УДК 510.6

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО
Херсонський національний технічний університет
П.Й. ГУЧЕК
Інститут біокібернетики і біомедичної інженерії ім. М. Налеча Польської академії наук, Польща

АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО ОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПРАВИЛЬНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

У роботі виявлено, що обране для дослідження лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке має правильну особливу точку, за допомогою перетворення Куммера-Ліувілля зводиться до виродженого гіпергеометричного рівняння, яке подане в формі Уіттекера. Встановлені співвідношення між коефіцієнтами заданого рівняння, виродженого гіпергеометричного рівняння у загальному вигляді та у формі Уіттекера. На основі цих співвідношень показано, що досліджуване рівняння має лише один незалежний фундаментальний розв'язок у вигляді виродженої гіпергеометричної функції. Другий фундаментальний розв'язок може бути знайдений або за допомогою метода Фробеніуса у вигляді узагальненого степеневого ряду, або виражений через функцію Трікомі. В останньому випадку загальний розв'язок досліджуваного рівняння є лінійною комбінацією функцій Уіттекера.

Ключові слова: вироджене гіпергеометричне рівняння, рівняння Уіттекера, метод Фробеніуса, функція Трікомі, функції Уіттекера.

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО
Херсонский национальный технический университет
П.И. ГУЧЕК
Институт биокибернетики и биомедицинской инженерии им. М. Налеча Польской академии наук, Польша

АНАЛИЗ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРАВИЛЬНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

В работе установлено, что выбранное для исследования линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее правильную особую точку, с помощью преобразования Куммера-Лиувилля приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению, представленному в форме Уиттекера. Найдены соотношения между коэффициентами заданного уравнения, вырожденного гипергеометрического уравнения в общем виде и в форме Уиттекера. На основе этих соотношений показано, что исследуемое уравнение имеет только одно независимое фундаментальное решение в виде вырожденной гипергеометрической функции. Второе фундаментальное решение может быть найдено или с помощью метода Фробениуса в виде обобщенного степенного ряда, или выражено через функцию

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.8

Трикоми. В последнем случае общее решение исследуемого уравнения является линейной комбинацией функций Уиттекера.

Ключевые слова: вырожденное гипергеометрическое уравнение, уравнение Уиттекера, метод Фробениуса, функция Трикоми, функции Уиттекера.

H.Ya. TULUCHENKO
Kherson National Technical University
P.Y. GUCHEK
Nalecz Institute of Biocybernetics and Biomedical Engineering, Poland

ANALYSIS OF THE GENERAL SOLUTION OF ONE LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION WITH REGULAR SINGULAR POINT

The processes are studied in the applied fields can be described by differential equations, the structure of which is different from the structure of classical differential equations, which have currently well understood the methods of solving.

Finding the Kummer-Liouville transform for a certain pair of (even linear) differential equations is related to the solution of the non-linear differential equation Yermakov, which has an analytical solution in a limited number of cases of its coefficients.

Therefore, the reduction of a specific ordinary differential equation (which has practical interest in a particular field of application) to a known type of differential equation remains an urgent task for research.

It is established that the linear homogeneous second-order differential equation that has the regular singular point chosen for the study is reduced to a confluent hypergeometric equation presented in the form of Whittaker using the Kummer-Liouville transform in the work. Relations between the coefficients of the given differential equation and the confluent hypergeometric equation in the general form and in the Whittaker form are found. Based on these relations, it is shown that the equation under study has only one independent fundamental solution in the form of a confluent hypergeometric function. The second fundamental solution can be found either in the form of a generalized power series using the Frobenius method, or can be expressed through the Tricomi function. In the latter case, the general solution of the equation under study is a linear combination of Whittaker functions. Each fundamental solution is a series of special kind which is centered at a regular singular point of the differential equation. The possibility of the adoption by the Tricomi function of a finite expression in the form of a polynomial with respect to the variable x or 1/x for physically plausible values of the coefficients of the differential equation under study is inspected.

Keywords: confluent hypergeometric equation, Whittaker equation, Frobenius method, Tricomi function, Whittaker functions.

