

УДК 519.246.8

Я.М. Пирогова, О.О. Байбуз, Л.В. Мащенко

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ПОБУДОВА ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕХНОЛОГІЇ Т-СПЛАЙНІВ**

Проведено огляд та порівняльний аналіз сучасних методів побудови поверхонь, а саме Т-сплайнів і NURBS. Розглянуто основні риси Т-сплайнів, їхні особливості, переваги та недоліки.

*Ключові слова:* NURBS поверхні, Т-сплайни, локальне уточнення.

Проведен обзор и сравнительный анализ современных методов построения поверхностей, а именно Т-сплайнов и NURBS. Рассмотрены основные черты Т-сплайнов, их особенности, преимущества и недостатки.

*Ключевые слова:* NURBS-поверхности, Т-сплайны, локальное уточнение.

It was made a review and comparative analysis of modern methods of building of surfaces, namely, T-Splines and NURBS. Also was considered the main features, characteristics, advantages and disadvantages of T-Splines.

*Keywords:* NURBS surfaces, T-splines, local refinement.

**Постановка проблеми.** Важливу роль в аналізі даних екологічного моніторингу відіграють методи візуалізації, а саме методи побудови поверхонь, за допомогою яких можна зробити оцінку потенційної небезпеки для навколишнього середовища. Залежно від галузі застосування використовуються різні підходи – такі як трикутні сітки [3–5], параметричні сплайн-поверхні [6; 7], скалярні сплайн-функції [8], функції з радіальним базисом [9]. Серед численної кількості методів постає проблема вибору найбільш ефективного методу побудови поверхні для даних гідрогеохімічного моніторингу підземних вод.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Сьогодні будь-який інженерний проект складається із двох частин: проектування та аналізу. У проектуванні найбільш широко застосовується технологія NURBS (неоднорідні раціональні В-сплайни), які, у свою чергу, є також і інженерним стандартом. Перевагами технології NURBS є те, що її зручно використовувати для побудови поверхонь будь-якої форми; більш того, вже існує багато ефективних алгоритмів для побудови

NURBS-об'єктів. У системах САПР майже всюди використовується технологія NURBS. Але основний недолік NURBS полягає в розривах та дублюваннях у місцях перетину поверхонь. Крім того, більшість поверхонь неможливо зобразити, використовуючи для цього лише одну NURBS-поверхню. Для усунення таких недоліків нещодавно було розроблено нову технологію, яка є узагальненням NURBS-технології. Ця технологія називається Т-сплайни [1]. Т-сплайни – вид поверхні вільної форми, подібної до неоднорідного раціональному В-сплайна (NURBS). Ключова відмінність Т-сплайнів від NURBS полягає у тому, що контрольні точки NURBS-поверхні повинні утворювати топологічну прямокутну сітку, у той час як у Т-сплайнів допустимі так звані внутрішні Т-точки (контрольна точка з трьома, а не чотирма сусідами).

**Мета статті.** Подати огляд технології побудови поверхні на основі Т-сплайнів; здійснити аналіз основних відмінностей побудови поверхонь на основі NURBS та на основі Т-сплайнів.

**Основний матеріал.** Т-сплайни були винайдені доктором Томасом Седербергом (Dr. Thomas Sederberg) у 2003 р. Заснована у 2004 р. компанія T-Splines, Inc. (Прово, штат Юта, США) розробляє програмне забезпечення для моделювання поверхонь вільної форми на основі запатентованої технології Т-сплайнів. Продукти компанії (Plug-in для Rhino і Maya, а також набір бібліотек T-Tools для вбудовування в інші додатки) знаходять застосування у промисловому дизайні архітектурних об'єктів, яхт, ювелірних виробів і товарів широкого вжитку.

Контрольна сітка для Т-сплайн-поверхні називається Т-сіткою. Якщо Т-сітка утворює прямокутну сітку, то Т-сплайн вироджений у В-сплайн-поверхню. Інформація про вузол для Т-сплайнів виражається за допомогою вузлового інтервалу – невід'ємне число, яке є різницею між двома вузлами. Вузловий інтервал зв'язується з кожним ребром у Т-сітці. На рис.1 показаний прообраз частини Т-сітки у (s,t)-параметричному просторі,  $d_1$  та  $e_1$  – вузлові інтервали. Вузлові інтервали мають задовольняти умові: сума всіх вузлових інтервалів з одного боку будь-якої фігури повинна дорівнювати сумі вузлових інтервалів на протилежному боці фігури. Наприклад, на рис. 1 на фігурі  $F_1$   $e_2 + e_4 = e_6 + e_7$  і на фігурі  $F_2$   $d_6 + d_7 = d_8$ .

