

УДК 539.3

Д.В. КРЮТЧЕНКО

Институт проблем машиностроения НАН Украины им. А.М. Подгорного

### КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

*Разработан метод исследования свободных и вынужденных колебаний жидкости в жестком призматическом резервуаре. Предполагается, что жидкость в резервуаре идеальная, несжимаемая, а её течение, вызванное действием приложенной нагрузки, безвихревое. Давление жидкости на стенки резервуара определяется из интеграла Коши-Лагранжа. Рассмотрен случай периодического внешнего воздействия в горизонтальном направлении. Определены собственные значения и формы колебаний жидкости в призматическом резервуаре. Определены резонансные частоты. Задача может быть обобщена на случай задачи в нелинейной постановке с учетом нелинейных составляющих в интеграле Коши-Лагранжа.*

*Ключевые слова: резервуар с жидкостью, свободные и вынужденные колебания, периодическое внешнее воздействие.*

Д.В. КРЮТЧЕНКО

Институт проблем машинобудування НАН України ім. А.М. Підгорного

### КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ПРИЗМАТИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ

*Розроблено метод дослідження вільних та вимушених коливань рідини в жорсткому призматичному резервуарі. Вважається, що рідина в резервуарі є ідеальною, нестисливою, а її рух, викликаний дією прикладеного навантаження, є безвихровим. Тиск рідини на стінки резервуара визначається з лінеарізованого інтеграла Коши-Лагранжа. Розглянуто випадок періодичного зовнішнього впливу, що діє в горизонтальному напрямку. Визначені власні значення та форми коливань рідини в призматичному резервуарі. Визначено резонансні частоти. Задача може бути узагальнена на випадок задачі в нелінійній постановці з урахуванням нелінійних складових в інтегралі Коши-Лагранжа.*

*Ключові слова: резервуар з рідиною, вільні та вимушені коливання, періодичний зовнішній вплив.*

D. KRIUTCHENKO

A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems

### COMPUTER MODELING LIQUID FORCED VIBRATIONS IN A PRISMATIC TANK

*The method to simulate free and forced liquid vibrations in a prismatic tank is proposed. The liquid is supposed to be ideal, incompressible, and its current caused by applied loading is irrotational. The problem of force vibrations is solved by using the eigenmodes as basic functions. The resonance frequencies are defined. Thin-walled structure elements are widely used in different engineering areas: chemical and aerospace industries, transportation, oil and gas producing. Usually these structures operate at intensive thermal and stress loadings, in interaction with fluids located in their containers. These loadings can cause the destruction of thin shells containing dangerous liquids that will be a reason of ecological catastrophe. So the*

*topical issue here is a problem of estimation of stress-strain characteristics, frequencies and modes of vibrations of such facilities. Liquid sloshing often occurs when the extremely loads are applied to the structure elements with compartments partially filled with different liquids. Vibration modes are usually affected by liquid sloshing modes, so the coupled problem of fluid-structure interaction is crucial. Since analytic solutions do not exist for tanks and reservoirs with complicated geometrical shapes, in addition to the analytical methods, numerical methods have been employed for solutions of linear boundary value problems of liquid sloshing. Also the presence of baffles can drastically change the dynamical behaviour of fluid-filled structures. This paper is devoted to free and forced vibrations of prismatic and cylindrical tanks filled with an incompressible ideal liquid. The dynamic analysis of shell structures is often performed by use of finite and boundary element programs. The liquid pressure on the walls of the reservoir is defined by Cauchy-Lagrange integral. The external horizontal periodic loading is considered. The eigenvalues and modes of free liquid vibrations in prismatic tank are obtained. The problem can be generalized in the case of the problem in non-linear formulation taking into account non-linear components in Cauchy-Lagrange integral.*

*Keywords: fuel tank, free and forced vibrations, baffle, periodic external loading*

### **Постановка проблемы**

Оболочечные конструкции широко используются в технике как резервуары для хранения жидкости. Плескание жидкости – это интересный физический феномен огромнейшего практического значения, имеющий приложения в широком спектре технологий и технических дисциплин. Это явление наблюдается в движущихся резервуарах, содержащих жидкость, таких как топливные баки ракет, баки, применяющиеся в морском и космическом транспорте, в хранилищах, плотинах, находящихся под сейсмическим воздействием, а также в реакторах и атомных судах. Когда топливный бак заполнен частично, большое количество топлива движется внутри бака с поступательным и вращательным ускорением, и генерирует плескания. Контроль плесканий топлива крайне необходим для обеспечения устойчивости космического корабля. Ряд катастроф в полетах произошел именно вследствие неустойчивости, вызванной плесканиями [1].