Постановка проблеми

Досліджувані в прикладних галузях процеси можуть описуватися диференціальними рівняннями, структура яких відрізняється від структури класичних рівнянь, методи розв’язання яких є на теперішній час добре вивченими. Як відзначав академік В.І. Арнольд: «У теперішній час теорія диференціальних рівнянь представляє собою складно осяжний конгломерат великої кількості різноманітних ідей і методів, у вищому ступені корисний для усіляких застосувань …» [1, С. 5]. Саме ця неосяжність теорії диференціальних рівнянь часто стає перепоною для її ефективного практичного застосування.

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.8

Знаходження перетворення Куммера-Ліувілля для певної пари (навіть лінійних) диференціальних рівнянь пов'язане із розв'язанням нелінійного диференціального рівняння Єрмакова, яке має аналітичний розв'язок в обмеженій кількості випадків значень його коефіцієнтів [2, 3].

Тому зведення конкретного звичайного диференціального рівняння (яке має практичний інтерес для певної прикладної галузі) до відомого виду рівнянь залишається актуальною задачею для досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [4] аналізується структура розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку виду:

$$\frac{d^2}{dr^2}u(r)+\left(\frac{k_0^2\alpha}{\alpha-\beta_0^2 r}-k_0^2\right)u(r)=0\,, \tag{1}$$

де $u(r)$ – шукана функція; $\alpha\,,\beta_0\,,k_0\in R$; $\alpha\,,\beta_0^2\,,k_0^2>0$.

Загальний розв'язок рівняння (1) шукається у вигляді лінійної комбінації двох фундаментальних розв'язків: $u_+(r)$ та $u_-(r)$, кожний із яких подається у вигляді добутку експоненціальної функції та степеневого ряду. Розвинення у степеневі ряди здійснюється у точці $r=0$.

Також у роботі [4] показано, що один розв'язок (а саме $u_+(r)$) містить саме поліном, тобто, починаючи з деякого номера, коефіцієнти степеневого ряду обертаються на нуль. Інший фундаментальний розв'язок $u_-(r)$ виражається через перший $u_+(r)$:

$$u_-(r)=Cu_+(r)\cdot\int\frac{dr}{u_+^2(r)}\,.$$

При чому має місце така асимптотична поведінка розв'язків, коли $r\to\infty$: $u_+(r)\to\infty$, а $u_-(r)\to 0$ експоненціально.

Авторами роботи [4] відзначається, що рівняння виду (1) виникають при моделюванні траєкторно-хвильового руху електрона у воднеподібному атомі за допомогою V-функцій [5].

Очевидно [6, С. 237], що досліджуване диференціальне рівняння (1) є окремим випадком виродженого гіпергеометричного рівняння:

$$x\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x)+(c-x)\frac{d}{dx}y(x)-ay(x)=0\,, \tag{2}$$

яке часто зручно подавати в стандартній формі Уіттекера:

$$\frac{d^2}{dx^2}z(x)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{x^2}\right)\cdot z(x)=0\,. \tag{3}$$

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.8

Перехід від рівняння (2) до рівняння (3) здійснюється за допомогою підстановок:

$$y(x) = x^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{x}{2}} z(x)\,; \quad a = \frac{1}{2} - k + \mu; \quad c = 1 + 2\mu\,. \tag{4}$$

Як відомо [6, С. 238], рівняння виду (2) та (3) можуть бути проінтегровані за допомогою виродженої гіпергеометричної функції.

Мета дослідження

Показати, що досліджуване рівняння (1) є окремим випадком рівняння Уіттекера (3). Враховуючи особливу структуру рівняння (1), знайти його загальний розв'язок у вигляді лінійної комбінації окремих випадків гіпергеометричної функції.

Викладення основного матеріалу дослідження

Структура досліджуваного рівняння. У роботі [4] вся увага приділена пошуку загального розв'язку рівняння (1) на основі степеневих рядів. Проте очевидно, що, коли $r = \beta_0^2 / \alpha$ друга похідна шуканої функції $\frac{d^2}{dr^2} u(r)$ повинна обертатися на нескінченність, якщо сама шукана функція $u(r)$ в цей момент часу приймає скінченні значення. Точка $r = \beta_0^2 / \alpha$ є особливою точкою рівняння (1). Загальний розв'язок диференціального рівняння з особливою точкою шукають у вигляді лінійної комбінації окремих випадків гіпергеометричної функції [6, С. 241, 247].

Встановимо відповідності між значеннями коефіцієнтів рівняння (1) та рівнянь (2) і (3).

Для спрощення подальших розрахунків подамо рівняння (1) у новому вигляді.

