

УДК 519.652:519.254

П.О. Приставка

*Національний авіаційний університет*

### ОБРОБКА СИГНАЛІВ З ВИСОКОЧАСТОТНОЮ ЗАВАДОЮ НА ОСНОВІ ЧАСТКОВИХ ВИПАДКІВ КОМБІНАЦІЙ В-СПЛАЙНІВ

Для обробки цифрових сигналів спотворених впливом високочастотної гаусової завади пропонується підхід на основі часткових випадків лінійних комбінацій В-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому. В основу обчислювальних процедур покладено оператори низькочастотної фільтрації, масштабування та процедур subdivision.

**Ключові слова:** *цифрова обробка сигналів, фільтрація, сплайн, вейвлет.*

Для обработки цифровых сигналов искаженных влиянием высокочастотной гауссовой помехи предлагается подход на основании частных случаев линейных комбинаций В-сплайнов, близких к интерполяционному в среднем. В основу вычислительных процедур положены операторы низкочастотной фильтрации, масштабирования и процедур subdivision.

**Ключевые слова:** *Цифровая обработка сигналов, фильтрация, сплайн, вейвлет.*

For processing digital signals distorted by the influence of high-frequency Gaussian noise, an approach based on partial cases of linear combinations of B-splines that are close to the interpolation in the mean was proposed. Computing procedures are based on operators of low frequency filtering, zooming, and procedures for subdivision.

**Keywords:** *Digital signal processing, filtering, spline, wavelet.*

**Постановка проблеми.** Однією з головних задач цифрової обробки сигналів є визначення істинних параметрів сигналу, спотвореного дією завади або середовища, через яке сигнал передається. За більш, ніж п'ятдесятирічну історію розвитку теорії обробки сигналів запропоновано та успішно використовуються десятки методів виділення зашумленого сигналу, проте, останнім часом привабливість у дослідників отримали методи вейвлет-аналізу. Обумовлено це, насамперед, обчислювальною простотою обробки на основі вейвлет-технологій. До не багатьох недоліків вейвлетів відносять те, що не завжди вони представлені в аналітичному вигляді, що, певною мірою, обмежує їх дослідження.

Варто відзначити, що існують вейвлети, отримані за використанням часткових випадків неперервних апроксимацій, зокрема, лінійних комбінацій В-сплайнів. Такі вейвлети (або лінійні оператори з властивостями, близькими до властивостей вейвлетів) добре відомі та мають широке застосування у практиці обробки сигналів [1; 2]. Однак, певний інтерес можуть являти дослідження властивостей часткових випадків лінійних комбінацій В-сплайнів порядку вище четвертого, близьких до інтерполяційних у середньому, причому як при низькочастотній фільтрації, так і для отримання обчислювальних процедур масштабування.

**Аналіз публікацій та постановка задачі.** Нехай  $p(t) \in L_2(\mathbb{R})$  – аналоговий сигнал з кінцевою енергією, що визначається його нормою  $\|p(t)\|_{L_2} = \langle p(t), p(t) \rangle^{1/2}$ , заданий дискретно  $\{p_i\} \in l_2(\mathbb{Z})$  (цифровий сигнал) відліками на рівномірному розбитті  $\Delta_h : t_i = ih, i \in \mathbb{Z}$ . Будемо вважати, що при фіксації аналогового сигналу має місце наступне. Нехай  $\phi(t)$  – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал  $p(t)$ , при цьому результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації, зокрема:

$$(p * \phi)(ih) = \frac{1}{h} \int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} p(t) \phi(t-ih) dt = \bar{p}_i.$$

Тоді цифровий сигнал може мати таке подання:

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i, i \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

де  $\varepsilon_i$  – випадкова вада довільного розподілу, проте за замовченням вважаємо для неї розподіл Гауса з дисперсією  $\sigma_\varepsilon^2$  та функцією щільності

$$f(\varepsilon; 0, \sigma_\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2\sigma_\varepsilon^2}. \quad (2)$$

Поставимо за мету при побудові моделі сигналу  $p(t)$  використовувати апроксимації, що враховують випадкову природу даних, наприклад, оператори близькі до інтерполяційних у середньому, зокрема, поліноміальні сплайни на основі В-сплайнів

