

УДК 519.652:519.254

П.О. Приставка, О.Г. Чолишкіна

*Національний авіаційний університет*

## ДОСЛІДЖЕННЯ *B*-СПЛАЙНА ШОСТОГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ

Отримано властивості *B*-сплайна шостого порядку, визначеного на рівномірному розбитті. Досліджено властивості поліноміального сплайна на основі *B*-сплайнів шостого порядку, що є близьким до інтерполяційного у середньому.

**Ключові слова:** *B*-сплайн, поліноміальний сплайн, близький до інтерполяційного у середньому, норма сплайну.

Получены свойства *B*-сплайна шестого порядка, определённого на равномерном разбиении. Исследовано свойства полиномиального сплайна на основе *B*-сплайнов шестого порядка, близкого к интерполяционному в среднем.

**Ключевые слова:** *B*-сплайн, полиномиальный сплайн, близкий к интерполяционному в среднем, норма сплайна.

This article is the solution of practical research of the *B*-spline of six order. We obtain and research properties of polynomial spline based on the *B*-splines of six order that, related to the interpolator on average.

**Keywords:** *B*-spline, polynomial spline that, related to interpolator on average, norm of spline.

**Постановка проблеми.** Зазвичай при фіксації аналогового сигналу має місце таке. Нехай  $\phi(t)$  – функція імпульсного відклику системи, що реєструє сигнал  $p(t)$ . У силу суто технічних властивостей систем реєстрації результатом згортки сигналу та функції відклику буде значення, усереднене на інтервалі дискретизації, зокрема

$$(p * \phi)(ih) = \frac{1}{h} \int_{ih-\frac{h}{2}}^{ih+\frac{h}{2}} p(\tau)\phi(\tau - ih)d\tau = \bar{p}_i$$

Тоді цифровий сигнал може мати таке подання:

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

де  $\varepsilon_i$  – випадкова вада. Стосовно вади  $\varepsilon_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  можна припускати будь-який розподіл, проте за замовченням вважають, що має місце розподіл Гауса з нульовим математичним сподіванням та деякою дисперсією  $\sigma_\varepsilon^2$ . Тому в задачах обробки цифрових сигналів, що задані співвідношенням (1), як модель  $p(t)$  є потреба використовувати наближення із властивостями імпульсного нерекурсивного низькочастотного фільтра, наприклад лінійні комбінації  $B$ -сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому [1].

Відомо [2; 3], що будь-який  $B$ -сплайн порядку вище першого може бути використаний для визначення коротковіконного перетворення Фур'є; при цьому вже починаючи з п'ятого порядку  $B$ -сплайн у частотній області фактично мало чим відрізняється від гаусіана, хоча обрахунок  $B$ -сплайна п'ятого порядку [4] потребує менше обчислювальних витрат. Саме тому актуальним є дослідження лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів вищого порядку, ніж п'ятий: від подібних сплайнів варто очікувати більш високі згладжувальні властивості при відносно низькій обчислювальній складності.

**Аналіз досліджень та постановка задачі.** Задачу відтворення гладких функцій на основі лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів висвітлено в роботах І. Шоенберга, К. Де Бора, М.П. Корнійчука та ін. Увагу поліноміальним сплайнам, визначеним на локальних носіях, близьким до інтерполяційних у середньому, приділено А.О.Лигуном, О.А.Шумейко, В.В.Кармазіною [5 – 7] та у авторських дослідженнях [8].

Нехай із кроком  $h > 0$  задане розбиття дійсної осі  $\Delta_h : t_i = ih$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції  $p(t) \in C^r$ ,  $r \geq 2$ , визначеної на  $\mathbb{R}_1(-\infty; \infty)$ . Вважають, що інформація про функцію  $p(t)$ , яка підлягає відтворенню, задана у

вузлах розбиття  $\Delta_h$  у вигляді інтеграла  $\bar{p}_i = \frac{1}{h} \int_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t) dt$ ; при

цьому істинне значення функції  $p(t)$  у вузлах визначається аналогічно виразу (1).