Введемо заміну змінної:

$$-2 \cdot \frac{k_0}{\beta_0^2} \cdot \left(\alpha - \beta_0^2 r\right) = x\,;$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k_0 \beta_0^2} \cdot \left(\beta_0^2 x + 2k_0 \alpha\right).$$

Тоді рівняння (1) набуває вигляду:

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\dfrac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}}{x} \right) \cdot u(x) = 0\,. \tag{5}$$

Порівнюючи структуру коефіцієнтів у рівняннях (3) і (5), отримуємо співвідношення:

$$k = -\frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}\,; \quad \mu = \pm\frac{1}{2}\,; \tag{6}$$

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.8

Із співвідношень (6) випливає, що коефіцієнт ***c*** у формулах (4) може приймати два значення: 0 та 2. Обидва вони є цілими числами. Отже, рівняння (5) є окремим випадком рівняння Уіттекера (3) [6, С. 241].

Перший незалежний розв'язок досліджуваного рівняння. Якщо $\mu=\frac{1}{2}$ і $c=2$, тоді одним з розв'язків рівняння (2) є вироджена гіпергеометрична функція [6, С. 241, 247].

$$y_1(x)=\Phi(a;2;x),$$

де $a=\frac{1}{2}-k+\mu=\frac{1}{2}-\left(-\frac{k_0\alpha}{2\beta_0^2}\right)+\frac{1}{2}=1+\frac{k_0\alpha}{2\beta_0^2}$;

$$\Phi(a;c;x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\prod_{j=1}^{n}(a+j-1)}{\prod_{j=1}^{n}(c+j-1)}\cdot\frac{x^n}{n!}\right)$$ – ряд Куммера.

Відповідний розв'язок рівняння (5) має вигляд:

$$u_1(x)=x^{\frac{c}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\cdot y_1(x)=xe^{-\frac{x}{2}}\cdot\Phi(a;2;x), \tag{7}$$

де $a=1+\frac{k_0\alpha}{2\beta_0^2}$;

Якщо $\mu=-\frac{1}{2}$ і $c=0$, тоді одним з розв'язків рівняння (2) є вироджена гіпергеометрична функція:

$$y_*(x)=x^{1-c}\Phi(a-c+1;2-c;x),$$

тобто

$$y_*(x)=x\Phi(a+1;2;x),$$

де $a=\frac{1}{2}-k+\mu=\frac{1}{2}-\left(-\frac{k_0\alpha}{2\beta_0^2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{k_0\alpha}{2\beta_0^2}$.

Відповідний розв'язок рівняння (5) має вигляд:

$$u_*(x)=x^{\frac{c}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\cdot y_*(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot x\Phi(a+1;2;x), \tag{8}$$

де $a=\frac{k_0\alpha}{2\beta_0^2}$;

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.8

Пересвідчуємося, що частинні розв'язки (7) і (8) співпадають з точністю до позначень.

Другий незалежний розв'язок досліджуваного рівняння. Другий незалежний розв'язок може бути знайдений звичайним методом Фробеніуса [6, С. 248]. Реалізуємо цю ідею. Будемо шукати розв'язок рівняння (5) у вигляді узагальненого степеневого ряду:

$$u(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n . \tag{9}$$

Виконаємо формальне диференціювання ряду (9):

$$\frac{d}{dx}u(x) = px^{p-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n + x^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1} ;$$

$$\frac{d}{dx}u(x) = px^{p-1} \cdot \left(C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \right) + x^{p-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^n ;$$

$$\frac{d}{dx}u(x) = x^{p-1} \cdot \left(pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n) C_n x^n \right). \tag{10}$$

Знайдемо вираз другої похідної для ряду (9):

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = (p-1) \cdot x^{p-2} \cdot \left(pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n) C_n x^n \right) + x^{p-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (p+n) n C_n x^{n-1} ;$$

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = (p-1) \cdot x^{p-2} \cdot \left(pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n) C_n x^n \right) + x^{p-2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (p+n) n C_n x^n ;$$

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = x^{p-2} \cdot \left((p-1) \cdot pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \cdot (p+n) C_n x^n \right). \tag{11}$$

Підставимо отримані вирази (9), (10) і (11) в рівняння (5):

$$x^{p-2} \cdot \left((p-1) \cdot pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \cdot (p+n) C_n x^n \right) +$$
$$+ \left(-\frac{1}{4} - \frac{\frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}}{x} \right) \cdot x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 .$$

