Ольга О. Головань, Олександр М. Олійник, Віктор О. Шишкін

МОДЕЛЮВАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ БІЗНЕС-ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ

У статті застосовано сучасний математичний апарат побудови моделі логістичного бізнес-процесу оптимального замовлення. Ефективність формули Уільсона, що використовується в сучасній теорії та практиці логістики, обмежується великою кількістю припущень, серед яких основною є умова постійності витрат на виконання замовлення. На основі асимптотичних методів одержано зручну для застосування формулу, що дозволяє зняти це обмеження.

Ключові слова: *логістичні бізнес-процеси; оптимальний розмір замовлення; метод збурень; асимптотичні методи; формула Уільсона.*

Форм. 13. Рис. 1. Табл. 1. Літ. 10.

Ольга А. Головань, Александр Н. Олейник, Виктор А. Шишкин

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКИХ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В статье использован современный математический аппарат для построения модели логистического бизнес-процесса оптимального заказа. Эффективность формулы Уильсона, используемой в современной теории и практике логистики, ограничивается большим количеством допущений, среди которых основным является условие постоянства расходов на выполнение заказа. На основе асимптотических методов получена удобная для применения формула, позволяющая снять это ограничение.

Ключевые слова: *логистические бизнес-процессы; оптимальный размер заказа; метод возмущений; асимптотические методы; формула Уильсона.*

Olga O. Golovan[1], Oleksandr Oliynyk[2], Viktor O. Shyshkin[3]

LOGISTIC BUSINESS PROCESSES MODELLING USING ASYMPTOTIC METHODS

The study uses advanced mathematical tools for construction of a logistic business processes model of optimal order. The efficiency of Wilson's formula, used in theory and practice of logistics, is limited by a lot of assumptions, especially by the condition of constant order costs. Based on asymptotic methods a simple formula is obtained, which allows removing this restriction.

Keywords: *logistic business processes; optimal order size; perturbation technique; asymptotic methods; Wilson's formula.*

Постановка проблеми. Сучасні математичні методи оптимізації економічних процесів і поглибленого аналізу кількісних залежностей між окремими показниками є важливим інструментом моделювання економічних явищ загалом та в логістиці зокрема. На практиці зручними для використання є аналітичні моделі, в яких поведінка об'єкта моделювання описується в прийнятній формі точними аналітичними співвідношеннями. Найбільш поширеною аналітичною моделлю прикладної логістики є модель оптимального або економічного розміру замовлення (economic order quantity — EOQ). Використання даних моделей обмежується припущеннями, серед яких є умова постійності витрат на виконання замовлення та зберігання одиниці продукції. На практи-

[1] Zaporizhzhya National University, Ukraine.
[2] Zaporizhzhya National University, Ukraine.
[3] Zaporizhzhya National University, Ukraine.

ці, як правило, ці умови не виконуються, тому дослідника може цікавити ступінь та характер впливу варіації вхідних параметрів моделі на кінцевий результат.

Відхилення реальної системи від її спрощеної математичної моделі можуть мати різний характер. У тому випадку, коли параметри вихідної системи зазнають незначних змін, відхилення системи можуть бути малі в усій області зміни параметрів. Для аналізу «збуреної» системи можуть використовуватися асимптотичні методи, які дозволяють знайти розв'язок задачі лише в невеликих границях зміни параметрів системи. Перевагою асимптотичних методів є простота і точність за рахунок локалізації, сутність яких полягає в тому, що в околі деякого граничного стану знаходиться спрощений розв'язок задачі, який є тим точніше, чим менший цій окіл.

Аналіз останніх публікацій. Проблема структуризації моделей і методів, які застосовуються в теорії логістики, має ґрунтовну наукову основу. Це питання традиційно розглядається в контексті дисциплін, які складають наукову базу логістики [3–5; 8–10]. Класифікація та аналіз моделей і методів логістики пропонується в роботі В.С. Лукінського [6], де представлена структуризація моделей і методів теорії логістики, яка дозволяє виявити зв'язок з розв'язанням конкретних задач, які виникають при здійсненні логістичної діяльності. Докладний опис і практичне застосування асимптотичних методів збурень подані в роботах І.В. Андріанова [1], В.З. Грищака [2], Л.І. Маневича [1], А.Х. Найфе [7]. Проте проблема застосування асимптотичних методів в логістичних моделях з метою аналізу чутливості системи до незначних збурень залишається недостатньо дослідженою і потребує подальшого вивчення.