Нехай на розбитті  $\Delta_h$  задано В-сплайн нульового порядку

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2]. \end{cases}$$

Тоді  $B$ -сплайн  $B_{r,h}(t)$  порядку  $r$  ( $r \geq 1$ ) визначається рекурентно так:

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau) d\tau.$$

Наприклад, при  $r = 2$   $B$ -сплайн другого порядку визначається так [3]:

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2; 3h/2], \\ (3+2t/h)^2/8, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ 3/4 - (2t/h)^2/4, & t \in [-h/2; h/2], \\ (3-2t/h)^2/8, & t \in [h/2; 3h/2]. \end{cases} \quad (3)$$

У роботі [4, стор.102] доведено, що як і гаусіан,  $B$ -сплайн порядку вище першого, може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є (КВПФ). Отже, для  $B_r(t)$ ,  $r \geq 2$  має місце [1]

$$\hat{B}_r(\omega) = \left( \frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{i\omega} \right)^{r+1} = \left( \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^{r+1}, \text{ при } h=1. \quad (4)$$

З аналізу графіка (рис.1), отриманого на основі виразу (4), виходить що вже починаючи з порядку  $r=5$  і Гаусіан фактично мало чим відрізняються (рис.2), при цьому обрахунок  $B$ -сплайна потребує менше обчислювальних затрат. Проте КВПФ у повній мірі не знімає «обмежень» на обробку сигналів. Згідно принципу невизначеності Гейзенберга неможливо отримати одночасно високе частотне та часове розрішення.

Таку невизначеність можна подолати за використанням інтегрального вейвлет-перетворення [1; 4; 5], що значно узагальнює (інтегральне) перетворення Фур'є. Останнє забезпечують властивості вейвлетів, а саме: зсув та масштабуємість. Відмітимо, що  $B$ -сплайни задовольняють вказаним властивостям і є вейвлет-функціями масштабування [4]. З іншого боку, згідно теореми Веєрштрасса, будь-яка неперервна на відрізку функція може бути наближена послідовністю багаточленів (поліномом), що сходиться рівномірно до цієї функції на відрізку. Як відомо,  $B$ -сплайни утворюють базис у просторі поліномів [6; 7], отже будь-яка неперервна функція, (а отже і

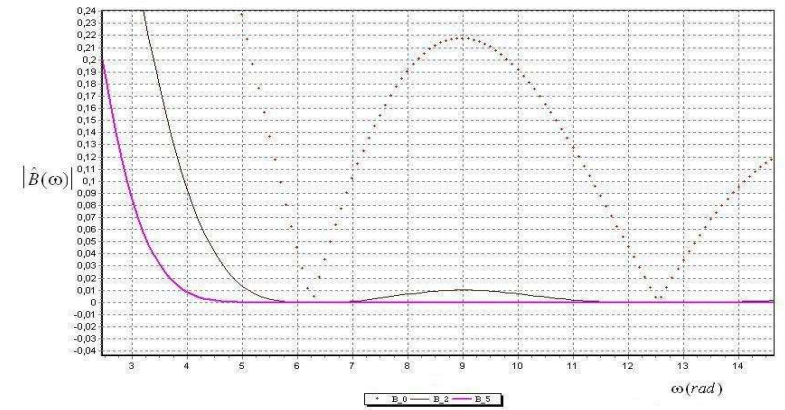


Рис. 1. Частотні характеристики  $B$ -сплайнів нульового, другого та п'ятого порядків

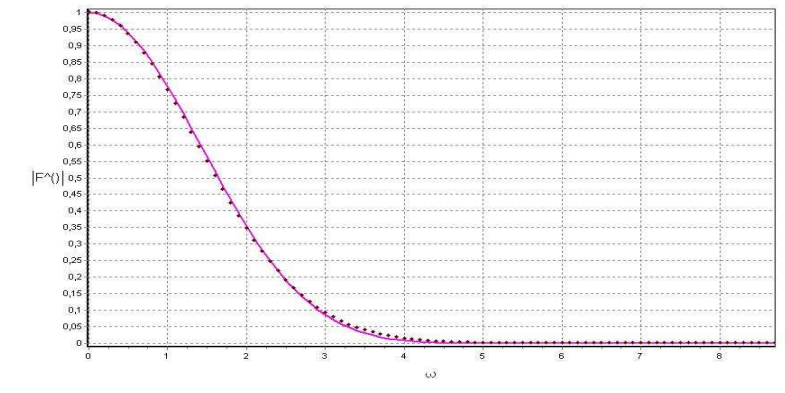


Рис.2.  $B$ -сплайн п'ятого порядку (сплошна лінія) та гаусіан (крапки) з  $\sigma_\epsilon = 0,725$

