УДК 519.652:519.254: 004.67

П. О. Приставка

Національний авіаційний університет

ЛІНІЙНІ КОМБІНАЦІЇ В-СПЛАЙНІВ, БЛИЗЬКІ ДО ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ У СЕРЕДНЬОМУ, В ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ АНАЛОГОВИХ СИГНАЛІВ

Для побудови моделей аналогових сигналів зі скінченою енергією пропонується використовувати лінійні комбінації В-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому другого порядку та вище.

Ключові слова: *сплайн, аналоговий сигнал, модель.*

Для построения моделей аналоговых сигналов с конечной энергией предлагается использовать линейные комбинации В-сплайнов, близкие к интерполяционным в среднем второго порядка и выше.

Ключевые слова: *сплайн, аналоговый сигнал, модель.*

For building models of analog signals with finite energy is proposed to use linear combinations of B-splines, close to an interpolation splines in the average of second order and above.

Key words: *spline, the analog signal, the model.*

Постановка проблеми. Останні десятиріччя серед методів обробки цифрових сигналів актуальність набули такі, що забезпечують адекватне опрацювання даних у режимі реального часу. Поясненням даного є потреба в обробці постійно зростаючих обсягів інформації, що передається, зберігається, обробляється, тощо. Деякі з таких методів є обчислювальним аспектом відомих підходів до апроксимації, наприклад, швидке перетворення Фур'є, для інших було спеціально розроблено теоретичне обґрунтування, наприклад, вейвлет-методи.

В якості критерію адекватності роботи методу вимагають, щоб результат обробки відповідав фізичній природі аналогового сигналу, представленням якого є цифровий сигнал. Така вимога значно простіше може бути виконана, якщо метод ґрунтується на моделі, що є апроксимацією аналогового сигналу, причому моделі, що при побудові потребує мінімальної кількості обчислювальних операцій та за своїми властивостями є близькою до властивостей сигналу.

Наприклад, лінійні комбінації *B*-сплайнів [1 – 4] є обчислювальним засобом обробки послідовностей відліків функцій, якому притаманні ряд цінних властивостей: обчислювальна простота, можливість враховувати локальні «особливості» сигналу, згладжувальні властивості та інше. Проте, поліноміальний сплайн, що є лінійною комбінацією *B*-сплайнів, як модель аналогового сигналу не набув гідного поширення у [5 – 7], хоча й має висвітлення в багатьох працях за кордоном. А локальні поліноміальні сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому на основі *B*-сплайнів як модель сигналу взагалі не використовувались, хоча й вводились А.О. Лигуном як апарат обробки даних, заданих з вадою.

Тому актуальним може бути узагальнення відомих понять та положень про сплайн-апроксимацію на випадок побудови неперервної моделі сигналу з кінцевою енергією саме останніми із зазначених вище сплайнів.

Аналіз публікацій та постановка задачі. Функція $s(t)$, задана та неперервна на відрізку $[a;b]$, називається поліноміальним сплайном порядку r ($r \ge 1$) з вузлами t_i, $i=\overline{0,N}$, $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=b$, якщо на кожному з проміжків $[a;t_1]$, $[t_i;t_{i+1}]$, $i=\overline{1,N-2}$, $[t_{N-1};b]$, $s(t)$ є алгебраїчний багаточлен ступеня, що не перевищує r, а в кожній із точок t_i, $i=\overline{0,N}$ деяка похідна $s^{(v)}(t)$, ($1 \le v \le r$) може мати розрив [1]. Головними характеристиками сплайну є найбільший порядок r багаточленів із яких він складається, кількість і розташування вузлів та гладкість склеювання в кожному вузлі.

Якщо задано фіксовану систему точок $\Delta[a;b]$: $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=b$, або, іншими словами, задано розбиття відрізку $[a;b]$, то множину $S_r^k(\Delta[a;b])$ називають множиною сплайнів порядку r дефекту k за розбиттям $\Delta[a;b]$. Множину $S_r^1(\Delta[a;b])$ (або просто $S_r(\Delta[a;b])$) називають множиною сплайнів мінімального дефекту.