Метою дослідження є побудова моделі логістичного бізнес-процесу замовлення з одержанням асимптотичного розв'язку цієї прикладної задачі при збуренні параметрів системи, а також аналіз її чутливості до зміни параметрів.

Основні результати дослідження. Основна ідея асимптотичних методів полягає в тому, що шуканий розв'язок задачі подається у вигляді розвинення в ряд за ступенями деякого малого параметра, який виникає природно або вводиться штучно для зручності. Для дослідження конкретної прикладної задачі заздалегідь припускають, яку форму буде мати розв'язок у вигляді ряду, і підбирають відповідну асимптотичну послідовність. Найбільш простою і найчастіше використовуваною на практиці є послідовність цілих степенів малого параметра, зокрема ε^n. Наближений розв'язок має асимптотичний характер в тому розумінні, що він наближається до відповідного точного розв'язку не при збільшенні кількості членів розвинення N, а при фіксованому N і прямуванні малого параметра до нуля, тобто:

$$f(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N}a_n(x)\delta_n(\varepsilon)+o(\delta_N(\varepsilon)),\quad \text{при } \varepsilon\to 0, \tag{1}$$

де $\delta_n(\varepsilon)$ – деяка асимптотична послідовність.

На практиці, як правило, розв'язок представляється першими кількома членами асимптотичного розвинення, число яких, як правило, не перевищує двох.

Поширеною моделлю логістичних бізнес-процесів є модель оптимального або економічного розміру замовлення. Розрахунок EOQ здійснюється на основі сумарних загальних витрат, які можна представити у вигляді функції:

$$C_{\sum} = C_{Придб} + C_{Замовл} + C_{Збер} + C_{Д}, \tag{2}$$

де $C_{Придб}$ — витрати на придбання продукції; $C_{Замовл}$ — витрати на оформлення замовлення; $C_{Збер}$ — витрати на зберігання запасів; $C_{Д}$ — втрати від дефіциту запасу.

Різновидом формули для визначення оптимального розміру замовлення є формула Уїльсона [6]:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{C_0 S}{\alpha k}}, \tag{3}$$

де q — величина замовлення (шт., т); C_0 — витрати на виконання одного замовлення (гр. од.); S — потреба у замовленні продукту протягом даного періоду (од., т); α — витрати на зберігання одиниці продукції з урахуванням займаної площі складу за певний період (гр. од./ м^2 за період); k — коефіцієнт, який враховує просторові габарити одиниці продукції (м^2/од.).

Основну частину витрат на виконання замовлення C_0 представляють транспортні витрати, які внаслідок зростання цін на паливо постійно збільшуються. Якщо підвищення витрат на замовлення відбувається на регулярній основі, дослідника буде цікавити питання, чи впливатиме зміна цього фактору на розмір замовлення продукції.

Якщо припустити, що за певний період часу витрати на виконання замовлення збільшуються на $i\%$, то через n періодів вони сягатимуть $C_0 \times \left(1 + \frac{i\%}{100\%}\right)^n$.

Прийнявши за малий параметр збурення відношення $\varepsilon = i\% / 100\%$ ($\varepsilon << 1$), маємо залежність витрат на виконання замовлення у вигляді $C_0 \times (1+\varepsilon)^n$.

Як зазначалось раніше, використання формули (3) для визначення оптимального розміру замовлення обмежується великою кількістю припущень, серед яких є умова постійності витрат на виконання замовлення. Внаслідок малості параметра $\varepsilon << 1$ можна вважати, що відхилення від початкового значення C_0 є незначним і ця умова задовольняється. За цих умов формула оптимального розміру замовлень набуває вигляду:

$$q^*_{opt} = \sqrt{\frac{C_0 \times (1+\varepsilon)^n \times S}{\alpha k}}, \tag{4}$$

де ε — параметр збурення.

Модифікована формула визначення оптимального розміру замовлення у вигляді (4) не дозволяє наглядно уявити різницю між «збуреним» значенням q^*_{opt} та «незбуреним» (при $\varepsilon = 0$), що обчислюється за формулою (3). З метою встановлення зв'язку між «збуреним» та «незбуреним» значеннями розміру замовлення представимо q^*_{opt} у вигляді розвинення за ступенями штучно введеного малого параметра ε:

$$q^*_{opt} = q_0 + q_1 \times \varepsilon + q_2 \times \varepsilon^2 + \ldots \qquad (5)$$

