УДК 681.5.015: 378

О.М. Савінов

Національний авіаційний університет

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВИКОРИСТАННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ ТА ЛОГІСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЯКОСТІ НАВЧАННЯ

Розглянуто задачу переходу від експоненціальних до логістичних моделей. Проаналізовано вплив параметрів на помилку апроксимації експоненти логістичною SL-функцією. Запропоновано аналітичний метод знаходження оптимальних параметрів SL-функції для мінімізації помилки апроксимації.

Ключові слова: *експоненціальна модель, логістична модель, логістичне рівняння, SL-функція.*

Рассмотрена задача перехода от экспоненциальных к логистическим моделям. Проанализировано влияние параметров на ошибку аппроксимации экспоненты логистической SL-функцией. Предложен аналитический метод нахождения оптимальных параметров SL-функции для минимизации ошибки аппроксимации.

Ключевые слова: *экспоненкциальная модель, логистическая модель, логистическое уравнение, SL-функция.*

Handled a task of transition from exponential to logistic model. Analyzed parameter influence to error of approximation exponent by logistic SL-function. Proposed analytic method for SL-function optimal parameters finding for minimum approximation error.

Keywords: *exponential model, logistic model, logistic equation, SL-function.*

Постановка проблеми. Прогнозування якості навчання необхідне для контролю його процесу та обґрунтованого підбору найбільш ефективних методів навчання або корегування методики навчання в реальному масштабі часу (так зване, адаптивне навчання). Найкращий експромт – це добра заготовка. Попереднє прогнозування динаміки навчання спрощує задачу педагога, оскільки основні непередбачені проблеми будуть виникати лише внаслідок позаштатних ситуацій, вірогідність виникнення яких набагато менше.

Побудова моделі пов'язана з одного боку з намаганням врахувати якомога більше факторів та особливостей процесу навчання, що веде до ускладнення моделі. З іншого боку існує вимога простоти моделі, оскільки це спрощує її наповнення вхідними даними, своєчасне

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ АВТОМАТИЗАЦІЇ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ. Том 14. 2010

корегування параметрів відповідно до зміни ситуації та забезпечує наочність результатів з метою постійного контролю відповідності математичного моделювання фізичному змісту процесу, що моделюється. Отже перевага віддається грубим моделям.

Серед грубих моделей розвитку, зокрема навчання, найбільш поширені лінійні, експоненціальні та логістичні. Лінійні моделі зберігають адекватність лише в околиці точки лінеаризації. Отже перевага віддається двом останнім.

Оскільки мова йде про складні багатопов'язані моделі, то їх побудова та використання набагато спрощуються, якщо вони використовують в якості базової якісь один з типів моделей. У такому випадку питання переходу від експоненціальних до логістичних моделей та навпаки – є актуальним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Експоненціальні моделі використовуються різними авторами у випадках, коли розглядається лише етап зростання [1-2]. Якщо розглядається весь життєвий цикл розвитку (зростання, стабілізація, падіння), то більш адекватними є логістичні моделі [2-5]. Не зважаючи на поширеність обох видів моделей, питання їх взаємних перетворень практично не досліджені [6].

Метою статті є розвиток методів перетворень експоненціальних залежностей до логістичних та оцінка відповідних похибок при різних параметрах залежностей. Ці похибки будемо називати похибками апроксимації однієї залежності іншою.

Викладення основного матеріалу. Для порівняння експоненти та ділянки пробудження росту SL- функції проаналізуємо похибку апроксимації експоненти $y(x) = 0.5 \cdot e^{(1/T_{\exp})x}$ SL-функцією $SL(x) = 1/(1+e^{-(2/T)\cdot x})$ на ділянці пробудження росту. Встановимо співвідношення між відповідними постійними часу $T_{\exp} = T/k$, де k - позитивний коефіцієнт. Для спрощення порівняння зсунемо SL-функцію вздовж вісі абсцис так, щоб центр симетрії лежав на вісі ординат, а експоненту масштабуємо вздовж вісі ординат так, щоб вона проходила через центр симетрії SL- функції. Функцію похибки завдамо у вигляді:

$$Er(x) = y(x) - SL(x). \tag{1}$$

Дослідимо вплив параметрів T і k на функцію похибки.

Моделювання свідчить (рис.1), що максимум величини помилки не залежить (або майже не залежить) від абсолютної величини постійних часу, якщо між ними є жорстко встановлене співвідношення.