неперервний сигнал  $p(t)$  може мати наближення у вигляді лінійної комбінації  $B$ -сплайнів. Зокрема, якщо обрати в якості апроксимації сигналу  $p(t)$  комбінацію  $B$ -сплайнів такого типу

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i B_{r,h}(t - ih), \quad r \geq 2, \quad (5)$$

то отримаємо модель з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтра. По-суті, вираз (5) є неперервним оператором низькочастотної фільтрації, для якого притаманні ряд

корисних при відтворенні сигналів властивостей: висока обчислювальна ефективність при поданні моделі (5) у розгорнутому вигляді з урахуванням явного виразу *B*-сплайна на зразок (3); властивості в частотній області, близькі до властивостей фільтра Гауса; локальність (фактично КВПФ); масштабуємість; є ланкою для побудови інтегрального вейвлет-перетворення.

Отже, поставимо за мету в даній роботі на основі виразу (5) подати приклади обчислювальних схем для забезпечення низькочастотної фільтрації цифрових сигналів за даними типу (1).

**Виклад основного матеріалу.** За потреби в отриманні цифрового низькочастотного фільтра достатньо в моделі (5) визначити значення сплайна у вузлах розбиття  $\Delta_h$  [8]. Для  $r = 2$  можемо записати  $S_{2,0}(p, t)$  у розгорнутому вигляді так [11]:

$$S_{2,0}(p, t) = \frac{1}{8} \left( (1-x)^2 p_{i-1} + (6-2x^2) p_i + (1+x)^2 p_{i+1} \right),$$

де  $x = 2(t - (i + 0,5)h)/h$ ,  $|x| \leq 1$ . Якщо покласти  $x = 0$  отримаємо:

$$S_{2,0}(p, ih) = (p_{i-1} + 6 \cdot p_i + p_{i+1})/8,$$

або ж результат низькочастотної фільтрації на основі фільтра такий:

$$p_{ni}^{(S_{2,0})} = \sum_{j=i-1}^{i+1} p_j \cdot \gamma_{j-i}^{(2,0)},$$

де  $\left\{ p_{ni}^{(S_{2,0})} \right\}$  – відліки після накладання фільтра на основі  $S_{r,0}(p, t)$ ,

$r \geq 2$ ;

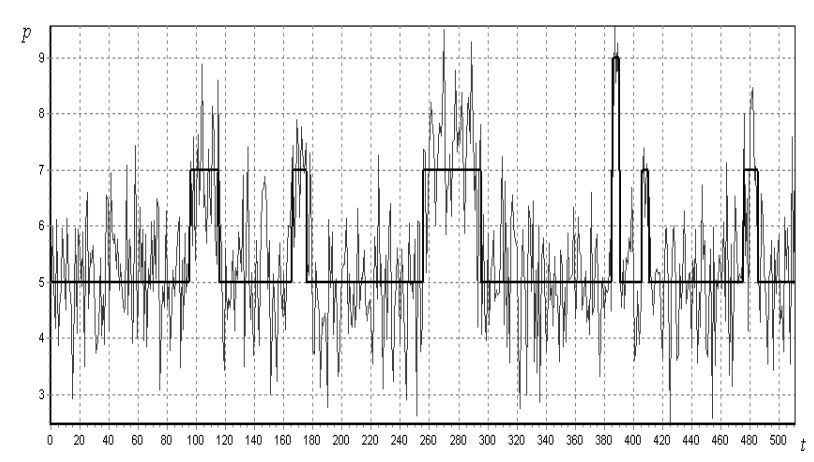
$$\left( \gamma^{(2,0)} \right)^T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

– відповідна маска низькочастотного фільтра. Для прикладу, при  $r = 5$  має місце такий низькочастотний фільтр [9]:

$$p_{ni}^{(S_{5,0})} = \sum_{j=i-2}^{i+2} p_j \cdot \gamma_{j-i}^{(5,0)}, \tag{6}$$

де  $\left( \gamma^{(5,0)} \right)^T = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \end{pmatrix}$ .