Для апроксимації функції  $p(t)$  за значеннями типу (1) у вузлах

розбиття  $\Delta_h$  вводяться такі поліноміальні сплайни на основі  $B$ -сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому:

$$S_{r,0}(p, t) = \sum_{i \in Z} p_i B_{r,h}(t - (i + 0,5)h), \quad r = 2, 4,$$

$$S_{r,0}(p, t) = \sum_{i \in Z} p_i B_{r,h}(t - ih), \quad r = 3, 5,$$

де  $B$ -сплайн  $B_{r,h}(t)$  порядку  $r$  ( $r \geq 1$ ) визначається рекурентно таким чином: якщо

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2], \end{cases}$$

то

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Наприклад,  $B$ -сплайн п'ятого порядку є таким:

$$B_{5,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h; 3h], \\ \frac{1}{120} \left(3 + \frac{t}{h}\right)^5, & t \in [-3h; -2h], \\ -\frac{1}{24} \left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{5}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^2 - \frac{5}{8} \left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [-2h; -h], \\ \frac{1}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [-h; 0], \\ -\frac{1}{12} \left(\frac{t}{h}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{11}{20}, & t \in [0; h], \\ \frac{1}{24} \left(\frac{t}{h}\right)^5 - \frac{3}{8} \left(\frac{t}{h}\right)^4 + \frac{5}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^3 - \frac{7}{4} \left(\frac{t}{h}\right)^2 + \frac{5}{8} \left(\frac{t}{h}\right) + \frac{51}{120}, & t \in [h; 2h], \\ \frac{1}{120} \left(3 - \frac{t}{h}\right)^5, & t \in [2h; 3h]. \end{cases} \quad (3)$$

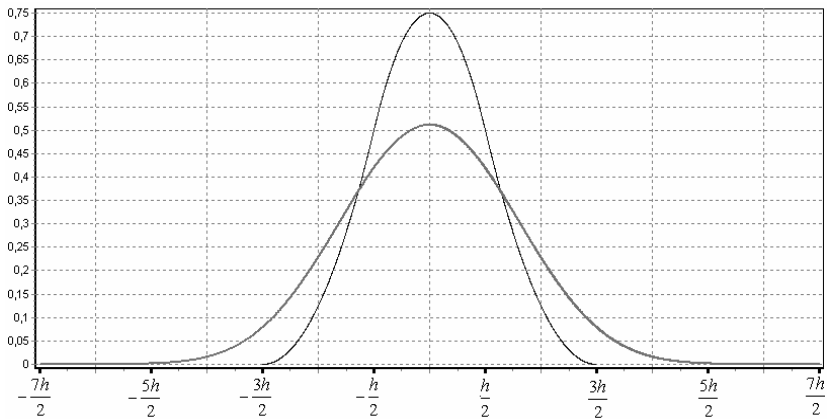
Про похибку відтворення функції  $p(t)$  за використанням сплайнів  $S_{r,0}(p,t)$ ,  $r=2,3,4,5$  свідчать твердження [4–8]: при  $h \rightarrow 0$  для довільної функції  $p(t) \in C^2$  виконується

$$\|p(t) - S_{r,0}(p,t)\| \leq \frac{(r+2)h^2}{24} \|p''\| + \varepsilon \|p\| + o(h^2). \quad (4)$$

Поставимо за мету даної роботи отримати подання  $B$ -сплайна шостого порядку та дослідити відповідний поліноміальний сплайн, що є лінійною комбінацією зазначених  $B$ -сплайнів.