Абсолютна величина постійних часу впливає лише на місцезнаходження точки максимуму помилки вздовж вісі абсцис. Якщо при фіксованому T міняти k, то абсциса точки максимуму буде змінюватись несуттєво (рис. 2), а величина максимальної помилки буде змінюватися. У нашому випадку співвідношення постійних часу оптимальне за мінімумом похибки досягається при $k \approx 1.34$.

Спробуємо аналітично мінімізувати максимально можливу похибку. Для знаходження екстремумів прирівняємо нулю першу похідну функції похибки та виконаємо необхідні перетворення

$$0.5 \cdot \frac{\left(\frac{k}{T}\cdot e^{\frac{k}{T}\cdot x}+\frac{(k-2)}{T}\cdot e^{\frac{(k-2)}{T}\cdot x}\right)\cdot\left(1+e^{-\frac{2}{T}\cdot x}\right)+\frac{2}{T}\cdot e^{-\frac{2}{T}\cdot x}\cdot\left(e^{\frac{k}{T}\cdot x}+e^{\frac{(k-2)}{T}\cdot x}-2\right)}{\left(1+e^{-\frac{2}{T}\cdot x}\right)^2}=0;$$

$$1+2\cdot e^{-\frac{2}{T}\cdot x}+e^{-\frac{4}{T}\cdot x}-\frac{4}{k}\cdot e^{\frac{-k-2}{T}\cdot x}=0. \qquad (2)$$

Позначимо $y=e^{-\frac{1}{T}\cdot x}$, підставимо в (2) і перетворимо

$$y^4+2\cdot y^2+1-\frac{4}{k}\cdot y^{2+k}=(1+y^2)^2-\frac{4}{k}\cdot y^{2+k}=0. \qquad (3)$$

Корні y_i рівняння (3) залежать лише від параметра k. Перехід від координати y до координати x залежить від постійної часу

$$x_i=-T\cdot\ln y_i. \qquad (4)$$

Запропонована процедура дозволяє рішення рівнянням (2) декомпозувати процедуру знайдення параметрів залежностей оптимальних за мінімумом похибки апроксимації. Для визначення величини максимальної похибки підставимо (4) в (1)

$$Er(x_i)=0.5\cdot\frac{e^{-\frac{k}{T}\cdot T\cdot\ln y_i}+e^{-\frac{(k-2)}{T}\cdot T\cdot\ln y_i}-2}{1+e^{\frac{2}{T}\cdot T\cdot\ln y_i}}=0.5\cdot\frac{y_i^{-k}+y_i^{2-k}-2}{1+y_i^2}= \qquad (5)$$

$$=0.5\cdot\frac{y_i^{-k}(1+y_i^2)-2}{1+y_i^2}=\frac{1}{2y_i^k}-\frac{1}{1+y_i^2}.$$

Як видно з (5) величина похибки в точці екстремуму залежить від k і від коренів рівняння (3), які теж залежать від k. Величина

похибки не залежить від T, а залежить лише розташування точки екстремуму вздовж вісі абсцис. Ординати точок екстремумів залежать лише від k.

Розглянемо **окремий випадок:** $k=1$. Рівняння (3) приймає вигляд

$$z_4(y)=y^4-4\cdot y^3+2\cdot y^2+1=$$

$$=(y-1)\cdot(y^3-3\cdot y^2-y-1)=(y-1)\cdot z_3(y)=0.$$

Перший корінь знаходимо розкладенням на множники. Інші чисельно (рис. 3). $y_1=1$; $x_1=0$; $y_2=3{,}382976$; $x_2=1{,}219\cdot T$.

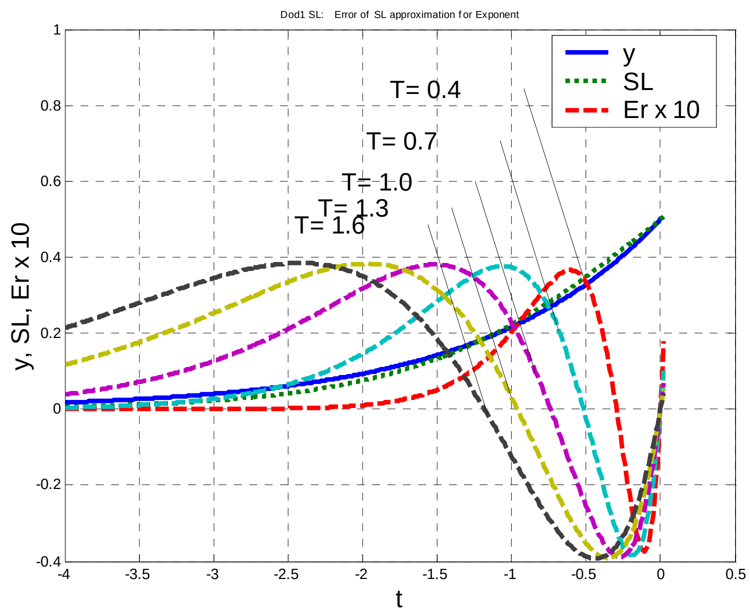

Рис. 1. Похибка апроксимації експоненти логістичною функцією при різних значеннях постійних часу