Ефективність фільтрації згідно моделі (5) за даними (1), при відносно значних величинах параметра  $\sigma_\epsilon$  в (2), можна підвищити, якщо робити фільтр рекурсивним. Розглянемо приклад фільтрації цифрового сигналу з випадковою вадою, розподіленою з щільністю (2), коли  $\sigma_\epsilon = 1$  (рис.3).



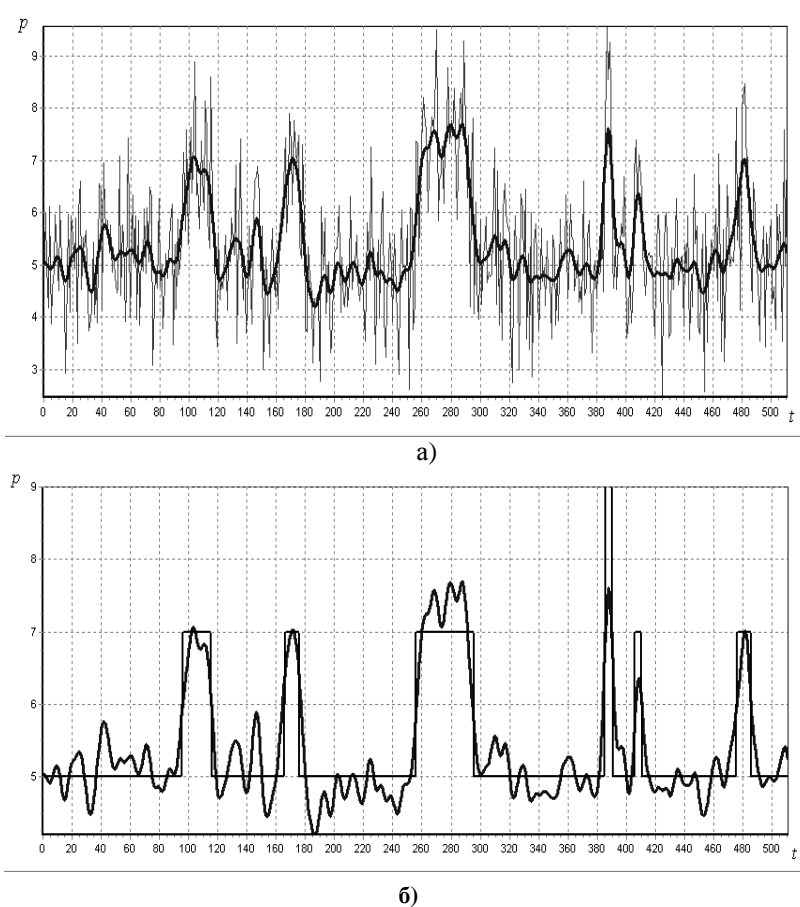
**Рис.3.** Цифровий сигнал (прямокутні імпульси) з вадою (2),  $\sigma_\epsilon = 1$

На графіку (рис.4) подано фільтрацію після десятикратного рекурентного застосування функціонала (6). Відмітимо, що спостерігається зменшення осциляцій і при цьому, якщо застосовувати процедуру розділення за порогом можливо достатньо адекватно виділити незашумлений сигнал. Недоліком поданого підходу є те, що за невідомою величиною параметра  $\sigma_\epsilon$  в моделі (2), важко наперед визначити кількість рекурсій фільтра.

Іншим підходом до виділення сигналу із зашумленої послідовності є спосіб на основі обчислювального аспекту кратномасштабного аналізу сигналу та *subdivision*-процедур на основі сплайн-операторів, близьких до інтерполяційних [10]. Не зменшуючи загальності позначимо  $\{p_{i,0}\}$  для запису обчислювальної схеми при роботі з послідовністю що задає цифровий сигнал. Для рекурентного двократного збільшення масштабу (двократного зменшення кількості членів послідовності) на кожному  $\kappa$ -му ( $\kappa = 1, 2, \dots$ ) кроці рекурсії достатньо позбутись у новій  $\kappa$ -ій послідовності кожного другого відліка  $(\kappa - 1)$ -ої. Тобто, якщо  $\{p_{i,\kappa}\}_{i \in \mathbb{Z}}$  – деяка змасштабована послідовність, то

$$t_{i,\kappa} = t_{2i,\kappa-1}, \quad p_{i,\kappa} = p_{2i,\kappa-1}, \tag{7}$$

при цьому пам'ять під розміщення величин  $p_{2i+1,\kappa-1}$  звільнюється.