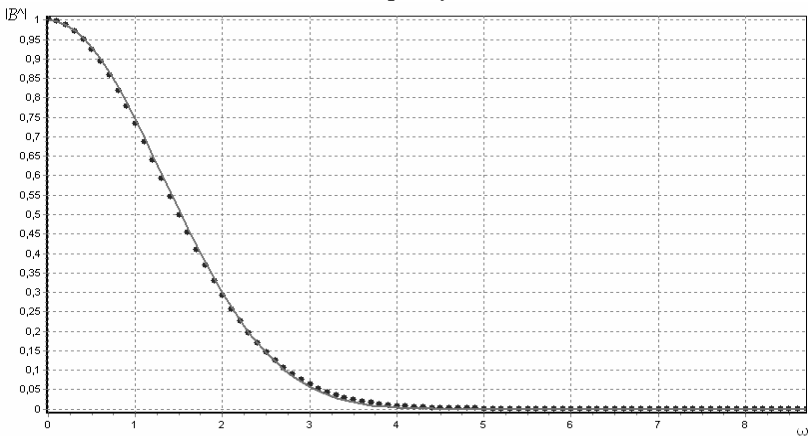
**Вклад основного матеріалу.** На підставі виразів (2), (3) неважко отримати такий вираз для  $B$ -сплайна шостого порядку (рис. 1):

$$B_{6,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin \left[ \frac{7h}{2}, \frac{7h}{2} \right], \\ \frac{1}{720} \left( \frac{t}{h} - \frac{7}{2} \right)^6, & t \in \left[ \frac{7h}{2}, \frac{5h}{2} \right], \\ -\frac{1}{120} \left( \frac{t}{h} \right)^6 - \frac{7}{60} \left( \frac{t}{h} \right)^5 - \frac{21}{32} \left( \frac{t}{h} \right)^4 - \frac{133}{72} \left( \frac{t}{h} \right)^3 - \frac{329}{128} \left( \frac{t}{h} \right)^2 - \frac{1267}{960} \left( \frac{t}{h} \right) + \frac{1379}{7680}, & t \in \left[ \frac{5h}{2}, \frac{3h}{2} \right], \\ \frac{1}{48} \left( \frac{t}{h} \right)^6 + \frac{7}{48} \left( \frac{t}{h} \right)^5 + \frac{21}{64} \left( \frac{t}{h} \right)^4 + \frac{35}{288} \left( \frac{t}{h} \right)^3 - \frac{91}{256} \left( \frac{t}{h} \right)^2 + \frac{7}{768} \left( \frac{t}{h} \right) + \frac{7861}{15360}, & t \in \left[ \frac{3h}{2}, \frac{h}{2} \right], \\ -\frac{1}{36} \left( \frac{t}{h} \right)^6 + \frac{7}{48} \left( \frac{t}{h} \right)^4 - \frac{77}{192} \left( \frac{t}{h} \right)^2 + \frac{5887}{11520}, & t \in \left[ \frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], \\ \frac{1}{48} \left( \frac{t}{h} \right)^6 - \frac{7}{48} \left( \frac{t}{h} \right)^5 + \frac{21}{64} \left( \frac{t}{h} \right)^4 - \frac{35}{288} \left( \frac{t}{h} \right)^3 - \frac{91}{256} \left( \frac{t}{h} \right)^2 - \frac{7}{768} \left( \frac{t}{h} \right) + \frac{7861}{15360}, & t \in \left[ \frac{h}{2}, \frac{3h}{2} \right], \\ -\frac{1}{120} \left( \frac{t}{h} \right)^6 + \frac{7}{60} \left( \frac{t}{h} \right)^5 - \frac{21}{32} \left( \frac{t}{h} \right)^4 + \frac{133}{72} \left( \frac{t}{h} \right)^3 - \frac{329}{128} \left( \frac{t}{h} \right)^2 + \frac{1267}{960} \left( \frac{t}{h} \right) + \frac{1379}{7680}, & t \in \left[ \frac{3h}{2}, \frac{5h}{2} \right], \\ \frac{1}{720} \left( \frac{t}{h} - \frac{7}{2} \right)^6, & t \in \left[ \frac{5h}{2}, \frac{7h}{2} \right]. \end{cases} \quad (5)$$



**Рис.1.  $B$ -сплайни: порядку  $r = 2$  (тонка лінія);  
порядку  $r = 6$  (товста лінія)**

На графіку (рис.2), порівняно з гаусіаном, продемонстровано властивості  $B$ -сплайна шостого порядку в частотній області.