Перепишемо отримане рівняння у вигляді, зручному для порівняння коефіцієнтів при однакових степенях змінної $\boldsymbol{x}$:

$$x^{p-2} \cdot \left((p-1) \cdot pC_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) \cdot (p+n) C_n x^n \right) +$$

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.8

$$-\frac{1}{4}\cdot x^{p}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n}x^{n}-\frac{k_{0}\alpha}{2\beta_{0}^{2}}\cdot x^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n}x^{n}=0\,.$$

Поділимо отримане рівняння на x^{p-2}:

$$(p-1)\cdot pC_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}(p+n-1)\cdot(p+n)C_{n}x^{n}-$$
$$-\frac{1}{4}\cdot x^{2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n}x^{n}-\frac{k_{0}\alpha}{2\beta_{0}^{2}}\cdot x^{1}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n}x^{n}=0\,.$$

та перепозначимо індекси в двох останніх сумах:

$$(p-1)\cdot pC_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}(p+n-1)\cdot(p+n)C_{n}x^{n}-$$
$$-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^{n}-\frac{k_{0}\alpha}{2\beta_{0}^{2}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}C_{n-1}x^{n}=0\,;$$

Відділимо в першій та останній сумах перші доданки, щоб всі суми починалися з однакового значення індексу:

$$(p-1)\cdot pC_{0}+p\cdot(p+1)C_{1}x+\sum_{n=2}^{\infty}(p+n-1)\cdot(p+n)C_{n}x^{n}-$$
$$-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-2}x^{n}-\frac{k_{0}\alpha}{2\beta_{0}^{2}}\cdot C_{0}x-\frac{k_{0}\alpha}{2\beta_{0}^{2}}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}C_{n-1}x^{n}=0\,;$$

Прирівнявши до нуля коефіцієнти при змінній $\boldsymbol{x}$ в однакових степенях, отримаємо систему для знаходження коефіцієнтів ряду (9):

$$\begin{gathered}(p-1)\cdot pC_{0}=0\,;\\ p\cdot(p+1)C_{1}-\frac{k_{0}\alpha}{2\beta_{0}^{2}}\cdot C_{0}=0\,;\\ (p+n-1)\cdot(p+n)C_{n}-\frac{k_{0}\alpha}{2\beta_{0}^{2}}\cdot C_{n-1}-\frac{1}{4}\cdot C_{n-2}=0\,,\ n\geq 2\,.\end{gathered}\tag{12}$$

З першого рівняння системи (12) встановлюємо, що для подальших розрахунків будемо використовувати значення параметра $p=1$, оскільки два інші можливі кореня рівняння приводять або до тривіального розв'язку $u(x)=0$ досліджуваного рівняння, коли $C_{0}=0$, або ряд (9) перетворюється на звичайний степеневий ряд, який не може бути розв'язком диференціального рівняння з особливою точкою, коли $p=0$.

Запишемо систему (12) при значенні параметра $p=1$:

$$C_{0}\in R\,;\tag{13}$$

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.8

$$C_1 = \frac{k_0 \alpha}{4\beta_0^2} \cdot C_0;$$

$$C_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot \left(\frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2} \cdot C_{n-1} + \frac{1}{4} \cdot C_{n-2} \right), \ n \geq 2.$$

Тоді другий незалежний розв’язок рівняння (5) має вигляд:

$$u_2(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n ,$$

де значення коефіцієнтів C_n визначаються з системи (13).

Загальний розв’язок рівняння (5) має вигляд:

$$u(x) = A \cdot u_1(x) + B \cdot u_2(x) = A \cdot x e^{-\frac{x}{2}} \cdot \Phi(a;2;x) + B \cdot x \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n ,$$

де $A, B \in R$.

Загальний розв’язок досліджуваного рівняння в функціях Уіттекера. Уіттекером введені дві функції, які також складають фундаментальну систему для досліджуваного рівняння (3):

$$z_1(x) = M_{\chi,\mu}(x) = x^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \Phi(a;c;x);$$

$$z_2(x) = W_{\chi,\mu}(x) = x^{\frac{c}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \psi(a;c;x);$$

де $\chi = -a + \frac{c}{2}$, $\mu = \frac{c}{2} - \frac{1}{2}$, $\psi(a;c;x)$ – функція Трікомі [6, С. 251].