Якщо довільним чином доповнити розбиття $\Delta[a;b]$ точками $t_{-r}<t_{-r+1}<\ldots t_{-1}<a$; $b<t_{N+1}<\ldots t_{N+r}$, у результаті чого одержують систему точок

$$t_{-r}<t_{-r+1}<\ldots t_{-1}<t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N<t_{N+1}<\ldots t_{N+r}, \quad (1)$$

то тоді для кожного $i=\overline{-r,N-1}$ існує сплайн $B_{r,i}(t)$ порядку r дефекту 1 за розбиттям $t_i<t_{i+1}<\ldots<t_{i+r+1}$, який визначається рівностями:

$$\int_{t_i}^{t_{i+r+1}} B_{r,i}(t)\,dt=1,\qquad B_{r,i}(t)=0,\ t<t_i;\ t>t_{i+r+1},$$

або

$$B_{r,i}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+r}-t_i}B_{r-1,i}(t)+\frac{t_{i+r+1}-t}{t_{i+r+1}-t_{i+1}}B_{r-1,i+1}(t),\ \sum_{i=-r}^{N-1}B_{r,i}(t)=1,$$

де
$$B_{0,i}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[t_i;t_{i+1}],\\ 1, & t\in[t_i;t_{i+1}].\end{cases}$$

Сплайн $B_{r,i}(t)\in C^{r-1}(-\infty;\infty)$, визначений на всій дійсній вісі називається *B*-сплайном порядку r на сітці $t_i<t_{i+1}<\ldots<t_{i+r+1}$. При цьому відрізок $[t_i;t_{t+r+1}]$, на якому $B_{r,i}(t)>0$, називають носієм *B*-сплайну.

Відомо [1; 2], що система із $N+r$ *B*-сплайнів $B_{r,i}(t)$, $i=\overline{-r,N-1}$ порядку r за розбиттям (1) з носієм $[t_i;t_{t+r+1}]$ є базисом у $S_r(\Delta[a;b])$. Як наслідок, можна зазначити, що будь-який сплайн $s(t)\in S_r(\Delta[a;b])$ єдиним чином можна представити у вигляді

$$s(t)=\sum_{i=-r}^{N-i}c_iB_{r,i}(t),\ t\in[a;b],\qquad(2)$$

де c_i, $i=\overline{-r,N-1}$ – деякі дійсні числа, такі, що

$$s(t)=\sum_{i=-r}^{N-i}c_iB_{r,i}(t)=0,$$

тоді і тільки тоді, коли $c_{-r}=c_{-r+1}=\ldots=c_{N-1}=0$.

Нехай при деякому $h>0$ задано рівномірне розбиття Δ_h дійсної вісі R_1 точками ih, $i\in Z$. Множину сплайнів порядку r мінімального дефекту, визначену на розбитті Δ_h позначають $S_r(\Delta_h)$. Тоді, якщо

$$B_{0,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[-h/2;h/2],\\ 1, & t\in[-h/2;h/2],\end{cases} \tag{3}$$

то *B*-сплайн $B_{r,h}(t)\in S_r(\Delta_h)$ порядку r ($r\geq 1$) визначається рекурентно із співвідношення

$$B_{r,h}(t)=\frac{1}{h}\int\limits_{t-h/2}^{t+h/2}B_{r-1,h}(\tau)\,d\tau\,. \tag{4}$$

Стосовно виразу (4) можна зазначити наступне. За визначенням $B_{0,h}(t)$ є характеристичною функцією інтервалу $[-h/2;h/2]$. Зауважимо, що питання «закритості» інтервалу не є принциповим для подальшого викладення, наприклад, у роботі [8] *B*-сплайн нульового порядку (з точністю до зсуву аргументу) вводиться так:

$$B_{0,h}(t)=\begin{cases}0, & t\notin[-h/2;h/2],\\ 1/2, & |t|=h/2,\\ 1, & t\in(-h/2;h/2).\end{cases}$$

У роботі [9] $B_{0,h}(t)$ подано, як характеристична функція напіввідкритого інтервалу $[-h/2;h/2)$ і для $r\geq 1$ відповідний сплайни $B_{r,h}(t)$ визначається рекурентно інтегралом згортки:

$$B_{r,h}(t)=\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{r-1,h}(t-\tau)B_{0,h}(\tau)\,d\tau\,.$$

На загал можна записувати операцію згортки так:

$$B_{r,h}(t)=\left(B_{r-1,h}*B_{0,h}\right)(t)=\underbrace{\left(B_{0,h}*B_{0,h}*\ldots*B_{0,h}\right)}_{(r+1)\ \text{разів}}(t),$$

звідки вираз (4) слідує із фінітних властивостей *B*-сплайн-функції.