**Рис.2. Частотна область:  $B$ -сплайн шостого порядку (суцільна лінія);  
гаусіан (крапки) з  $\sigma = 0,782$**

Із виразу (5) зрозуміло, що сплайн  $B_{6,h}(t)$  є симетричною функцією відносно носія  $d_6 = [-7h/2; 7h/2]$  із такими властивостями:

$$B_{6,h}(0) = \frac{5887}{11520}, \quad B_{6,h}\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \frac{151}{360}, \quad B_{6,h}(\pm h) = \frac{10543}{46080},$$

$$B_{6,h}\left(\pm \frac{3h}{2}\right) = \frac{19}{240}, \quad B_{6,h}(\pm 2h) = \frac{361}{23040}, \quad B_{6,h}\left(\pm \frac{5h}{2}\right) = \frac{1}{720},$$

$$B_{6,h}(\pm 3h) = \frac{1}{46080}, \quad B_{6,h}\left(\pm \frac{kh}{2}\right) = 0, \quad k > 6,$$

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} B_{6,h}(t) dt = \frac{151}{315}, \quad \frac{1}{h} \int_{(\pm 1-1/2)h}^{(\pm 1+1/2)h} B_{6,h}(t) dt = \frac{397}{1680},$$

$$\frac{1}{h} \int_{(\pm 2-1/2)h}^{(\pm 2+1/2)h} B_{6,h}(t) dt = \frac{1}{42}, \quad \frac{1}{h} \int_{(\pm 3-1/2)h}^{(\pm 3+1/2)h} B_{6,h}(t) dt = \frac{1}{5040},$$

$$\frac{1}{h} \int_{(\pm k-1/2)h}^{(\pm k+1/2)h} B_{6,h}(t) dt = 0, \quad k > 3,$$

$$\frac{1}{h} \int_{(\pm 1/2-1/2)h}^{(\pm 1/2+1/2)h} B_{6,h}(t) dt = \frac{259723}{645120}, \quad \frac{1}{h} \int_{(\pm 3/2-1/2)h}^{(\pm 3/2+1/2)h} B_{6,h}(t) dt = \frac{20219}{215040},$$

$$\frac{1}{h} \int_{(\pm 5/2-1/2)h}^{(\pm 5/2+1/2)h} B_{6,h}(t) dt = \frac{2179}{645120}, \quad \frac{1}{h} \int_{(\pm 7/2-1/2)h}^{(\pm 7/2+1/2)h} B_{6,h}(t) dt = \frac{1}{645120},$$

$$\frac{1}{h} \int_{(\pm k/2-1/2)h}^{(\pm k/2+1/2)h} B_{6,h}(t) dt = 0, \quad k > 7.$$

За аналогією зі сплайнами  $B_{r,h}(t)$ ,  $r = 2, 3, 4, 5$  можна стверджувати, що якщо  $S_r(\Delta_h)$  – множина всіх сплайнів мінімального дефекту за розбиттям  $\Delta_h$  і  $B_{6,h}(t) \in S_6(\Delta_h)$ , то лінійна комбінація сплайнів  $B_{6,h}(t)$  також буде належати множині сплайнів мінімального дефекту  $S_6(\Delta_h)$ .

Для апроксимації функції  $p(t)$  за значеннями типу (1) у вузлах розбиття  $\Delta_h$  введемо таку лінійну комбінацію  $B$ -сплайнів (5):

$$S_{6,0}(p, t) = \sum_{i \in Z} p_i B_{6,h}(t - (i + 0,5)h). \quad (6)$$

Подамо сплайн  $S_{6,0}(p, t)$  у зручному для реалізації в обчислювальному середовищі вигляді. Якщо ввести заміну  $x = 2(t - (i + 0,5)h)/h$ ,  $|x| \leq 1$ , то вираз (6) можна записати так:

$$\begin{aligned} S_{6,0}(p, t) = & \frac{1}{46080} \left( (1-x)^6 p_{i-3} + \right. \\ & + (722 - 1416x + 1110x^2 - 400x^3 + 30x^4 + 24x^5 - 6x^6) p_{i-2} + \\ & + (10543 - 8670x + 1185x^2 + 860x^3 - 255x^4 - 30x^5 + 15x^6) p_{i-1} + \\ & + (23548 - 4620x^2 + 420x^4 - 20x^6) p_i + \\ & + (10543 + 8670x + 1185x^2 - 860x^3 - 255x^4 + 30x^5 + 15x^6) p_{i+1} + \\ & \left. + (722 + 1416x + 1110x^2 + 400x^3 + 30x^4 - 24x^5 - 6x^6) p_{i+2} + (1+x)^6 p_{i+3} \right). \quad (7) \end{aligned}$$