Щоб визначити систему координат, спочатку треба визначити їхній початок. Нариклад, на рис.1 позначимо  $(s_0, t_0)$  початком координат. Далі можна знайти координати кожного вузла сітки. Отже, ґрунтуючись на виборі початку координат, маємо

$$s_0 = t_0 = 0, s_1 = d_1, s_2 = d_1 + d_2, s_3 = d_1 + d_2 + d_3, t_1 = e_1.$$

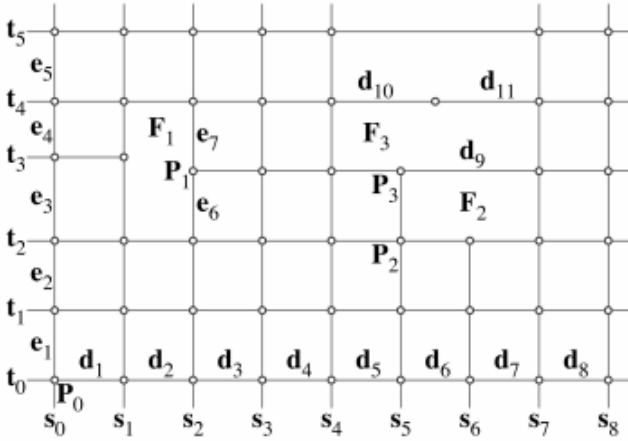


Рис. 1. Контрольна сітка для Т-сплайнів

Крім того, кожна контрольна точка має вузлові координати: наприклад, для  $P_1$  ( $s_2, t_2 + e_3$ ).

Ще одне правило для Т-сітки: щоб Т- подібне перехрестя з одного боку фігури могло з'єднуватись із Т-подібним перехрестям на протилежному боці фігури, треба, щоб сума вузлових векторів з обох боків була однаковою. Наприклад, для фігури F1 необхідно, щоб  $e_3=e_6$  та  $e_4=e_7$ .

Т-сплайн-поверхня визначається так:

$$P(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t), w(s,t)) = \sum_{i=1}^n P_i B_i(s,t), \quad (1)$$

де  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  – контрольні точки,  $w_i$  – їхні ваги відповідно, чий декартові координати визначаються  $\frac{1}{w_i}(x_i, y_i, z_i)$ .

Декартові координати точок на площині:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i, y_i, z_i) B_i(s,t)}{\sum_{i=1}^n w_i B_i(s,t)} \quad (2)$$

$$B_i(s, t) = N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s)N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t), \quad (3)$$

де  $N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s)$  – це кубічна базисна функція В-сплайна, яка зв'язана із вузловим вектором

$$s_i = [s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}]. \quad (4)$$

Аналогічно  $N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t)$  зв'язана з вузловим вектором

$$t_i = [t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}]. \quad (5)$$

Рівняння Т-сплайн-поверхні дуже схоже з рівнянням тензорного добутку для раціональної В-сплайн-поверхні. Різниця між Т-сплайн-рівнянням і В-сплайн-рівнянням у тому, як вузлові вектори  $s_i, t_i$  визначаються для кожної функції  $B_i(s, t)$ .

NURBS-поверхні визначаються за допомогою набору контрольних точок, які лежать топологічно у прямокутній сітці, як показано на рис. 2,а. Це означає, що велика частина контрольних точок у NURBS є зайвими, тому що вони не містять значної кількості геометричної інформації, а необхідні лише для задоволення топологічних обмежень. З іншого боку, Т-сплайн може мати лише частину контрольних точок у кожному рядку мережі, як показано на рис. 2,б. Частковий ряд контрольних точок закінчується Т-подібним перехрестям – звідси й назва Т-сплайнів. Для проектування чим менша кількість контрольних точок, тим швидше час моделювання. Більш того, для того щоб зробити уточнення для Т-сплайнів, достатньо лише зробити вставку однієї контрольної точки. У випадку з NURBS знадобиться вставка точок уздовж усього рядка. Наступним обмеженням NURBS є те, що в більшості випадків об'єкт буде складатися з декількох NURBS-поверхонь і після «зклеювання» частин, можливо, будуть присутні розриви. Т-сплайни дозволяють конструювати гладкі без розривів (або їх ще називають «водонепронекні») поверхні.

Локальне уточнення кривих і поверхонь NURBS здійснюється через вузол вставки, у процесі чого не змінюється форма кривої або поверхні. Існує декілька алгоритмів для вставки вузлів. Алгоритм вставки вузла є фундаментальним, його можна використати і як математичний інструмент для розуміння та аналізу В-сплайнів, і як практичний інструмент для управління та побудови В-сплайн-кривих і поверхонь. Вставка вузла добре відпрацьовує для локального уточнення В-сплайн-кривої: вставка одного вузла породжує оновлення лише кількох контрольних точок у локальному регіоні.

Тим не менш для тензорного добутку В-сплайн-поверхні локальне уточнення неможливе, оскільки вставка одного вузла в один із

вузлових векторів поверхні спричиняє вставку нових контрольних точок у цілий рядок або стовпець.