Тоді загальний розв’язок рівняння (3) має вигляд:

$$z(x) = A \cdot z_1(x) + B \cdot z_2(x) = A \cdot M_{\chi,\mu}(x) + B \cdot W_{\chi,\mu}(x),$$

де $A, B \in R$.

Відомо [6, С. 251; 7, С. 430], що функція Трікомі є однозначною в двох випадках:

1) коли $a = 0, -1, -2, \ldots$, функція Трікомі є многочленом від x;
2) коли $a = 1, 2, \ldots, n$, $c = n+1$, $n = 1, 2, \ldots$, функція Трікомі є многочленом від x^{-1}.

Вище було показано, що для досліджуваного рівняння можливі два види співвідношень між коефіцієнтами:

1) $\mu = \frac{1}{2}$, $c = 2$, $a = 1 + \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}$;

2) $\mu = -\frac{1}{2}$, $c = 0$, $a = \frac{k_0 \alpha}{2\beta_0^2}$.

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.8

Отже, для досліджуваного рівняння функція Трікомі може мати точне подання тільки як многочлен від x, коли $1+\frac{k_0\alpha}{2\beta_0^2}=0,-1,-2,\ldots$, тобто $\frac{k_0\alpha}{2\beta_0^2}=-1,-2,\ldots$. Що є неможливим за їх фізичним змістом.

Висновки

Досліджено властивості лінійного однорідного диференціального рівняння з роботи [4]. Показано, що за допомогою перетворення Куммера-Ліувілля його можна привести до вигляду рівняння Уіттекера. Отримані явні вирази незалежних фундаментальних розв'язків при різних методах їх пошуку, оскільки дана задача не обмежується єдиною системою фундаментальних розв'язків. Кожний фундаментальний розв'язок є рядом спеціального виду, коли розвинення здійснюється в особливій точці диференціального рівняння. Встановлено, що функція Трікомі для фізично правдоподібних значень коефіцієнтів досліджуваного диференціального рівняння не може набувати скінченних виразів у вигляді многочленів відносно незалежної змінної x та $1/x$.

Список використаної літератури

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1977. 304 с.
2. Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. Москва: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 464 с.
3. Korman Philip. (2019). A remark on Pinney's equation URL: https://arxiv.org/pdf/1902.02739.pdf
4. Валишин Н. Т., Ибрагимов И. С., Ковалевский И. В. Решение одного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. *Научно-технический вестник Поволжья*. 2018. №4. С. 12–14. DOI: 10.24153/2079-5920-2018-8-4-12-14
5. Valishin N., Moiseev S. A Method of V-function: Ultimate Solution to the Direct and Inverse Problems of Dynamics for a Hydrogen-like Atom. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. *Applied Physics*. 2017. Vol. 4, №5(88). P. 23–32. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.108831
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. Москва: Наука, 1965. 296 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1976. 576 с.

References

1. Arnold, V. I. (1977). Dopolnitelnyie glavyi teorii obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy. Moskva: Nauka.
2. Berkovich, L. M. (2002). Faktorizatsiya i preobrazovaniya differentsialnyih uravneniy. Metodyi i prilozheniya. Moskva: NITs «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika».
3. Korman Philip. (2019). A remark on Pinney's equation. Retrieved from https://arxiv.org/pdf/1902.02739.pdf
4. Valishin, N. T., Ibragimov, I. S., & Kovalevskiy, I. V. (2018). Reshenie odnogo lineynogo odnorodnogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka. *Nauchno-tehnicheskiy vestnik Povolzhya*. **4**, 12–14. DOI: 10.24153/2079-5920-2018-8-4-12-14
5. Valishin, N., & Moiseev, S. (2017). A Method of V-function: Ultimate Solution to the Direct and Inverse Problems of Dynamics for a Hydrogen-like Atom. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. *Applied Physics*. **4**, 5(88), 23–32. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.108831
6. Beytmen, G., & Erdeyi, A. (1965). Vyisshie transtsendentnyie funktsii. T. 1. Gipergeometricheskaya funktsiya. Funktsiya Lezhandra. Moskva: Nauka.
7. Kamke, E. (1976). Spravochnik po obyiknovennyim differentsialnyim uravneniyam. Moskva: Nauka.

https://doi.org/10.32782/2618-0340/2019.2-2.8