На розбитті Δ_h *B*-сплайн порядку r має в якості носія проміжок $d_r=\left[-(r+1)h/2;(r+1)h/2\right]$, отже

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}B_{r,h}(t)\,dt=\int\limits_{d_r}B_{r,h}(t)\,dt=\int\limits_{-(r+1)h/2}^{(r+1)h/2}B_{r,h}(t)\,dt=h\,.$$

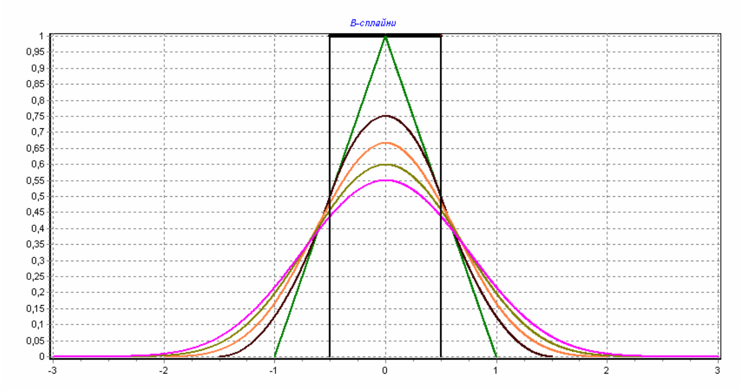

Рис.1. В-сплайни $r \geq 0$, $h = 1$

Із визначення *B*-сплайну на Δ_h та виразів (3), (4) не важко отримати аналітичні представлення $B_{r,h}(t)$ при різних значеннях r. Наприклад, при $r = 2$ *B*-сплайн другого порядку визначається так [1]:

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2; 3h/2], \\ (3 + 2t/h)^2 / 8, & t \in [-3h/2; -h/2], \\ 3/4 - (2t/h)^2 / 4, & t \in [-h/2; h/2], \\ (3 - 2t/h)^2 / 8, & t \in [h/2; 3h/2]. \end{cases} \tag{5}$$

Зрозуміло, що сплайни $B_{r,h}(t)$, $r \geq 1$ є симетричними функціями відносно свого носія (рис.1).

Так само, як і у випадку нерівномірного розбиття, щодо *B*-сплайнів $B_{r,h}(t)$ можна стверджувати: якщо $S_r(\Delta_h)$ – множина всіх сплайнів мінімального дефекту за розбиттям Δ_h і $B_{r,h}(t) \in S_r(\Delta_h)$, $r \geq 1$, то лінійна комбінація $S_r(t)$ сплайнів $B_{r,h}(t)$ також буде належати множині $S_r(\Delta_h)$, тому має місце вираз, аналогічний (1.2)

$$S_r(t) = \sum_{i \in Z} c_i B_{r,h}(t) \in S_r(\Delta_h). \tag{6}$$

Отже, лінійна комбінація $S_r(t)$, $r \geq 1$ – є сплайн мінімального дефекту. Найчастіше подібні сплайни називають локальними поліноміальними сплайнами на основі *B*-сплайнів r-го порядку.

Розглянемо аналоговий сигнал $p(t) \in L_2(\mathbb{R})$ з кінцевою енергією, що визначається його нормою

$$\left\| p(t) \right\|_{L_2} = \left\langle p(t), p(t) \right\rangle^{1/2},$$

заданий дискретно (цифровий сигнал) відліками на рівномірному розбитті $\Delta_h : ih$, $i \in \mathbb{Z}$: $\{p_i\} \in l_2(\mathbb{Z})$. Зауважимо, що якщо говорять, що дискретний сигнал належить $l_2(\mathbb{Z})$, то $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |p_i|^2 = \|p\|^2_{l_2(\mathbb{Z})} < +\infty$.