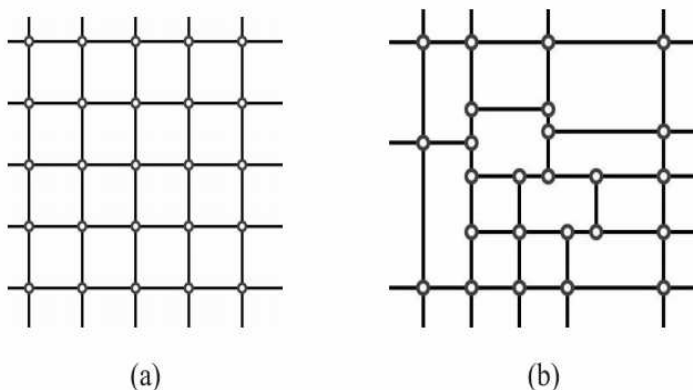


Рис. 2. Полігональна мережа для: а – NURBS; б – Т-сплайнів

**Алгоритм локального уточнення Т-сплайна.** Локальне уточнення означає, що треба зробити вставку однієї або декількох контрольних точок у Т-сітку без зміни форми Т-сплайн-поверхні. Ця процедура також може називатися локальною вставкою вузла, тому що додаткові контрольні точки для Т-сітки повинні впливати на вставку додаткових вузлів при побудові базисних функцій.

Локальний алгоритм буде складатися із двох етапів: топологічний та геометричний. На першому етапі визначається, які контрольні точки треба буде вставити додатково. Після того як усі необхідні нові контрольні точки визначені, обчислюються декартові координати і ваги для шуканої Т-сітки.

З'ясуємо тепер алгоритм топологічного етапу. Важливим ключем до розуміння рішення проблеми є розуміння, як у Т-сплайні щільно пов'язані між собою базисні функції та Т-сітка: кожній контрольній точці відповідає базисна функція, і для кожної базисної функції за правилом 1 визначається вузловий вектор.

**Правило 1:** визначимо вузлові вектори  $s_i$  (4) та  $t_i$  (5) для точки  $P_i$ . Тоді вузловий вектор  $s_i$  складатиметься з перших двох вузлів, які будуть спільними для променя, що виходить з вузла  $(s_i, t_i)$  уздовж осі

s, та першими двома ребрами, з якими промінь перетинається. Аналогічно визначаються координати вузлового вектора  $t_1$ .

Наприклад, на рис.1 для точки  $P_1$  вузлові вектори мають координати  $s_1 = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ ,  $t_1 = (t_1, t_2, t_2 + e_6, +t_4)$ .

Припустимо, що на деякий час можуть існувати базисні функції, які будуть порушувати правило 1. Розглянемо три можливих порушення, які можуть виникнути в алгоритмі.

- *Порушення 1:* базисна функція припускає наявність вузла, який задовольняє правилу 1 для поточної T-сітки.

- *Порушення 2:* базисна функція має вузол, який не задовольняє правилу 1 для поточної T-сітки.

- *Порушення 3:* контрольна точка не має базисної функції, яка з нею пов'язана.

Якщо порушень не існує, T-сплайн побудований без порушень. Якщо порушення є, алгоритм буде вирішувати їх по одному, поки ніяких подальших порушень не буде існувати. Топологічний етап нашого алгоритму локального уточнення складається з наступних дій:

1. Вставити всі необхідні контрольні точки у T-сітку.
2. Якщо базисні функції винні в порушенні 1, виконати необхідні вставки вузла для таких базисних функцій.
3. Якщо змішувані функції винні в порушенні 2, додати відповідні контрольні точки у T-сітку.
4. Повторити кроки 2 і 3, поки не буде виявлено більше порушень.

Вирішення всіх випадків порушення 1 і 2 автоматично вирішить усі випадки порушення 3.

Проілюструємо алгоритм на прикладі. На рис 3,а зображено початкову T-сітку, в яку ми хочемо вставити одну контрольну точку P2. Оскільки T-сітка на рис. 3,а правильна, то жодних порушень не існує. Але якщо ми просто вставимо P2 у T-сітку (рис. 3,b) без зміни базових функцій, то одразу отримаємо декілька порушень. Оскільки P2 має координати вузлів  $(s3,t2)$ , то чотири базисні функції стають винними в порушенні 1: із центром у точках  $(s1,t2)$ ,  $(s2,t2)$ ,  $(s4,t2)$  та  $(s5,t2)$ . Щоб усунути ці порушення, ми повинні вставити вузол  $s3$  у кожній із цих функцій. Базисні функції із центром у точці  $(s2,t2)$ :

$$N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s)N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t).$$

Вставка вузла  $s3$  у вектор  $s$  розбиває базисну функцію на дві функції:

$$c_1 N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s)N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t),$$

$$d_2 N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s)N[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4](t).$$

Перша із функцій задовольняє правилу 1. Крім того, функції з центром у точках  $(s_2, t_2)$ ,  $(s_4, t_2)$  та  $(s_2, t_2)$  задовольняють правилу 1.