**Рис. 4. Результат 10-ти рекурсій фільтра (6):**

**а) разом із зашумленим сигналом; б) разом із початковим сигналом**

Окрім тривіального визначення членів послідовності  $\{p_{i,\kappa}\}_{i \in \mathbb{Z}}$  згідно (7), можна реалізувати збільшення масштабу, наприклад, зі згладжуванням. Тоді величини  $p_{i,\kappa}$  визначаються на підставі лінійного функціонала

$$p_{i,\kappa} = A(p^{\kappa-1,2i}), \quad i \in \mathbb{Z},$$

що побудований на даних попереднього кроку рекурсії. При

використанні фільтра (6) функціонал  $A(p^{\kappa-1,2i})$  можна подати так:

$$A(p^{\kappa-1,2i}) = (p_{2i-2,\kappa-1} + 26p_{2i-1,\kappa-1} + 66p_{2i,\kappa-1} + 26p_{2i+1,\kappa-1} + p_{2i+2,\kappa-1})/120, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Для повернення початкової кількості членів послідовності, яка визначає цифровий сигнал, можна скористатись *subdivision*-процедурою – рекурентним алгоритмом, що на  $\kappa$ -му ( $\kappa=1,2,\dots$ ) кроці роботи приводить до дворазового, у порівнянні з  $(\kappa-1)$ -м кроком, збільшення кількості відліків, причому

$$t_{2i,\kappa} = t_{i,\kappa-1}, \quad p_{2i,\kappa} = p_{i,\kappa-1}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

та

$$t_{2i \pm 1, \kappa} = t_{i, \kappa-1} \pm h/2^{\kappa+1},$$

$$p_{2i \pm 1, \kappa} = p_{i \pm 0.5, \kappa-1} = B(p^{\kappa-1, i}), \quad i \in \mathbb{Z},$$

де  $B(p^{\kappa-1, i})$  – деякий лінійний функціонал, який базується на даних попереднього кроку рекурсії. Функціонал  $B(p^{\kappa-1, i})$  може бути отриманий як на основі виразів (5), так за використанням операторів, близьких до інтерполяційних. Для визначеності подамо оператори на основі локальних поліноміальних сплайнів, на основі  $B$ -сплайнів четвертого порядку [10], близьких до інтерполяційних у середньому нульового

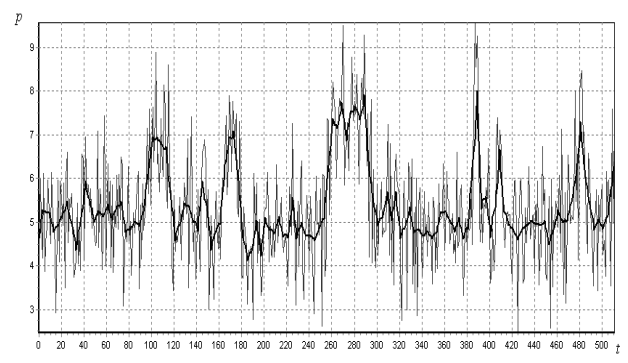
$$p_{2i \pm i, \kappa}^{(S_{4,0})} = (p_{i \mp 1, \kappa-1} + 11p_{i, \kappa-1} + 11p_{i \pm 1, \kappa-1} + p_{i \pm 2, \kappa-1})/24$$