Згідно теореми Котельникова аналоговий сигнал з обмеженим спектром може бути точно перетворений у дискретний сигнал і потім точно відтворений за відліками цього дискретного сигналу [10]. Практично будь-який аналоговий сигнал має обмежений спектр і тому може бути замінений при правильно обраній частоті дискретизації відповідним дискретним сигналом. Якщо ж спектр сигналу фінітний і $h \to 0$, то для точного відтворення можна скористатись таким виразом:

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i \frac{\sin\left(\pi(t - ih)/h\right)}{\left(\pi(t - ih)/h\right)}. \qquad (7)$$

Головним обмеженням при застосуванні виразу (7) є обчислювальна складність – для інтерполяції потрібно використовувати всі відліки, що не виправдано, наприклад, при апроксимації сигналу на локальних інтервалах визначення.

Загальновідомо [8; 9], що будь-яка функція (сигнал) $p(t) \in L_2(\mathbb{R})$ має єдино можливий розклад у ряд

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i \varphi(t - ih),$$

де $\varphi(t)$ – функції, що є базисом Рисса в $L_2(\mathbb{R})$, тобто:

$$0 < C_{\min} \|c\|_{l_2(\mathbb{Z})} \le \overbrace{\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i \varphi(t - ih) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}}^{\|p(t)\|_{L_2(\mathbb{R})}} \le C_{\max} \|c\|_{l_2(\mathbb{Z})} < \infty,$$

де $\{c_i\} \in l_2(\mathbb{Z})$ – коефіцієнти розкладу; $C_{\min}$, $C_{\max}$ – деякі константи.

З іншого боку доведено [9, с.148-149], що базис *B*-сплайнів є базисом Рисса, отже

$$p(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i B_{r,h}(t - ih), \; r \ge 1, \qquad (8)$$

де c_i, $i \in \mathbb{Z}$ визначаються із інтерполяційних умов та розв'язку відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$p(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^{(r)} B_{r,h}(t - ih)\Big|_{t=ih}, \; r \geq 1, \; i \in \mathbb{Z}. \qquad (9)$$

При цьому, зважаючи на скінченність носіїв d_r B-сплайнів, у кожному рядку визначника такої системи не рівними нулю буде лише r елементів (значень сплайнів $B_{r,h}(t)$) та розташовані такі елементи будуть уздовж головної діагоналі [1]. Останнє й забезпечує простоту обчислення коефіцієнтів інтерполяції.

З розв'язку системи (9) отримують фундаментальний сплайн

$$S_r(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^{(r)} B_{r,h}(t - ih), \; r \geq 1,$$

що має інтерполяційні властивості. Вочевидь, послідовність $\left\{c_i^{(r)}\right\}$ не є скінченою. Проте, показано [9, с.181-182], що члени послідовності $\left\{c_i^{(r)}\right\}$ спадають до нуля експоненціально швидко при $i \to \pm\infty$. Це означає, що й фундаментальний сплайн $S_r(t)$ також прямує до нуля з тією ж швидкістю при $t \to \pm\infty$, що забезпечує збіжність для $\forall x \in \mathbb{R}$ сплайн-рядів

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} p(ih) S_r(t - ih), \; r \geq 1.$$

У реальній практиці можуть виникати ситуації, коли інтерполяція сигналу саме за виразом (8) є недоречною. Отже, поставимо за мету в подальшому викладені подати можливість апроксимації $p(t)$ за використанням моделей на основі лінійних комбінацій B-сплайнів (4), близьких до інтерполяційних у середньому.