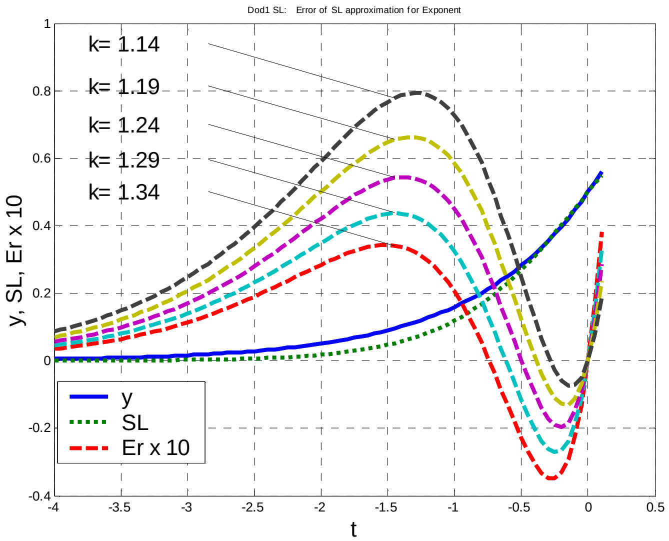

Рис. 2. Похибка апроксимації експоненти логістичною функцією при різних значеннях позитивного коефіцієнта k

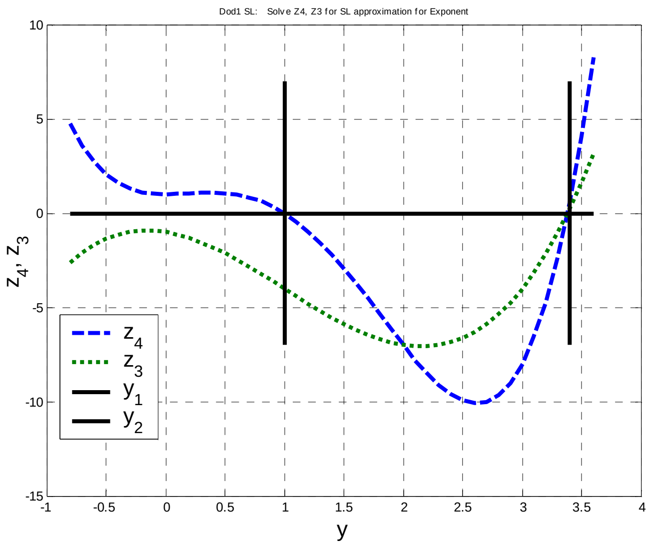

Рис. 3. Знаходження величини похибки апроксимації при $k=1$

Окремий випадок: $k=2$. Рівняння (3) приймає вигляд

$$y^4 - 2\cdot y^2 - 1 = 0$$

Розв'язуючі біквадратне рівняння знаходимо $x = -T \cdot \ln\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Аналітичні методи дають можливість знаходити оптимальні параметри апроксимаційних залежностей лише в окремих випадках. При вирішенні практичних задач більш універсальними є чисельні методи. Наприклад, на підставі прямих варіаційних методів (методу покоординатного спуску) були знайдені оптимальні параметри SL-функції для апроксимації експоненти для розглянутої вище задачі. Знайдені параметри забезпечують похибку в межах 2 – 3 % (рис.4).