та першого ступеня уточнення

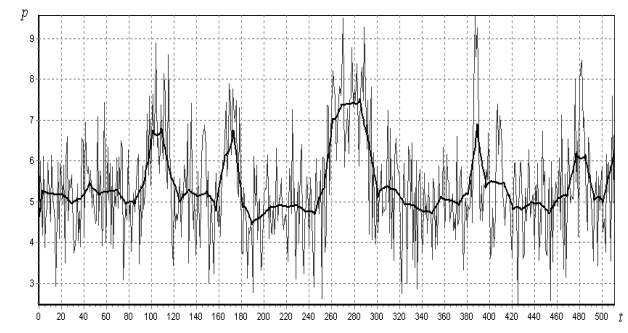
$$p_{2i \pm i, \kappa}^{(S_{4,1})} = (-p_{i \mp 2, \kappa-1} - 5p_{i \mp 1, \kappa-1} + 54p_{i, \kappa-1} + 54p_{i \pm 1, \kappa-1} - 5p_{i \pm 2, \kappa-1} - p_{i \pm 3, \kappa-1})/96. \quad (9)$$

На графіках (рис.5) подано приклад застосування операторів (8) та (9) відповідно при  $\kappa$ , що дорівнює 2, 3 та 4 рекурсіям.

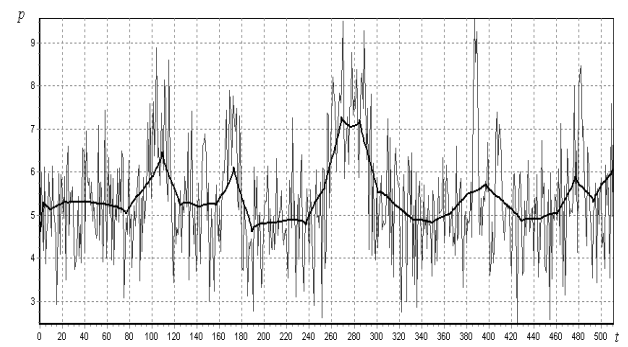
**Висновки.** З аналізу графіків можна зробити висновок, про обчислювальну ефективність та візуальну адекватність запропонованого підходу (зокрема на основі процедур масштабування) при виділенні сигналу, проте, результат суттєво різниться від кількості рекурсій. У свою чергу, подальших досліджень



а)



б)



в)

Рис. 5. Фільтрація сигналу при рекурентному використанні виразів (8), (9): при кількості рекурсій: а)  $\kappa = 2$  ; б)  $\kappa = 3$  ; в)  $\kappa = 4$

потребує обґрунтування зв'язку параметра  $\sigma_\epsilon$  в моделі високочастотної завади сигналу та кількістю рекурсій при низькочастотній фільтрації на основі операторів типу (6) та виразів (8), (9).

Наостанок варто зазначити, що окрім цифрової обробки сигналів подані оператори без жодних обмежень можуть мати застосування при попередній обробці нестационарних випадкових процесів та при згладжуванні часових рядів.

### Бібліографічні посилання

1. **M. Unser.** Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing, IEEE Signal Processing Magazine, V. 16, №. 6, P. 22-38, 1999.
2. **M. Unser, T. Blu,** Wavelet Theory Demystified // IEEE Trans. Signal Processing, V. 51, №. 2, P. 470-483, 2003.
3. **Лигун А. А.** Асимптотические методы восстановления кривых. / А. А. Лигун, А. А. Шумейко – К., 1997. – 358 с.
4. **Чуи Ч.** Введение в вэйвлеты. / Ч. Чуи // Пер. с. англ.–М., 2001. – 412 с.
5. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск, 2001, – 464 с.
6. **Де Бор К.** Практическое руководство по сплайнам. / К. де Бор. – М., 1985.- 303 с.
7. **Корнейчук Н. П.** Сплайны в теории приближения. / Н.П. Корнейчук – М., 1984.-351 с.
8. **Приставка П. О.** Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів. / П. О. Приставка // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. – Д., 2006. – Т.10. – С.3-14.
9. **Чолишкіна О. Г.** Застосування поліноміальних сплайнів на основі B-сплайнів п'ятого порядку під час побудови фільтрів / О. Г. Чолишкіна // Вісник НАУ. – 2009. –№1. – С. 214–218.
10. **Приставка П. О.** Поліноміальні сплайни при обробці даних. / П.О.Приставка. – Д., 2004. – 236 с.
11. **Лигун А. А.** О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка / А. А. Лигун, В. В. Кармазина. – Днепродзержинск, 1989. – 30с. – Деп. в УкрНИИТИ 8.06.89, №1559- Ук89.

Надійшла до редколегії 09.07.10