Виклад основного матеріалу. Зазвичай при фіксації аналогового сигналу має місце наступне. Нехай $\phi(t)$ – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал $p(t)$. У силу суто технічних властивостей систем реєстрації, результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації, зокрема:

$$\left(p*\phi\right)\left(ih\right)=\frac{1}{h}\int\limits_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}}p\left(t\right)\phi\left(t-ih\right)dt=\overline{p}_i .$$

Тоді цифровий сигнал може мати таке подання:

$$p_i=\overline{p}_i+\varepsilon_i,\ i\in\mathbb{Z}, \qquad (10)$$

де ε_i – випадкова вада. Стосовно вади ε_i, $i\in\mathbb{Z}$ можна припускати будь-який розподіл, проте за замовченням вважають, що має місце розподіл Гауса з нульовим математичним сподіванням, дисперсією σ_ε^2 та функцією щільності

$$f\left(\varepsilon;0,\sigma_\varepsilon\right)=\frac{1}{\sigma_\varepsilon\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2}} . \qquad (11)$$

Таким чином, при використанні даних (10) для побудови інтерполяції (8) на основі (9) приходимо до хибного оцінювання сигналу. Причому, згідно нерівності Чебишева (для довільного $\upsilon>0$ виконується $P\left\{\left|\xi-E\left\{\xi\right\}\right|\geq\upsilon\right\}\leq\frac{D\left\{\xi\right\}}{\upsilon^2}$), похибка буде тим більшою, чим більшою є дисперсія σ_ε^2. Отже, виникає задача при побудові моделі сигналу використовувати апроксимації, що враховують випадкову природу даних, зокрема, оператори інтерполяційні у середньому або близькі до інтерполяційних у середньому.

Наприклад, для *B*-сплайнів другого порядку в [3] для апроксимації функції $p\left(t\right)$ за значеннями типу (10) у вузлах розбиття Δ_h, подано такі сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому:

$$S_{2,0}\left(p,t\right)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}p_iB_{2,h}\left(t-\left(i+0,5\right)h\right), \qquad (12)$$

$$S_{2,1}\left(p,t\right)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(p_i-\tfrac{1}{6}\Delta^2p_i\right)B_{2,h}\left(t-\left(i+0,5\right)h\right), \qquad (13)$$

$$S_{2,2}\left(p,t\right)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(p_i-\tfrac{1}{6}\Delta^2p_i+\tfrac{1}{36}\Delta^4p_i\right)B_{2,h}\left(t-\left(i+0,5\right)h\right), \qquad (14)$$

де $$\Delta^{2u}p_i=\Delta^{2u-2}p_{i+1}-2\Delta^{2u-2}p_i+\Delta^{2u-2}p_{i-1},$$

$u=1,2,\ldots$

Якщо обрати в якості моделі сигналу $p\left(t\right)$ сплайни (13), (14), то така оцінка за певних умов є фактично асимптотично точною. Зокрема, якщо довільна функція $f(t)$ неперервна на деякому відрізку $[a,b]$, то

$$\|f(t)\|_{C[a,b]} = \|f(t)\|_{L_\infty(a,b)},$$

де $C[a,b]$ – простір неперервних на $[a,b]$ функцій $f(t)$ з нормою

$$\|f(t)\|_{C[a,b]} = \max_{a\le t\le b}|f(t)|.$$

Тоді, припускаючи, що $p(t)\in C^3$, то при $h\to 0$ буде вірно наступне [8]:

$$\|p(t)-S_{2,u}(p,t)\|_C \le \frac{h^3}{12\sqrt{3}}\|p^{(3)}(t)\|_C + \varepsilon\|S_{2,u}(p,t)\|_C + \mathrm{o}\left(h^3\right),$$

$$u=1,2,$$

де $|\varepsilon_i|<\varepsilon$, $i\in\mathbb{Z}$ та $\|S_{r,u}(p,t)\| = \sup\limits_{|\varepsilon_i|}\max\limits_{t}|S_{r,u}(\varepsilon,t)|$, $r\ge 1$ – норма сплайн-оператора $S_{r,u}(p,t)$ і при цьому

$$\|S_{2,1}(p,t)\|_C = \frac{4}{3}\|p(t)\|_C, \qquad \|S_{2,2}(p,t)\|_C = \frac{3}{2}\|p(t)\|_C.$$

Похибка апроксимації може бути ще меншою, якщо за модель обрати, наприклад, таку лінійну комбінацію *B*-сплайнів четвертого порядку [4]:

$$S_{4,2}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{4}\Delta^2 p_i + \frac{13}{240}\Delta^4 p_i\right)B_{4,h}\left(t-(i+0,5)h\right). \quad (15)$$

