q \to 0$ для $\forall p(t,q) \in C^{3,3}$ є вірним

$$\left\| p(t,q) - S_{5,0}(\overline{p},t) \right\| = \frac{7h_t^2}{24} \cdot \left\| p''_{t^2}(t,q) \right\| + \frac{7h_q^2}{24} \cdot \left\| p''_{q^2}(t,q) \right\| +$$

$$+ \frac{49 h_t^2 h_q^2}{576} \cdot \left\| p^{(4)}_{t^2 q^2}(t,q) \right\| + o\left(h^4\right),$$

де $h = \max\left\{h_t, h_q\right\}$.

Проведемо оцінку норми сплайну (3).

**Теорема 2.** Для сплайну $S_{5,0}(p,t,q)$ є вірним

$$\left\| S_{5,0} \right\| = \left\| p \right\|.$$

**Доведення.** З урахуванням коефіцієнтів при маномах (табл.1) та здійснивши перегрупування відносно $p_{ii,jj}$, $ii = \overline{i-2, i+3}$, $jj = \overline{j-2, j+3}$, будемо розглядати представлення $S_{5,0}(p,t,q)$ у вигляді:

$$S_{5,0}(p,t,q) = \left(\frac{1}{3840}\right)^2 \Big( p_{i-2,j-2}(1-x)^5 (1-y)^5 +$$

$$+ p_{i-2,j-1}(1-x)^5 \left(237 - 375y + 210y^2 - 30y^3 - 15y^4 + 5y^5\right) +$$

$$+ \ldots +$$

$$+ p_{i,j+3}\left(1682 - 770x - 220x^2 + 140x^3 + 10x^4 - 10x^5\right)(1+y)^5 +$$

$$+ p_{i+1,j-2}\left(1682 + 770x - 220x^2 - 140x^3 + 10x^4 + 10x^5\right)(1-y)^5 +$$

$$+ \ldots +$$

$$+ p_{i+3,j+2}(1+x)^5 \left(237 + 375y + 210y^2 + 30y^3 - 15y^4 - 5y^5\right) +$$

$$+ p_{i+3,j+3}(1+x)^5 (1+y)^5 \Big),$$

де $x = \frac{2}{h_t}\left(t - ih_t\right)$, $|x| \le 1$; $y = \frac{2}{h_q}\left(q - ih_q\right)$, $|y| \le 1$.

Тоді $$\left\|S_{5,0}\right\| \le \frac{1}{3840^2}\|p\| \max_{|x|\le 1;|y|\le 1} A(x,y),$$

де

$$A(x,y)=\left|(1-x)^5(1-y)^5\right|+\left|(1-x)^5\left(237-375y+210y^2-30y^3-15y^4+5y^5\right)\right|+$$

$$+\left|(1-x)^5\left(1682-770y-220y^2+140y^3+10y^4-10y^5\right)\right|+$$

$$+\ldots+$$

$$+\left|(1+x)^5\left(1682+770y-220y^2-140y^3+10y^4+10y^5\right)\right|+$$

$$+\left|(1+x)^5\left(237+375y+210y^2+30y^3-15y^4-5y^5\right)\right|+\left|(1+x)^5(1+y)^5\right|.$$

Враховуючи, що функція $A(x,y)$ парна, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для $x\in[0;1]$, $y\in[0;1]$. Для цих $x$, $y$, зважаючи, що вирази під знаком модуля більші нуля, маємо:

$$\max_{x\in[0;1];y\in[0;1]} A(x,y)=3840^2.$$

Таким чином

$$\left\|S_{5,0}\right\| \le \|p\|. \tag{6}$$

З іншого боку для будь-якого частинного випадку

$$\left\|S_{5,0}(p)\right\| \ge \left\|S_{5,0}\left(p^*\right)\right\|.$$

Тоді для $x=0$, $y=0$ маємо

$$S_{5,0}\left(\overline{p},t^*,q^*\right)=\left(\frac{1}{3840}\right)^2\left(p^*_{i-2,j-2}+237p^*_{i-2,j-1}+1682p^*_{i-2,j}+\right.$$

$$+1682p^*_{i-2,j+1}+237p^*_{i-2,j+2}+$$

$$+p^*_{i-2,j+3}+237p^*_{i-1,j-2}+237^2p^*_{i-1,j-1}+$$

$$+398634p^*_{i-1,j}+398634p^*_{i-1,j+1}+237^2p^*_{i-1,j+2}+237p^*_{i-1,j+3}+1682p^*_{i,j-2}+$$