### **Анализ последних исследований и публикаций**

Анализ исследований, посвященных проблемам плескания жидкости в резервуарах, дан в работах R. A. Ibrahim's [2]. Свободные и вынужденные колебания цилиндрических резервуаров с жидкостью рассмотрены в работах [3–5].

### **Цель исследования**

Разработать модель свободных и вынужденных колебаний жидкости в жестком призматическом резервуаре при действии периодической горизонтальной нагрузки. Исследовать зависимость уровня подъема жидкости в резервуаре от времени. Установить характер поведения жидкости в резервуаре в зависимости от частоты вынуждающей силы.

### **Изложение основного материала исследования**

**Постановка задачи.** В данной статье рассмотрена задача о колебаниях жидкости в призматическом резервуаре, вид которого показан на рис.1.

Обозначим боковые поверхности призматического резервуара через  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , поверхность днища  $S_b$ , а свободную поверхность  $S_0$ .

Для моделирования области, занятой жидкой средой, разработана математическая модель, основанная на следующих гипотезах: жидкость несжимаемая и невязкая,

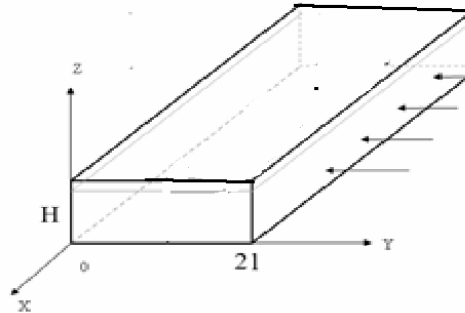


Рис. 1. Призматический резервуар.

движение жидкости безвихревое, необходимо рассматривать только малые колебания (линейная теория). Поэтому можно ввести скалярный потенциал скоростей  $\Phi(x, y, z, t)$ :

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

удовлетворяющий уравнению Лапласа. Предположим, что резервуар движется с постоянной горизонтальной скоростью  $U = (U, 0, 0)$ . Представим потенциал скоростей в виде

$$\varphi = Ux + \Phi,$$

где  $\Phi$  – потенциал возмущенных скоростей. Величину давления  $p$  на стенки оболочки определяем из линеаризованного интеграла Коши-Лагранжа по формуле:

$$p = -\rho_l \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + gz \right) + p_0,$$

в которой  $g$  – ускорение свободного падения,  $z$  – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении,  $\rho_l$  – плотность жидкости,  $p_0$  – атмосферное давление.

На смоченной поверхности оболочки и перегородке ставится граничное условие непротекания. На свободной поверхности должны быть выполнены динамическое и кинематическое граничные условия.

$$\text{Обозначим } S_w = S_b \cup S_{s_1} \cup S_{s_2} \cup S_{s_3} \cup S_{s_4}.$$

Граничные условия для потенциала скоростей следующие. На стенках и днище выполнено условие непротекания:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_w} = 0. \tag{1}$$

На свободной поверхности  $S_0$  выполнены кинематическое и динамическое условия:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{S_0} = 0$$

где функция  $\zeta$  описывает форму и положение свободной поверхности.

Таким образом, для потенциала скоростей имеем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_w} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{s_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0|_{s_0} = 0. \quad (2)$$

Последнее условие с использованием интеграла Коши-Лагранжа принимает вид:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + gz \right|_{s_0} = 0 \quad (3)$$

Для выполнения условий разрешимости краевой задачи (3)-(4) необходимо также удовлетворить условию Неймана:

$$\int_{s_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS = 0.$$

Продифференцируем уравнение (4) по  $t$ :

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{s_0} = 0. \quad (4)$$

Подставим в уравнение (4) выражение для  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  из уравнения (2):

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} + U \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right|_{s_0} = 0. \quad (5)$$

Требуется определить гармоническую функцию  $\Phi$ , удовлетворяющую уравнению Лапласа, и функцию  $\zeta(x, y, t)$  из граничных условий (2), (5).