Зокрема, при $h\to 0$ для довільної функції $p(t)\in C^5$ має місце:

$$\|p(t)-S_{4,2}(p,t)\|_C \le \frac{h^4}{280}\|p^{(4)}(t)\|_C + \varepsilon\|S_{4,2}(p,t)\|_C + \mathrm{o}\left(h^5\right),$$

де $$\|S_{4,2}(p,t)\|_C = \frac{697}{480}\|p(t)\|_C.$$

Фактично відмовляючись при моделюванні сигналу $p(t)$ від виконання інтерполяційних умов, використання виразів (13) – (15) дозволяє обійтись без розв’язання системи рівнянь (9). Якщо ж подати зазначені сплайни в явному вигляді, отримаємо формули для локальної апроксимації у вигляді поліному відповідного ступеня. Наприклад, для

$S_{2,1}(p,t)$ має місце такий вираз, що неважко одержати, підставивши (5) в (13):

$$S_{2,1}(p,t)=\frac{1}{48}\Big(-(1-x)^2\,p_{i-2}+\left(2-16x+10x^2\right)p_{i-1}+\left(46-18x^2\right)p_i+$$
$$+\left(2+16x+10x^2\right)p_{i+1}-(1+x)^2\,p_{i+2}\Big),\qquad i\in\mathbb{Z}, \tag{16}$$

де
$$x=2\big(t-(i+0,5)h\big)\big/h,\ |x|\le 1. \tag{17}$$

Якщо ж в якості апроксимації сигналу обрати вираз (12) або будь-яку іншу комбінацію *B*-сплайнів такого типу:

$$S_{r,0}(p,t)=\sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i B_{r,h}(t-ih),\ r\ge 2, \tag{18}$$

то отримаємо модель з властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтру [5]. Зокрема, в [9, с.102], приведено доведення, що як і функція Гауса, будь-який *B*-сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є (КВПФ). Отже, якщо $B_r(t)$, $r\ge 2$ – *B*-сплайн порядку r, то

$$\hat{B}_r(\omega)=\left(\frac{1-e^{i\omega}}{i\omega}\right)^r=e^{-ir\omega}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}\right)^r$$

або так (як в [8]):

$$\hat{B}_r(\omega)=\left(\frac{e^{i\omega/2}-e^{-i\omega/2}}{i\omega}\right)^{r+1}=\left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}\right)^{r+1}. \tag{19}$$

Для прикладу, згідно (19) подамо (рис.2) графіки частотних характеристик *B*-сплайнів нульового, другого та п'ятого порядків.

Видно (рис.3), що вже починаючи з порядку $r=5$ і *B*-сплайн, і гаусіан у частотній області фактично не відрізняються, при цьому обрахунок *B*-сплайну п'ятого порядку [12] потребує менше обчислювальних затрат.