Тим не менш вузловий вектор  $t$  функцій  $d_2 N[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5](s) N[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5](t)$  має порушення 2, оскільки для вектора  $t = [t_0, t_1, t_2, t_3, t_4]$  правило 1 не виконується для вузла  $t_3$ . Ця проблема не може бути усунута шляхом переробки функцій. Слід додати додаткову точку до контрольної Т-сітки. Необхідна контрольна точка  $P_3$  на рис. 3,е. Вставка контрольної точки усуває порушення 2, але виникає новий випадок порушення 1. Як показано на рис. 3,ф, функція із центром у  $(s_2, t_3)$  має вузловий вектор  $s$ , який не включає в себе вузол  $s_3$ , що необхідно для правила 1. Вставка  $s_3$  у вузловий вектор вирішує проблему, і немає подальших порушень правила 1.

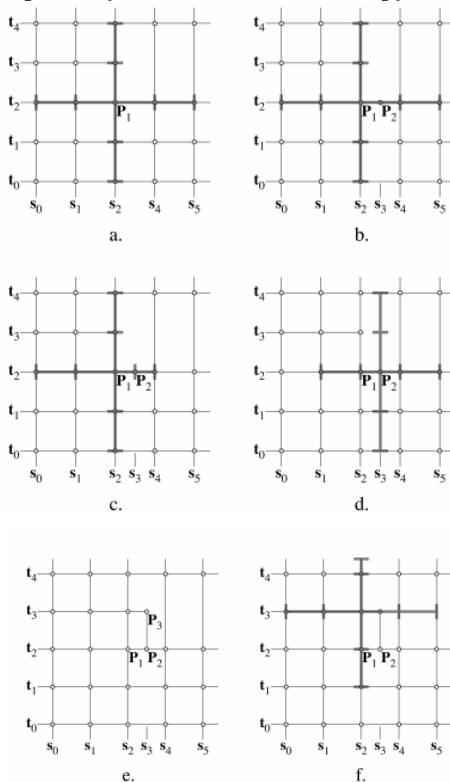


Рис. 3. Алгоритм

Цей алгоритм завжди гарантовано зупинеться. У гіршому випадку алгоритм буде розповсюджувати скрізь ряди контрольних точок, щоб перетнути всю поверхню. У практиці, як правило, алгоритм вимагає кількох додаткових нових контрольних точок, крім тих, що користувач хоче вставити. Таким чином, це уточнення алгоритму має два істотних плюси: алгоритм завжди відпрацює і мінімізує кількість додаткових вузлів для вставки.

**Висновки.** У статті було розглянуто основні положення побудови поверхні за допомогою Т-сплайнів. Розглянуто алгоритм локального уточнення. У наступному дослідженні вивчатиметься якість побудованих Т-сплайн-поверхонь для даних екологічного моніторингу.

#### Бібліографічні посилання

1. Isogeometric Analysis using T-splines / Y. Bazilevs, V.M. Calo, J.A. Cottrell [and others], 2008
2. T-spline Simplification and Local Refinement / W. S. Thomas, L. C. David, G. T. Finnigan [and others] // Brigham Young University, 2008.
3. **Amenta N.** A simple algorithm for homeomorphic surface reconstruction / S. Choi, T. K. Dey, N. Leekha. // Proceedings of the sixteenth annual symposium on Computational geometry, 2000. – P. 213–222.
4. **Bernardini F.** The ball-pivoting algorithm for surface re-construction / J. Mittleman, H. Rushmeier, C. Silva, and G. Taubin. // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2005, 11(2). – P. 181–192.
5. **Dey T.K.** Tight cocone: a water-tight surface reconstructor / S. Goswami // In Proc. SMI'03, 2003. – P. 127–134.
6. **Eck M.** Automatic reconstruction of b-spline surfaces of arbitrary topological type / H. Hoppe // SIGGRAPH'96, 1996. – P. 325–334.
7. **Gu X.** Manifold splines / Y. He, and H. Qin // Graphical Models, 2006, 68(3). – P. 23–254.
8. **Ettler B.J.** Least squares fitting of algebraic spline surfaces / A. Felis // Adv. Comput. Math., 17, 2002. – P. 135–152.
9. **Carr J.C.** Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions / R. K. Beatson, J. B. Cherrie, T. J. Mitchell, W. R. Fright, B. C. McCallum, T. R. Evans // Proc. SIGGRAPH'01, 2001. – P. 67–76.

Надійшла до редколегії 15.10.2013 р.