**Определение собственных форм колебаний жидкости в жестком резервуаре.**

Собственные формы и частоты колебаний жидкости в призматическом резервуаре определены методом разделения переменных Фурье.

Сначала находим решение краевой задачи (3), (5).

$$\Psi_{kl} = A_{kl} \operatorname{ch} \lambda_{kl} z \cos \frac{\pi k}{2a} x \cos \frac{\pi l}{2b} y, \quad \lambda_{kl} = \sqrt{\left( \frac{\pi k}{2a} \right)^2 + \left( \frac{\pi l}{2b} \right)^2}.$$

Удовлетворяя условию на свободной поверхности, получим, что  $\lambda_{kl} \operatorname{sh} \lambda_{kl} H = \frac{\omega_{kl}^2}{g} \operatorname{ch} \lambda_{kl} H$ . Отсюда находим выражение для собственных частот жидкости в призматическом резервуаре:

$$\omega_{kl} = \sqrt{g \lambda_{kl} \tanh(\lambda_{kl} H)}.$$

Приведем также выражения для первых 8 собственных форм колебаний жидкости (это система базисных функция для решения задачи о вынужденных колебаниях):

$$\begin{aligned}
 \Psi_{01}(x) &= C_1 \cos(0 \cdot x) \sin \frac{\pi}{2b} y, & \Psi_{10}(x) &= C_2 \sin \frac{\pi}{2a} x \cos(0 \cdot y), \\
 \Psi_{02}(x) &= C_5 \cos 0x \cos \left(\frac{\pi}{b} y\right), & \Psi_{20}(x) &= C_4 \cos \frac{\pi}{a} x \cos(0y), \\
 \Psi_{12}(x) &= C_7 \sin \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{\pi}{b} y, & \Psi_{21}(x) &= C_6 \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{2b} y, \\
 \Psi_{11}(x) &= C_3 \sin \frac{\pi}{2a} x \sin \frac{\pi}{2b} y, & \Psi_{22}(x) &= C_8 \cos \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{b} y.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

В табл. 1 приведены численные значения частот  $\omega_{ij}$  и частотного параметра  $\lambda_{ij}$  для призматического резервуара в форме куба с геометрическими характеристиками  $a=b=H=1$ м при разных значениях скорости.

Таблица 1

Собственные частоты колебаний жидкости в призматическом резервуаре

$n$	$i$	$j$	$\lambda_{ij}$	$U=0, \omega_{ij}$	$U=15$	$U=30$
1	0	1	1.772453851	4.051164194	3.013608	0.15785737
2	1	0	1.772453851	4.051164194	3.013608	0.15785737
3	1	1	2.506628275	5.710012556	4.140593	0.62512577
4	0	2	3.544907703	5.892165855	4.566877	1.11022302
5	2	0	3.544907703	5.892165855	4.566877	1.11022302
6	2	1	3.963327298	6.233151691	5.562521	4.14059338
7	1	2	3.963327298	6.233151691	5.562521	4.14059338
8	2	2	5.013256550	7.012538645	6.035193	5.99932672

Найдем функцию  $\zeta$ . Используем следующее выражение для потенциала скоростей:

$$\Phi = \sum_{n=1}^M \dot{c}_n(t) \Phi_n,$$

где зависимость  $n = n(i, j)$  показана в табл. 1, функции  $\Phi_n$  определяются по формуле:

$$\Phi_n = \frac{1}{ab} \frac{\cosh(\lambda_{ij}z)}{\cosh(\lambda_{ij}H)} \Psi_{ij}(x, y); \quad n = n(i, j),$$

в которой  $\Psi_{ij}$  находятся по соотношениям (6). Получим форму свободной поверхности:

$$\zeta = \sum_{n=1}^M c_k(t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial n}.$$