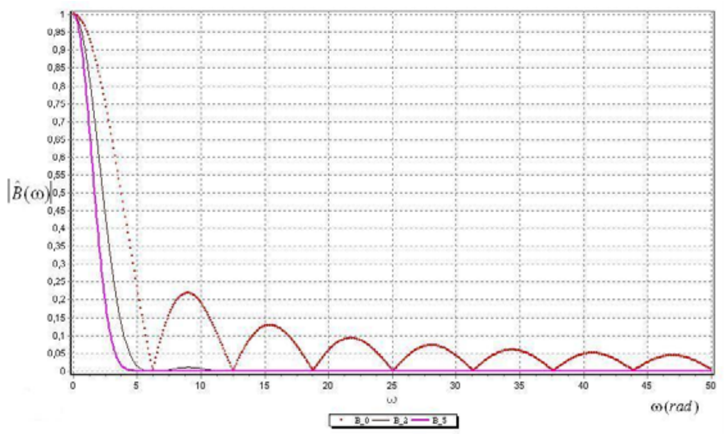

Рис.2. Частотні характеристики B-сплайнів нульового, другого та п'ятого порядків

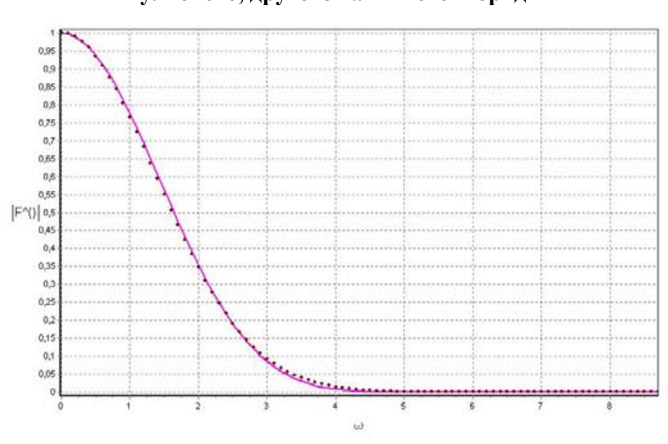

Рис.3. B-сплайн п'ятого порядку (сполошна лінія) та гаусіан (крапки) з $\sigma = 0,725$

Якщо є потреба в отриманні цифрового низькочастотного фільтра, то достатньо в моделі (18) визначити значення сплайну у вузлах розбиття Δ_h [13]. Для $r = 2$ можна розгорнуто записати $S_{2,0}(p,t)$ так:

$$S_{2,0}(p,t) = \frac{1}{8}\left((1-x)^2 p_{i-1} + \left(6-2x^2\right) p_i + (1+x)^2 p_{i+1}\right), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Якщо покласти в (17) $x = 0$ отримаємо:

$$S_{2,0}(p,ih) = (p_{i-1} + 6 \cdot p_i + p_{i+1})/8,\ i \in \mathbb{Z},$$

або ж результат низькочастотної фільтрації на основі фільтра можемо записати так:

$$pн_i^{(S_{2,0})} = \sum_{j=i-1}^{i+1} p_j \cdot \gamma^{(2,0)}{}_{j-i},\ \ i \in \mathbb{Z}, \text{ де } \qquad \gamma^{(2,0)} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

відповідна маска низькочастотного фільтра. Для прикладу при $r = 5$ має місце такий низькочастотний фільтр:

$$pн_i^{(S_{5,0})} = \sum_{j=i-2}^{i+2} p_j \cdot \gamma^{(5,0)}{}_{j-i},\ \ i \in \mathbb{Z}, \text{ де } \qquad \gamma^{(5,0)} = \frac{1}{120}\begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 66 \\ 26 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ефективність фільтрації згідно моделі (18) за даними (10) при відносно значних величинах параметра σ в (11) можна підвищити якщо робити фільтр рекурсивним. З іншого боку за умови стаціонарності сигналу $p(t)$ (або, принаймні, локальної стаціонарності) вплив похибки можна практично нівелювати шляхом локального усереднення значень відліків p_i, $i \in \mathbb{Z}$ на інтервалах довжиною $\tilde{h} = N \cdot h$ (не зменшуючи загальності нехай N кратне двом):

$$\tilde{p}_{\tilde{i}} = \frac{1}{N+1}\sum_{j=-N/2}^{N/2} p_{i-j} = \frac{1}{N+1}\left(\sum_{j=-N/2}^{N/2} \overline{p}_{i-j} + \sum_{j=-N/2}^{N/2} \varepsilon_{i-j}\right), \qquad (20)$$

$$\tilde{i} = (N+1) \cdot i,\ i \in \mathbb{Z}.$$

Вочевидь, чим більшою є величина N, тим гарантовано ближчою до нуля є величина

$$\overline{\varepsilon}_{\tilde{i}} = \frac{1}{N+1}\sum_{j=-N/2}^{N/2} \varepsilon_{i-j},$$

(як оцінка математичного сподівання випадкової величини розподіленої за стандартним нормальним розподілом). З іншого боку оцінка $\overline{\varepsilon}_{\tilde{i}}$ є незсуненою за умови симетричності закону розподілу вади, тому в реальній практиці обчислень цілком прийнятним, з точки зору близькості до нуля, може бути й відносно невеликі значення величини N. Якщо обрати за α величину ймовірності того, що отримана на будь-якому з $\tilde{i}$-х інтервалів усереднення величина $\overline{\varepsilon}_{\tilde{i}}$ статистично відмінна від нуля, то тоді (згідно t-тесту для перевірки гіпотези $\mathrm{H}_0 : \overline{\varepsilon}_{\tilde{i}} = 0$, $\tilde{i} = (N+1)\cdot i$, $i \in \mathbb{Z}$) з ймовірністю $1-\alpha$ можна нехтувати впливом похибки після інтервального усереднення за даними (10) коли виконується така нерівність:

$$\left| \frac{\overline{\varepsilon}_{\tilde{i}}}{\sigma_{\varepsilon}} \sqrt{N+1} \right| \le t_{\alpha/2,\nu},$$