$$+398634p^*_{i,j-1}+1682^2p^*_{i,j}+1682^2p^*_{i,j+1}+398634p^*_{i,j+2}+1682p^*_{i,j+3}+$$

$$+1682p^*_{i+1,j-2}+398634p^*_{i+1,j-1}+1682^2p^*_{i+1,j}+1682^2p^*_{i+1,j+1}+$$

$$+398634 p^{*}_{i+1,j+2} +1682 p^{*}_{i+1,j+3} +237 p^{*}_{i+2,j-2} + 237^2 p_{i+2,j-1} +$$
$$+398634 p^{*}_{i+2,j} + 398634 p^{*}_{i+2,j+1} + 237^2 p^{*}_{i+2,j+2} +$$
$$+237 p^{*}_{i+2,j+3} +$$
$$+p^{*}_{i+3,j-2} +237 p^{*}_{i+3,j-1} +1682 p^{*}_{i+3,j} +1682 p^{*}_{i+3,j+1} +237 p^{*}_{i+3,j+2} + p^{*}_{i+3,j+3} \Big).$$

Якщо

$$p^{*}_{i-2,j-2} = p^{*}_{i-2,j-1} = \ldots = p^{*}_{i+2,j+2} = p^{*}_{i+2,j+3} = \|p\|,$$

то

$$\left\|S_{5,0}(p)\right\| \geq \left\|S_{5,0}\left(p^{*}\right)\right\| \geq \left|S_{5,0}\left(p^{*},0,0\right)\right| = \|p\|,$$

а отже, з урахуванням (6), приходимо, що

$$\left\|S_{5,0}\right\| = \|p\|.$$

Теорему доведено.

**Слідство 2.** Для $\forall p(t,q) \in C^{3,3}$ має місце

$$\left\|p(t,q) - S_{5,0}(p,t)\right\| \leq \frac{7h_t^2}{24}\left\|p''_{t^2}(t,q)\right\| + \frac{7h_q^2}{24}\left\|p''_{q^2}(t,q)\right\| +$$
$$+\frac{49 h_t^2 h_q^2}{576}\left\|p^{(4)}_{t^2 q^2}(t,q)\right\| + \varepsilon\|p\| + \mathrm{o}\left(h^4\right),$$

де $h = \max\left\{h_t, h_q\right\}$.

**Висновки.** У роботі отримано коефіцієнти при маномах двовимірного поліноміального сплайну на основі *B*-сплайнів п’ятого порядку, близького до інтерполяційних у середньому. Знайдено похибку апроксимації зазначеним сплайном гладких функції двох змінних, отримано норму сплайн-оператора.

Підтверджено, що загальні властивості похибки апроксимації є аналогічними, як і для сплайнів на основі лінійних комбінацій *B*-сплайнів другого, третього та четвертого порядків. Останнє дозволяє припускати можливість узагальнення подібних оцінок якості апроксимації для сплайнів кількості змінних три та більше.

Уведений та досліджений сплайн може мати застосування при розробці обчислювальних схем як при застосуванні безпосередньо явного вигляду, так і при використанні часткових випадків при конкретних значеннях аргументів у межах локального носія – при розв’язанні задач низкочастотної фільтрації, масштабування послідовностей відліків двовимірних функцій, при побудові контрастних та комбінованих фільтрів.

## Бібліографічні посилання


1. **Лигун А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых./ А.А. Лигун, А.А. Шумейко. – К., 1996. – 358 с.
2. **Лигун А.А.** О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка./ А.А. Лигун, В.В. Кармазина – Днепродзержинск, 1989. – 30 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, N1559- Ук89.
3. **Лигун А.А.** Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов/ А.А. Лигун, В.В. Кармазина – Днепродзержинск, 1989. – 38 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 13.11.89, N2569 – Ук89.
4. **Приставка П.О.** Поліномаільні сплайни при обробці даних. – Д., 2004. – 236 с.
5. **Приставка П.О.** Дослідження *B*-сплайну п’ятого порядку та їх лінійної комбінації/ П.О. Приставка, О.Г. Чолишкіна // Математичне моделювання. – 2007. – №1(16). – С.14 – 17.



*Надійшла до редколегії 29.05.08.*