Формы колебаний свободной поверхности показаны на рис. 2:

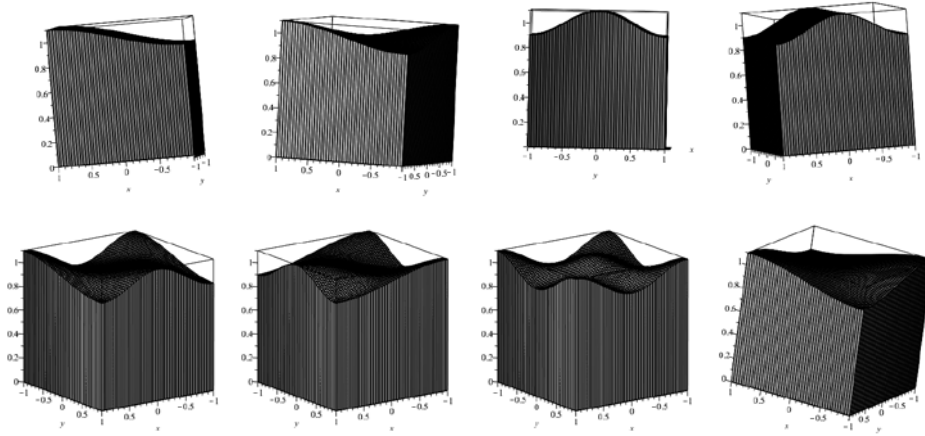


Рис. 2. Формы колебаний свободной поверхности.

**Свободные колебания жидкости в движущемся резервуаре.** Предположим, что в начальный момент времени жидкость в резервуаре находилась в состоянии покоя. На резервуар действует периодическая нагрузка, приложенная в горизонтальном направлении (параллельно оси  $Ox$ ). Составим систему дифференциальных уравнений движения жидкости, исходя из граничного условия на свободной поверхности:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta(x, y) + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + xa_s(t) \right|_{z=H} = 0, \quad \Phi = \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \Phi_k(x, y, H). \quad (7)$$

Подставляя выражения (9) в соотношение (8), получим:

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \Phi_k(x, y, H) + g \sum_{k=1}^N c_k(t) \left. \frac{\partial \Phi_k(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=H} + U \sum_{k=1}^N \dot{c}_k(t) \left. \frac{\partial \Phi_k(x, y, z)}{\partial x} \right|_{z=H} = 0. \quad (8)$$

Умножим равенство (9) скалярно на  $\Phi_n$  и воспользуемся ортогональностью собственных форм. Получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{d}_1(t) + \omega_1^2 d_1(t) - \frac{8}{9\pi^2} \cos \omega t = 0, \quad \ddot{d}_2(t) + \omega_2^2 d_2(t) - \frac{8}{25\pi^2} \cos \omega t = 0, \\ \ddot{d}_3(t) + \omega_3^2 d_3(t) - \frac{8}{121\pi^2} \cos \omega t = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь для удобства введены обозначения  $d_i = c_{i0}$ . Система (10) при нулевых начальных условиях имеет следующее решение:

$$d_1(t) = -\frac{8}{9\pi^2(\omega_1^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_1 t), \quad d_2(t) = -\frac{8}{25\pi^2(\omega_2^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_2 t),$$

$$d_3(t) = -\frac{8}{121\pi^2(\omega_3^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_3 t). \tag{10}$$

Находим изменение уровня подъема свободной поверхности в зависимости от времени в точке  $\zeta$  с координатами  $x=1, y=1, z=1$  в течение 10 сек нагружения. Эта зависимость показана на рис. 3.

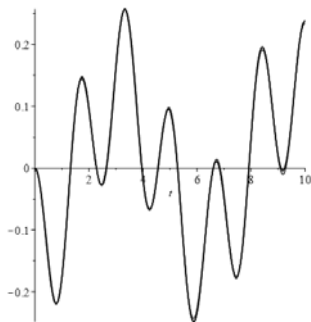


Рис. 3. Изменение уровня подъема свободной поверхности.