де $t_{\alpha/2,\nu}$ – квантиль t-розподілу Стьюдента; $\nu = N$ – кількість степенів вільності. Останній вираз засвідчує, що кількість даних усереднення має бути меншою при меншій величині σ_{ε}. І навпаки, при значній варіабельності цифрового сигналу ширина $\tilde{h}$ інтервалу усереднення має бути більшою.

Модель, аналогічна (18) за даними (20) така:

$$S_{r,0}(p,t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{p}_i B_{r,h}\left(t - i\tilde{h}\right),\ r \ge 2,$$

при цьому похибку апроксимації сигналу $p(t)$ можна оцінити з урахуванням довжини $\tilde{h}$ інтервалів усереднення.

Висновок. Проведені дослідження дають право рекомендувати поліноміальні сплайни на основі *B*-сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому для побудови моделей аналогових сигналів з кінцевою енергією. Подібне ствердження підкріплене як теоретичним обґрунтуванням, так і практичними уявленнями про природу сигналу та його цифрового подаяння, на основі котрого відбувається апроксимація. Обчислювальна простота розглянутих сплайн-операторів дозволяє рекомендувати їх для реалізації у програмному забезпеченні обробки цифрових сигналі, в тому числі для систем, що функціонують у режимі реального часу.

Подальша робота може бути спрямована на отримання швидкодіючих обчислювальних схем та нових лінійних операторів на основі таких сплайнів, а також на їх експериментальне дослідження при обробці цифрових сигналів.

Бібліографічні посилання

1. **Корнейчук Н. П.** Сплайны в теории приближения. / Н. П. Корнейчук – М., 1984.–351 с.

2. **Де Бор К.** Практическое руководство по сплайнам. / К. Де Бор – М., 1985.–303 с.

3. **Лигун А. А.** Асимптотические методы восстановления кривых. / А. А. Лигун, А. А. Шумейко – К., 1997.–358 с.

4. **Приставка П. О.** Поліномаільні сплайни при обробці даних. / П. О. Приставка – Д., 2004. – 236 с.

5. **Василенко В. А.** Сплайн-функции и цифровые фильтры / В. А. Василенко, М. В. Зюзин, А. В. Ковалков (под ред. А. С. Алексеева). – Новосибирск, – 1984. – 141 с.

6. **Шелевицький І. В.** Методи та засоби сплайни-технології обробки сигналів складної форми. / І. В. Шелевицький – Кривий Ріг, 2002. – 304 с.

7. **Денисюк В. П.** Сплайны и их приложения в задачах моделирования и обработки вычислительных сигналов. / В. П. Денисюк, Б. Г. Марченко – Киев, 1995. – 246 с.

8. **Unser M.**, Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing, *IEEE Signal Processing Magazine*, – 1999. – Vol. 16, № 6. – P. 22–38.

9. **Чуи Ч.** Введение в вэйвлеты / Ч. Чуи, пер. с. англ. – М., 2001.–412 с.

10. **Ярославский Л. П.** Введение в цифровую обработку изображений. / Л. П. Ярославский – М., 1979. –312 с.

11. **Лигун А. А.**, О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка / А. А. Лигун, В. В. Кармазина – Днепродзержинск, 1989. – 30 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89, № 1559 – Ук89.

12. **Приставка П. О.** Дослідження *B*-сплайну п'ятого порядку та їх лінійної комбінації / П. О. Приставка, О. Г Чолишкіна // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ. 2007. – №1(16). – С.14-17.

13. **Приставка П. О.** Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів / П. О. Приставка // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій – Д., 2006. – Т.10. –С.3-14.

Надійшла до редколегії 15.06.11