Нехай у вузлах розбиття  $\Delta_h$  для значень деякої гладкої неперервної функції  $p(t)$  виконується умова (1). Тоді для сплайна (6) має місце рівність

$$S_{6,0}(p, t) = S_{6,0}(\bar{p}, t) + S_{6,0}(\varepsilon, t).$$

Оцінка якості відтворення функції  $p(t)$  зводиться до оцінки відхилення

$$|p(t) - S_{6,0}(p, t)| = |p(t) - S_{6,0}(\bar{p}, t) - S_{6,0}(\varepsilon, t)|$$

або для  $|\varepsilon_i| < \varepsilon$ ,  $i \in Z$ , до оцінки нерівності

$$|p(t) - S_{6,0}(p, t)| \leq |p(t) - S_{6,0}(\bar{p}, t)| + \varepsilon \|S_{6,0}\|, \quad (8)$$

де  $\|S_{6,0}\| = \sup_{|\varepsilon_i|} \max_t |S_{6,0}(\varepsilon, t)|$  – норма сплайн-оператора  $S_{6,0}(p, t)$ .

Подальша задача оцінки якості відтворення  $p(t)$  складається із двох етапів: знаходження норми сплайн-оператора  $S_{6,0}(p, t)$  і задача визначення похибки відтворення.

З урахуванням розкладу  $S_{6,0}(\bar{p}, t)$  та  $p(t) \in C^6$  у ряд Тейлора в околі точки  $((i-0,5)h)$  нескладно стверджувати, що для  $\forall p(t) \in C^2$  при  $h \rightarrow 0$  рівномірно по  $t$  має місце асимптотична рівність

$$p(t) - S_{6,0}(\bar{p}, t) = -\frac{1}{3} p''(t) h^2 + o(h^2).$$

Отже, при  $h \rightarrow 0$  для довільної функції  $p(t) \in C^2$  виконується

$$\|p(t) - S_{5,0}(\bar{p}, t)\| = \frac{7h^2}{24} \|p''\| + o(h^2).$$

Проведемо оцінку норми сплайна (6).

*Теорема 1.* Для сплайна  $S_{6,0}(p, t)$  є вірним

$$\|S_{6,0}\| = \|p\|.$$

*Доведення.* Із представлення сплайна  $S_{6,0}(p, t)$  у вигляді (7) випливає, що

$$\|S_{6,0}\| \leq \frac{1}{46080} \|p\| \max_{|x| \leq 1} A(x),$$

де

$$\begin{aligned} A(x) = & \left| (1-x)^6 \right| + \left| 722 - 1416x + 1110x^2 - 400x^3 + 30x^4 + 24x^5 - 6x^6 \right| + \\ & + \left| 10543 - 8670x + 1185x^2 + 860x^3 - 255x^4 - 30x^5 + 15x^6 \right| + \\ & + \left| 23548 - 4620x^2 + 420x^4 - 20x^6 \right| + \\ & + \left| 10543 + 8670x + 1185x^2 - 860x^3 - 255x^4 + 30x^5 + 15x^6 \right| + \\ & + \left| 722 + 1416x + 1110x^2 + 400x^3 + 30x^4 - 24x^5 - 6x^6 \right| + \left| (1+x)^6 \right|. \end{aligned}$$