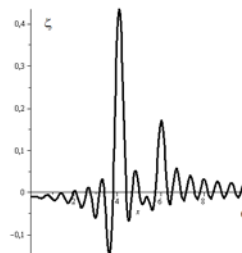


Рис. 4. Изменение уровня подъема свободной поверхности в зависимости от частоты нагружения.

На рис. 4 показано влияние частоты нагружения на уровень подъема свободной поверхности. При этом амплитуда колебаний вычислялась по формуле:

$$\zeta = \sum_{k=1}^3 \dot{d}_k(t) \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}(x, y, H),$$

в которой коэффициенты  $d_k(t)$  определялись формулами (12) в момент времени  $t = 10$  сек.

Пики на графике соответствуют частотам  $\omega_{10}$  и  $\omega_{20}$  (табл. 1). Эти частоты являются наиболее опасными, например, при транспортировке рассматриваемого бака.

По полученным результатам видно, что вещественная часть частот колебаний для всех рассмотренных случаях равна нулю, что свидетельствует о устойчивости движения резервуара. С увеличением скорости мнимые части наименьших частот стремятся к нулю. Такое явление соответствует потери устойчивости по дивергентной форме.

На рис. 5 приведены три первые формы колебаний, соответствующие наименьшим частотам при скорости и при  $U=30$  м/с. Формы колебаний при наличии скорости изменились существенно.

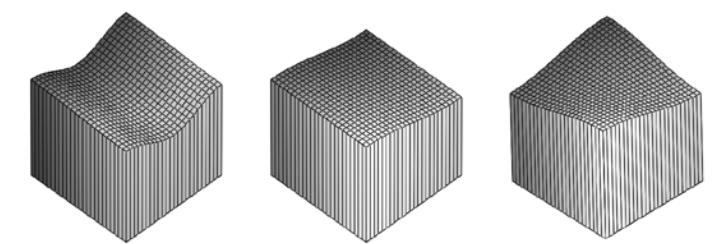


Рис. 5. Форма колебаний свободной поверхности призматического резервуара.

### **Выводы**

Разработан метод расчета призматического резервуара с жидкостью при действии периодической горизонтальной нагрузки. Определена зависимость уровня подъема жидкости в резервуаре от времени. Установлен характер поведения жидкости в резервуаре в зависимости от частоты вынуждающей силы. В дальнейшем предполагается изучить рассматриваемую задачу в нелинейной постановке с учетом нелинейных составляющих в интеграле Коши–Лагранжа.

### **Список использованной литературы**

1. Sidi M.J. *Spacecraft Dynamics and Control* / M.J. Sidi. — New York: Cambridge University Press, 1997. — 409 p.
2. Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing Dynamics* / R.A. Ibrahim. — New York: Cambridge University Press, 2005. — 948 p.
3. Gnitko V. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles / V. Gnitko, K. Degtyariov, V. Naumenko, E. Strelnikova // *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. — 2017. — Vol. 5. — № 3. — P. 317-328.
4. Krutchenko D.V. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs / D.V. Krutchenko, E.A. Strelnikova, Yu.S. Shuvalova // *Вісник Харківського національного університету. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління"*. — 2017. — Т.35. — №1. — С. 31-37.
5. Ravnik J. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank / J. Ravnik, E. Strelnikova, V. Gnitko, K. Degtyarev, U. Ogorodnyk // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. — 2014. — Vol. 57. — P. 13-25.

### **References**

1. Sidi, M. J. *Spacecraft Dynamics and Control*. Cambridge University Press. New York. (1997)
2. Ibrahim, R. A. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press. New York. (2005)
3. Gnitko, V., Degtyariov, K., Naumenko, V., Strelnikova, E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. **5**, 3, 317-328. (2017)
4. Krutchenko, D. V., Strelnikova, E. A., Shuvalova Yu. S. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu. Seriiia "Matematychno modeliuвання. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia"*. **35**, 1, 31-37. (2017)
5. Ravnik, J., Strelnikova, E. , Gnitko, V., Degtyarev, K., Ogorodnyk U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. **57**, 13-25. (2014)