Піднісши до квадрата обидві частини рівності (4), розклавши в ряд Тейлора (1 + ε)n та нехтуючи членами порядку ε^3 і більше, маємо:

$$\left(q_0 + q_1 \times \varepsilon + q_2 \times \varepsilon^2 + \ldots\right)^2 = \frac{C_0 S}{\alpha k}\left(1 + n \times \varepsilon + \frac{n \times (n-1)}{2} \times \varepsilon^2 + \ldots\right); \qquad (6)$$

$$q_0^2 + 2q_0 \times q_1 \times \varepsilon + q_1^2 \times \varepsilon^2 + 2q_0 \times q_2 \times \varepsilon^2 + \ldots = \\ = \frac{C_0 S}{\alpha k}\left(1 + n \times \varepsilon + \frac{n \times (n-1)}{2} \times \varepsilon^2 + \ldots\right). \qquad (7)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях параметра ε, одержуємо рівняння для визначення невідомих q_0, q_1, q_2:

$$\varepsilon^0 : q_0^2 = \frac{C_0 S}{\alpha k}; \qquad (8)$$

$$\varepsilon^1 : 2q_0 \times q_1 = \frac{C_0 S}{\alpha k} \times n; \qquad (9)$$

$$\varepsilon^2 : q_1^2 + 2q_0 \times q_2 = \frac{C_0 S}{\alpha k} \times \frac{n \times (n-1)}{2}. \qquad (10)$$

Розв’язуючи рівняння (8)–(10), маємо:

$$q_0 = \sqrt{\frac{C_0 S}{\alpha k}},\ q_1 = \frac{n}{2} \times \sqrt{\frac{C_0 S}{\alpha k}},\ q_2 = \frac{n \times (n-2)}{8} \times \sqrt{\frac{C_0 S}{\alpha k}}. \qquad (11)$$

Підставивши знайдені значення (11) у розвинення (5), одержимо асимптотичне представлення формули (4) у вигляді (12) або (13):

$$q^*_{opt} = \sqrt{\frac{C_0 S}{\alpha k}} \times \left(1 + \frac{n}{2} \times \varepsilon + \frac{n \times (n-2)}{8} \times \varepsilon^2\right), \qquad (12)$$

$$q^*_{opt} = q_{opt} \times \left(1 + \frac{n}{2} \times \varepsilon + \frac{n \times (n-2)}{8} \times \varepsilon^2\right). \qquad (13)$$

Як можна бачити з (13), відношення «збуреного» значення розміру замовлення до оптимального розміру $\delta = q^*_{opt} / q_{opt}$ дорівнює $\left(1 + \frac{n}{2} \times \varepsilon + \frac{n \times (n-2)}{8} \times \varepsilon^2\right)$. Величина відношення δ дозволяє визначити відсоткову зміну розміру замовленої партії товару в умовах поступового підвищення витрат на виконання замовлення.

Проаналізуємо чутливість отриманої модифікованої формули Уїльсона для визначення оптимального розміру замовлення до зміни параметрів. Результати даного дослідження представлені в табл. 1, де наведені відносні показники зміни розміру замовлення при різних значеннях параметрів ε та n.

Отже, наприклад, при збільшенні витрат на виконання замовлення з кожним періодом на 1% (ε = 0,01), 1,5% (ε = 0,015) та 2% (ε = 0,02) обсяги замовлення наприкінці 6-ого періоду збільшуються на 3,03%, 4,57% та 6,12% відповідно.

Таблиця 1. **Відносні показники зміни оптимального розміру замовлення,** *авторська розробка*

Кількість періодів, n	$\varepsilon = 0{,}01$		$\varepsilon = 0{,}015$		$\varepsilon = 0{,}02$	
	q^*_{opt}/q_{opt}	%	q^*_{opt}/q_{opt}	%	q^*_{opt}/q_{opt}	%
1	1,0050	0,50	1,0075	0,75	1,0100	1,00
2	1,0100	1,00	1,0150	1,50	1,0200	2,00
3	1,0150	1,50	1,0226	2,26	1,0302	3,02
4	1,0201	2,01	1,0302	3,02	1,0404	4,04
5	1,0252	2,52	1,0379	3,79	1,0508	5,08
6	1,0303	3,03	1,0457	4,57	1,0612	6,12
7	1,0354	3,54	1,0535	5,35	1,0718	7,18
8	1,0406	4,06	1,0614	6,14	1,0824	8,24
9	1,0458	4,58	1,0693	6,93	1,0932	9,32
10	1,0510	5,10	1,0773	7,73	1,1040	10,40
11	1,0562	5,62	1,0853	8,53	1,1150	11,50
12	1,0615	6,15	1,0934	9,34	1,1260	12,60

Наочно характер залежності зміни розміру оптимальної партії за періодами в умовах поступового підвищення витрат на виконання замовлення представлено на рис. 1.

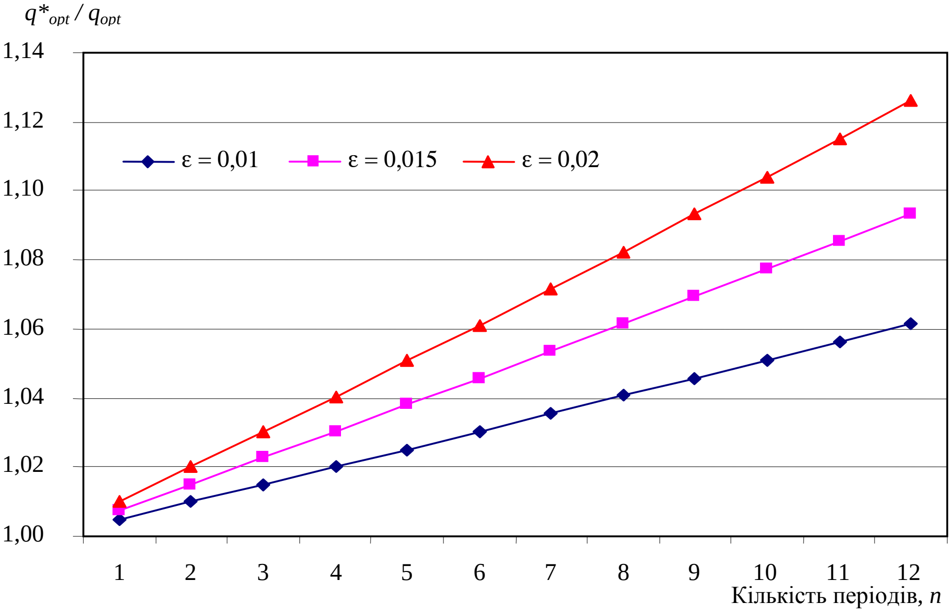

Рис. 1. **Залежність зміни розміру оптимальної партії від значень параметрів** ε **та** n**,** *авторська розробка*

Висновки. У дослідженні застосовано сучасний математичний апарат для побудови моделі логістичного бізнес-процесу замовлення. В теорії та практиці логістики використовується формула Уільсона, ефективність якої обмежується великою кількістю припущень, серед яких основною є умова постійності витрат на виконання замовлення. Одержана в дослідженні формула з використанням асимптотичних методів збурення дозволяє зняти це обмеження, якщо виконуються умова малості зазначеного параметра. Крім того, отримане розвинення є зручним для застосування в практичній діяльності фахівцями з логістики.

У дослідженні виконано оцінку чутливості отриманої модифікованої формули Уільсона для визначення оптимального розміру замовлення до зміни параметрів.

Перспективи подальшого дослідження полягають у застосуванні запропонованого асимптотичного апарату для моделювання інших складних логістичних систем.

1. *Андрианов И.В., Маневич Л.И.* Асимптология: идеи, методы, результаты. – М.: Аслан, 1994. – 160 с.
2. *Грищак В.З.* Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування: Монографія. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2009. – 226 с.
3. Імітаційне моделювання в задачах дослідження матеріальних потоків логістичних систем // Екон.-мат. моделювання соц.-екон. систем: Збірник наук. праць МННЦІТС НАН та МОН України.– 2009.– Вип. 14. – С. 91–114.
4. *Каира З.С., Лукьянченко А.А., Омельянчук А.И.* Основы логистики. – Донецк: Юго-Восток, Лтд, 2003. – 522 с.
5. *Крикавський Є.В.* Логістика. – Львів: Національний університет «Львівська політехніка», 2004. – 756 с.
6. Модели и методы теории логистики: Учеб. пособие / Под ред. В.С. Лукинского. – СПб.: Питер, 2007. – 448 с.
7. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 536 с.
8. *Окландер М.А.* Логістична система підприємства: Монографія. – Одеса: Астропринт, 2004. – 312 с.
9. *Чухрай Н., Патора Р.* Інновації та логістика товарів: Монографія. – Львів: Національний університет «Львівська політехніка», 2001. – 264 с.
10. *Шинкаренко В.Г., Ананко І.М.* Моделювання логістичних бізнес-процесів // Економіка транспортного комплексу.– 2014.– Вип. 23. – С. 134–144.

Стаття надійшла до редакції 16.03.2015.