Ураховуючи, що функція  $A(x)$  є парною, для знаходження її максимуму достатньо розглянути її для  $x \in [0; 1]$ . Для цих  $x$ , зважаючи, що вирази під знаком модуля більші за нуль, маємо

$$\max_{x \in [0; 1]} A(x) = 46080.$$



Таким чином,

$$\|S_{6,0}\| \leq \|p\|. \quad (9)$$

З іншого боку, для будь-якого частинного випадку

$$\|S_{6,0}(p, t)\| \geq \|S_{6,0}(p^*, t)\|.$$

Тоді для  $x = 0$  маємо

$$S_{6,0}(p, t) = \frac{1}{46080} \left( p_{i-3}^* + 722p_{i-2}^* + 10543p_{i-1}^* + 23548p_i^* + 10543p_{i+1}^* + 722p_{i+2}^* + p_{i+3}^* \right).$$

Якщо

$$p_{i-3}^* = p_{i-2}^* = p_{i-1}^* = p_i^* = p_{i+1}^* = p_{i+2}^* = p_{i+3}^* = \|p\|,$$

то

$$\|S_{6,0}\| \geq \|S_{6,0}(p^*, t)\| \geq |S_{6,0}(p^*, 0)| = \|p\|,$$

а отже, з урахуванням (9), приходимо до висновку, що

$$\|S_{6,0}\| = \|p\|.$$

Теорему доведено.

*Наслідок 2.* Для  $\forall p(t) \in C^2$  має місце

$$\|p(t, q) - S_{6,0}(p, t)\| \leq \frac{h^2}{3} \|p''\| + \varepsilon \|p\| + o(h^2).$$

**Висновки.** У роботі отримано подання та властивості  $B$ -сплайна шостого порядку, визначеного на рівномірній сітці вузлів. Отримано явний вигляд та проведено дослідження поліноміального сплайна, близького до інтерполяційних у середньому, що є лінійною комбінацією  $B$ -сплайнів шостого порядку.

Як слід було очікувати, у порівнянні зі сплайнами  $S_{r,0}(p, t)$ ,  $r = 2, 3, 4, 5$  сплайн  $S_{6,0}(p, t)$  має більш виражені властивості згладжування; підтверджено справедливість нерівності (4) для випадку, коли  $r = 6$ .

Подальші дослідження можуть полягати в отриманні часткових випадків сплайна  $S_{6,0}(p, t)$  задля реалізації їх у задачах обробки

цифрових сигналів та узагальнення теоретичних результатів досліджень на дво- та багатовимірний випадок.

#### Бібліографічні посилання

1. **Приставка П.О.** Лінійні комбінації  $B$ -сплайнів, близькі до інтерполяційних у середньому, в задачі моделювання аналогових сигналів / П.О. Приставка // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. пр. – Д.: Вид-во ДНУ. – 2011. –Т.15. – С.4–17.
2. **Чуи Ч.** Введение в вэйвлеты: пер. с. англ. / Ч. Чуи – М.: Мир, 2001. – 412 с.
3. **Unser M.** Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing, IEEE Signal Processing Magazine / M/Unser5 // – 1999. – Vol. 16, No. 6. – P. 22–38.
4. **Приставка П.О.** Дослідження  $B$ -сплайну  $n$ -'ятого порядку та їх лінійної комбінації / П.О.Приставка, О.Г.Чолишкіна // Математичне моделювання. 2007 – Дніпродзержинськ, ДДТУ. – №1(16). – С.14–17.
5. **Лигун А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых. / А.А.Лигун, А.А.Шумейко. – К.: ІМ НАН України, 1996. – 358 с.
6. **Лигун А.А.** О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка/ А.А.Лигун, В.В.Кармазина. – Днепродзержинск, Днепродзерж. индустр. ин-т., 1989. – 30 с. – Деп. в УкрНИИИТИ 8.06.89г., N1559- Ук89.
7. **Лигун А.А.** Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов // А.А.Лигун, В.В.Кармазина / Днепродзерж. индустр. ин-т. – Днепродзержинск, 1989. – 38 с. – Деп. в УкрНИИИТИ 13.11.89г., N2569 – Ук89.
8. **Приставка П.О.** Поліноміальні сплайни при обробці даних / П.О.Приставка. – Д.: Вид-во ДНУ, 2004. – 236 с.

*Надійшла до редколегії 01.07.2013 р.*