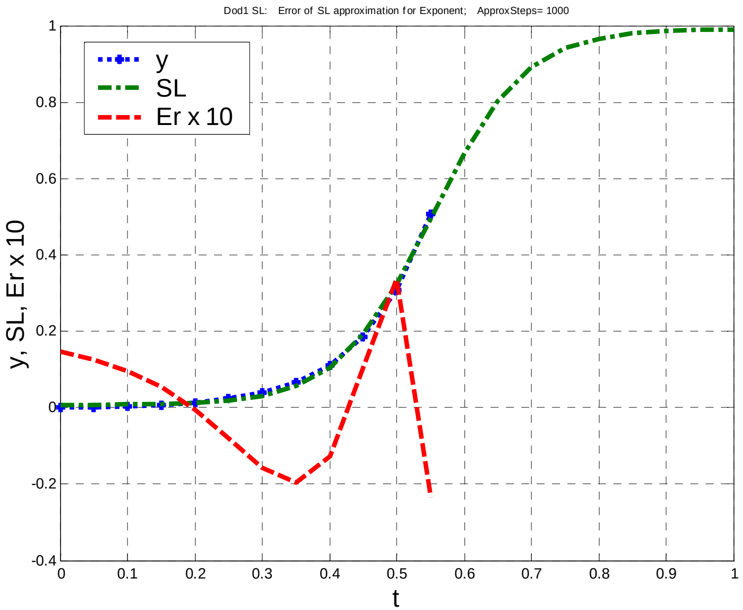

Рис. 4. Знаходження оптимальних параметрів SL-функції при $k=2$

Висновки. Таким чином у статті досліджено вплив параметрів логістичного рівняння на помилку апроксимації експоненти логістичною SL-функцією. Запропоновано аналітичний метод знаходження оптимальних параметрів SL-функції для мінімізації помилки.

Подальші дослідження слід присвятити аналізу існуючих експоненціальних та логістичних моделей навчання та визначенню умов та ситуацій доцільності їх взаємного перетворення шляхом апроксимації із урахуванням відповідних похибок.

Бібліографічні посилання

1. **Гуд Г.Х**. Системотехника. Введение в проектирование больших систем. Пер. с англ. / Г.Х. Гуд, Р.Є. Макол– М., 1962. – 383 с.

2. **Кузнецов Ю.М**., Скляров Р.А. Прогнозування розвитку технічних систем / Ю. М. Кузнецов, Р. А. Скляров; ред. Ю. М. Кузнецова. – К., 2004. – 323 с.

3. **Зайцев Г.Н.** Математический анализ биологических данных. / Г. Н. Зайцев – М., 1991. – 184 с.

4. **Медведева Н.Б.** Динамика логистической функции / Н. Б. Медведева // Соросовский Образовательный Журнал. – 2000. – №8. – С. 121 – 127.

5. **Амелькин В.В.** Дифференциальные уравнения в приложениях. / В. В. Амелькин – М., 1987. – 160 с.

6. **Шевченко В.Л.** Зв'язок логістичних моделей з лінійними та експоненціальними моделями розвитку об'єктів оборонного планування / Інформатика, управління та обчислювальна техніка. / В. Л. Шевченко. // Вісник НТУУ «КПІ». – 2006. – Вип.44 – С.3 – 18.

Надійшла до редколегії 25.05.10

УДК 519.816

К. Т. Кузьма

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

АНАЛІЗ МЕТОДІВ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Виконано аналіз та систематизацію методів прийняття рішень.

Ключові слова: *прийняття рішень, багатокритеріальна теорія корисності, методи компенсації, методи порогів незрівнянності.*

Выполнен анализ и систематизацию методов принятия решений.

Ключевые слова: *принятие решений, многокритериальная теория полезности, методы компенсации, методы порогов несравнимости.*

The analysis and systematization of decision-making methods were performed.

Keywords: *decision-making, multicriteria utility theory, Payment Methods, thresholds incomparability Methods.*

Постановка завдання. На змістовному рівні під «прийняттям рішень» розуміють процес людської діяльності, направлений на вибір якнайкращого варіанта дій. Вибір або прийняття рішень – це дія над множиною альтернатив, увнаслідок якої спочатку виходить підмножина заздалегідь відібраних альтернатив, а на завершальному етапі – одна альтернатива, якнайкраща згідно з прийнятим критерієм оцінки якості досягнення поставленої мети [1]. Для цього необхідно проаналізувати особливості та обмеження, а потім на їхній базі обрати найбільш оптимальне рішення. Прийняття рішень може базуватися як на експертних методах так і на методах сучасної прикладної математики. Існування в даний час численних публікацій по методах вирішення багатокритеріальних завдань оптимізації і дослідження операцій, теорії і методам прийняття рішень, відображає різні підходи до вказаних проблем, що ускладнює їх цілісне розуміння і однозначне трактування. Метою даної роботи є проведення аналізу і класифікація існуючих методів прийняття рішень, що полегшить їх правильне застосування залежно від вирішуваних прикладних завдань.

Виклад основного матеріалу. Не існує загальноприйнятої універсальної класифікаційної схеми задач прийняття рішень. Але можна виділити деякі важливі класифікаційні ознаки: