

Е.В. Бодянский, Е.В. Горшков, В.В. Колодяжный

НЕЙРО-ФАЗЗИ-СЕТЬ КОЛМОГОРОВА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ И ГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ЕЕ ОБУЧЕНИЯ

Введение

Установление универсальных аппроксимирующих свойств искусственных нейронных сетей (ИНС) в значительной мере базировалось на фундаментальной теореме А.Н. Колмогорова о суперпозиции функций (ТСК) [1], утверждающей, что для всех $d \geq 2$ существуют непрерывные функции $\varphi_{li} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, 2, \dots, 2d + 1$; $i = 1, 2, \dots, d$, такие, что выполняется следующее условие: для всех непрерывных функций $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ существуют непрерывные функции $g_l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{l=1}^{2d+1} g_l \left(\sum_{i=1}^d \varphi_{li}(x_i) \right), \quad (1)$$

при этом функции $g_l(\cdot)$ определяются видом $f(\cdot)$, а функции $\varphi_{li}(\cdot)$ от $f(\cdot)$ не зависят.

Р. Хехт-Нильсеном [2] было показано, что ТСК может быть реализована с помощью нейросетевых технологий и была разработана ИНС с прямой передачей информации с единственным скрытым слоем, который конструировался независимо от вида функции $f(\cdot)$.

В. Куркова [3] предложила в конструкции (1) фиксированное число внешних активационных функций $g_l(\cdot)$ равное $2d + 1$ заменить переменным n , а саму проблему представления функций $f(\cdot)$ заменить задачей нахождения ее аппроксимации $\hat{f}(\cdot)$, что гораздо удобнее при решении большинства реальных задач обработки информации. Ею же была введена соответствующая ИНС прямого распространения с сигмоидальными активационными функциями, обеспечивающая любую наперед заданную точность аппроксимации.

Д.А. Шпрехер [4] разработал численный алгоритм вычисления внутренних $\varphi_{li}(\cdot)$ и внешних $g_l(\cdot)$ одномерных активационных функций в суперпозиции Колмогорова специального вида, при этом основным предположением, используемым при вычислении этих функций, является существование $2d + 1$ семейств попарно непересекающихся d -мерных кубов, объединение которых покрывает гиперкуб I^d наперед заданным образом.

Б. Игельник и Н. Парикх [5] предложили конструкцию, названную ими сплайн-сетью Колмогорова (Kolmogorov's spline network) и основанную на технике аппроксимации с помощью кубических сплайнов. Дан-

© Е.В. Бодянский, Е.В. Горшков, В.В. Колодяжный, 2004

ная сеть обладает расширенными функциональными возможностями и лучшей адаптируемостью по сравнению с классическими ИНС.

А. Лопес-Гомес, Ш. Йошида, К. Хирота [6] на основе фаззификации ТСК [7] разработали нечеткую функционально связанную нейронную сеть (fuzzy functional link network), в которой внутренние функции $\varphi_{li}(\cdot)$ были заменены функциями принадлежности, используемыми в системах нечеткого вывода (fuzzy inference systems — FIS).

Вместе с тем следует отметить, что сети, основанные на ТСК, несмотря на свою эффективность и математическую элегантность не получили должного распространения для решения реальных задач, что объясняется, прежде всего, отсутствием численно простых и быстродействующих алгоритмов обучения.

В данной работе предложена гибридная структура, объединяющая в себе колмогоровскую схему суперпозиции функций одной переменной, нейронную архитектуру прямого распространения, систему нечеткого вывода типа Такаги-Сугено с настраиваемыми функциями принадлежности выходного слоя и названную нами нейро-фаззи сетью Колмогорова (neuro-fuzzy Kolmogorov’s network — NFKN). Введена численно простая процедура обратного распространения ошибок для обучения синаптических весов и алгоритм настройки функций принадлежности, аппроксимирующих внешние функции $g_l(\cdot)$ сети.

Архитектура NFKN

Введем в рассмотрение двухслойную архитектуру, приведенную на рис. 1 и реализующую отображение вида

$$\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{l=1}^n f_l^{[2]}(o_l^{[1]}) = \sum_{l=1}^n f_l^{[2]} \left(\sum_{i=1}^d f_i^{[1,l]}(x_i) \right), \quad (2)$$

где $n \geq 2d + 1$ — число сумматоров скрытого слоя, d — число входов нулевого слоя, $f_l^{[2]}(\cdot)$ ($l = 1, 2, \dots, n$), $f_i^{[1,l]}(\cdot)$ ($i = 1, 2, \dots, d$) — нелинейные преобразователи выходного и скрытого слоев, соответствующие функциям $g_l(\cdot)$ и $\varphi_{li}(\cdot)$ в выражении (1).

В качестве «строительных элементов» данной сети предлагается использовать нелинейные синапсы (nonlinear synapses — NS) и нео-фаззи нейроны (neo-fuzzy neurons — NFN), введенные и использованные в [8,9] и отличающиеся эффективными аппроксимирующими свойствами, простотой обучения и реализации.

На рис. 2 приведена схема нелинейного синапса $NS_i^{[1,l]}$ скрытого слоя, осуществляющая преобразование

$$f_i^{[1,l]}(x_i) = \sum_{h=1}^{m_1} \mu_{ih}^{[1]}(x_i) w_{ih}^{[1,l]}, \quad (3)$$

где m_1 — число функций принадлежности $\mu_{ih}^{[1]}(\cdot)$ в нелинейном синапсе, $w_{ih}^{[1,l]}$ — настраиваемые синаптические веса, общее число которых в скрытом слое составляет $d \cdot m_1 \cdot n$.

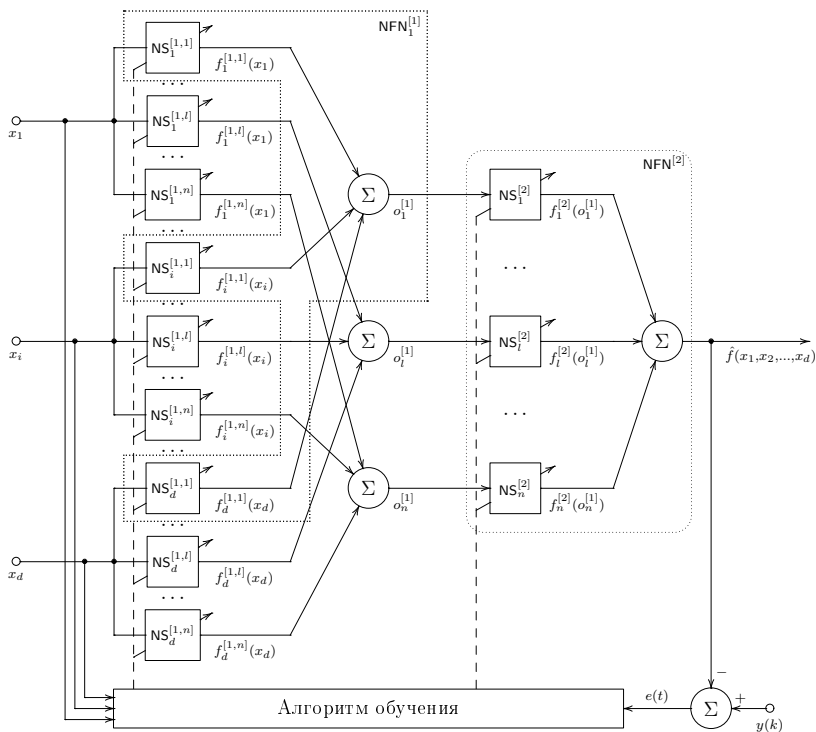


Рис. 1 – Архитектура нейро-фаззи сети Колмогорова

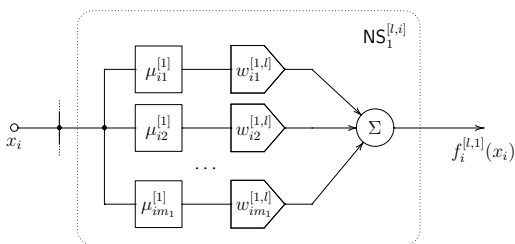


Рис. 2 – Нелинейный синапс скрытого слоя

На рис. 3 приведена схема нелинейного синапса $NS_i^{[2]}$ выходного слоя, осуществляющего преобразование

$$f_i^{[2]}(o_i^{[1]}) = \sum_{j=1}^{m_2} \mu_{ij}^{[2]}(o_i^{[1]})w_{ij}^{[2]}, \quad (4)$$

где m_2 — число функций принадлежности $\mu_{ij}^{[2]}(\cdot)$ в нелинейном синапсе, $o_i^{[1]}$ — выходные сигналы скрытого слоя, $w_{ij}^{[2]}$ — настраиваемые синаптические веса, общее число которых в выходном слое составляет $m_2 \cdot n$.

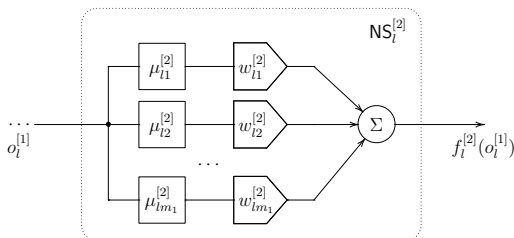


Рис. 3 – Нелинейный синапс выходного слоя

Несложно видеть, что нелинейный синапс NS есть не что иное как система нечеткого вывода типа Такаги-Сугено (TS-FIS) с одним входом и постоянным консеквентом. Как известно [10], TS-FIS является универсальным аппроксиматором и при соответствующем выборе синаптических весов и числе функций принадлежности может с наперед заданной точностью аппроксимировать любую ограниченную функцию одного переменного. Именно это обстоятельство делает целесообразным их применение в составе NFKN в качестве аналогов функций $g_i(\cdot)$ и $\varphi_{ii}(\cdot)$.

Как видно из схемы на рис. 1, выходные сигналы скрытого слоя могут быть записаны в форме

$$o_i^{[1]} = \sum_{i=1}^d f_i^{[1,l]}(x_i) = \sum_{i=1}^d \sum_{h=1}^{m_1} \mu_{ih}^{[1]}(x_i)w_{ih}^{[1,l]}, \quad (5)$$

а выходного —

$$\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_2} \mu_{ij}^{[2]}(o_i^{[1]})w_{ij}^{[2]}, \quad (6)$$

что, как несложно заметить, соответствует преобразованиям, реализуемым нео-фаззи нейронами, число которых в скрытом слое составляет n , а в выходном 1. На рис. 1 пунктирной рамкой обведены нео-фаззи нейроны $NFN_1^{[1]}$ и $NFN_1^{[2]}$.

Окончательно отображение, реализуемое с помощью NFKN, может

быть записано в виде

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_d) = \sum_{l=1}^n f_l^{[2]} \left(\sum_{i=1}^d f_i^{[1,l]}(x_i) \right) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{m_2} \mu_{lj}^{[2]} \left(\sum_{i=1}^d \sum_{h=1}^{m_1} \mu_{ih}^{[1]} w_{ih}^{[1,l]} \right) w_{lj}^{[2]}, \quad (7)$$

что является гибридом двухслойной ИНС с прямой передачей информации и двухуровневой системы нечетких правил, реализующей двухуровневый подход (multiresolution approach) [11], что позволяет согласно теореме Яма-Нгуена-Крейновича обеспечить сколь угодно высокую точность аппроксимации любой многомерной непрерывной функции, заданной на ограниченном множестве.

Обучение NFKN

Для нахождения $d \cdot m_1 \cdot n$ неизвестных синаптических весов скрытого слоя $w_{ih}^{[2]}$ и $m_2 \cdot n$ весов $w_{lj}^{[2]}$ выходного используем стандартный локальный критерий обучения, принятый в теории ИНС

$$E(k) = \frac{1}{2} (y(k) - \hat{f}(x_1(k), x_2(k), \dots, x_d(k)))^2 = \frac{1}{2} e^2(k), \quad (8)$$

где $k = 1, 2, \dots, N, \dots$ — номер наблюдения или индекс текущего времени в обучающей выборке, $y(k)$ — обучающий сигнал.

Используя градиентную процедуру минимизации критерия (8), можно сразу записать алгоритм обучения весов выходов слоя в виде

$$w_{lj}^{[2]}(k+1) = w_{lj}^{[2]}(k) - \eta_w^{[2]} \frac{\partial E(k)}{\partial w_{lj}^{[2]}} = w_{lj}^{[2]}(k) + \eta_w^{[2]} e(k) \mu_{lj}^{[2]}(o_i^{[1]}(k)), \quad (9)$$

где $\eta_w^{[2]}$ — параметр шага обучения, определяющий характер сходимости процесса настройки.

Поскольку веса выходного слоя в описание (7) входят линейно, для их определения может быть также использован любой метод оптимизации второго порядка, в том числе и стандартный рекуррентный метод наименьших квадратов, широко используемый в теории и практике адаптивной идентификации [12].

Используя идею обратного распространения ошибок, несложно также записать градиентную процедуру обучения весов скрытого слоя в виде

$$\begin{aligned} w_{ih}^{[1,l]}(k+1) &= w_{ih}^{[1,l]}(k) - \eta_w^{[1]} \frac{\partial E(k)}{\partial w_{ih}^{[1,l]}} = \\ &= w_{ih}^{[1,l]}(k) - \eta_w^{[1]} \frac{\partial E(k)}{\partial o_i^{[1]}(k)} \cdot \frac{\partial o_i^{[1]}(k)}{\partial w_{ih}^{[1,l]}} = \\ &= w_{ih}^{[1,l]}(k) - \eta_w^{[1]} \mu_{ih}^{[1]}(x_i(k)) \sum_{j=1}^{m_2} w_{lj}^{[2]}(k) \frac{\partial \mu_{lj}^{[2]}(o_i^{[1]}(k))}{\partial o_i^{[1]}(k)}, \end{aligned} \quad (10)$$

незначительно превосходящую по сложности алгоритм (9).

Обучение NFKN с помощью (9), (10) может производиться как в пакетном режиме при фиксированной обучающей выборке, так и в режиме реального времени по мере поступления новой информации.

Обучение NFKN с функциями принадлежности четвертого порядка

В качестве функций принадлежности в NFKN могут быть использованы любые конструкции принятые в FIS такие, как гауссовские, треугольные, трапециевидные и т. п. Вместе с тем, необходимость их дифференцирования в алгоритма (10) заставляет отдать предпочтение функциям не претерпевающим разрывов и имеющих простые выражения для своих производных. В качестве такой конструкции мы предлагаем использовать полиномы четвертого порядка (quartics) вида

$$\mu_{ih}(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i < c_{i,h-1}, \\ (1 - d_i^{-2}(c_{ij} - x_i)^2)^2 & \text{при } c_{i,h-1} \leq x_i \leq c_{i,h+1}, \\ 0 & \text{при } c_{i,h+1} < x_i, \end{cases} \quad (11)$$

вид которых приведен на рис. 4.

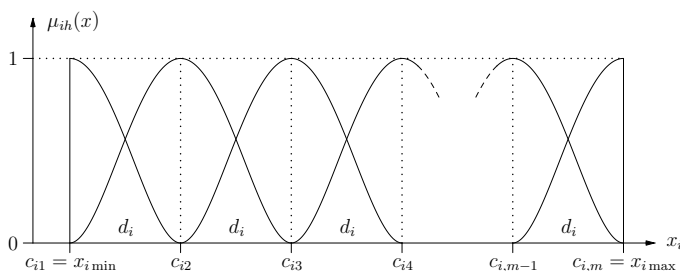


Рис. 4 – Функции принадлежности четвертого порядка

Данные функции симметричны, финитны, имеют колоколообразную форму и обращают свои производные в нуль в точках экстремума, соответствующих положению центра c_{ih} , и точках пересечения с осью абсцисс. Параметр ширины d_i этих функций определяется выражением

$$d_i = \frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{m - 1} = \frac{c_{im} - c_{i1}}{m - 1} = c_{ih} - c_{i,h-1} = c_{i,h+1} - c_{ih}, \quad (12)$$

а производная

$$\frac{\partial \mu_{ih}(x_i)}{\partial x_i} = 4 \frac{1 - d_i^{-2}(c_{ih} - x_i)^2}{d_i^2} (x_{ih} - x_i), \quad (13)$$

равна нулю в точках $c_{i,h-1}$, c_{ih} и $c_{i,h+1}$.

Улучшить аппроксимирующие свойства NFKN можно, обеспечив настройку не только синаптических весов, но и функций принадлежности выходного слоя, в качестве которых могут быть использованы несимме-

тричные функции вида

$$\mu_{ih}(o_l) = \begin{cases} 0 & \text{при } o_l < c_{l,j-1}, \\ \left(1 - \left(\frac{c_{lj} - o_l}{c_{lj} - c_{l,j-1}}\right)^2\right)^2 & \text{при } c_{l,j-1} \leq o_l \leq c_{lj}, \\ \left(1 - \left(\frac{c_{lj} - o_l}{c_{l,j+1} - c_{lj}}\right)^2\right)^2 & \text{при } c_{lj} \leq o_l \leq c_{l,j+1}, \\ 0 & \text{при } c_{l,j+1} < o_l, \end{cases} \quad (14)$$

вид которых приведен на рис. 5.

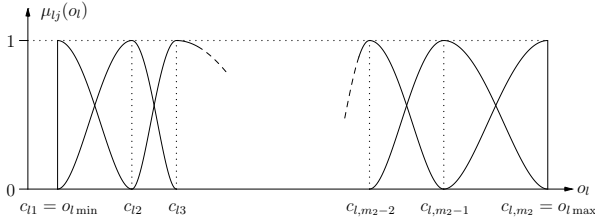


Рис. 5 – Несимметричные функции принадлежности четвертого порядка

Переписав критерий (8) в виде

$$E(k) = \frac{1}{2} \left(y(k) - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{m_2} \mu_{ij}^{[2]}(o_l^{[1]}(k)) w_{lj}^{[2]} \right)^2, \quad (15)$$

можно ввести алгоритм настройки положения функций принадлежности второго выходного слоя в виде

$$c_{lj}^{[2]}(k+1) = c_{lj}^{[2]}(k) - \eta_c(k) \frac{\partial E(k)}{\partial c_{lj}^{[2]}} = c_{lj}^{[2]}(k) + \eta_c(k) e(k) w_{lj}^{[2]} \frac{\partial \mu_{ij}^{[2]}(o_l^{[1]}(k))}{\partial c_{lj}^{[2]}}, \quad (16)$$

где производные функций принадлежности по центрам в случае (14) определяются соотношением

$$\frac{\partial \mu_{ih}(o_l)}{\partial c_{lj}} = \begin{cases} 0 & \text{при } o_l < c_{l,j-1}, \\ 4 \frac{c_{lj} - o_l}{c_{lj} - c_{l,j-1}} \left(1 - \left(\frac{c_{lj} - o_l}{c_{lj} - c_{l,j-1}}\right)^2\right) \frac{c_{l,j-1} - o_l}{(c_{lj} - c_{l,j-1})^2} & \text{при } c_{l,j-1} \leq o_l \leq c_{lj}, \\ 4 \frac{c_{lj} - o_l}{c_{l,j+1} - c_{lj}} \left(1 - \left(\frac{c_{lj} - o_l}{c_{l,j+1} - c_{lj}}\right)^2\right) \frac{o_l - c_{l,j+1}}{(c_{l,j+1} - c_{lj})^2} & \text{при } c_{lj} \leq o_l \leq c_{l,j+1}, \\ 0 & \text{при } c_{l,j+1} < o_l. \end{cases} \quad (17)$$

Выводы

В работе предложена архитектура нейро-фаззи сети Колмогорова, представляющая собой гибрид схемы суперпозиции функций одной пе-

ременной, двухслойной нейронной сети с прямой передачей информации и двухуровневой системы нечеткого вывода. NFKN построена на стандартных блоках типа нелинейных синапсов и нео-фази нейронов, обладающих высокими аппроксимирующими свойствами, и проста в обучении. Целесообразно использование предлагаемой сети в задачах классификации, прогнозирования, эмуляции, нейроуправления и других приложениях, связанных с интеллектуальным анализом данных.

Литература

1. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения // ДАН СССР. – 1957. – № 5. – С. 953–956.
2. Hecht-Nielsen R. Kolmogorov's mapping neural network existence theorem // Proc. IEEE Int. Conf. on Neural Networks. – San Diego, CA, 1987. – 3. – P. 11–14.
3. Kurkova V. Kolmogorov's theorem and multilayer neural networks // Neural Networks. – 1992. – 5. – P. 501–506.
4. Sprecher D. A. A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions II // Neural Networks. – 1997. – № 10. – P. 447–457.
5. Igel'nik B., Parikh N. Kolmogorov's spline network // IEEE Trans. on Neural Networks. – 2003. – № 14. – P. 725–733.
6. Lopez-Gomez A., Yoshida S., Hirota K. Fuzzy functional link network and its application to the representation of the extended Kolmogorov theorem // Int. J. of Fuzzy Systems. – 2002. – № 4. – P. 690–695.
7. Yamakawa T., Uchino E., Miki T., Kusanagi H. A neo fuzzy neuron and its applications to system identification and prediction of the system behavior // Proc. 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks – IIZUKA-92. – Iizuka, Japan, 1992. – P. 477–483.
8. Miki T., Yamakawa T. Analog implementation of neo-fuzzy neuron and its on-board learning // Mastorakis N. E. (ed.): Computational Intelligence and Applications. – WSES Press, Piraeus, 1999. – P. 144–149.
9. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // Proc. 1st IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems. – San Diego, CA, 1992. – P. 1153–1162.
10. Yam Y., Nguyen H. T., Kreinovich V. Multi-resolution techniques in the rules-based intelligent control systems: a universal approximation result // Proc. 14th IEEE Int. Symp. on Intelligent Control/Intelligent Systems and Semiotics ISIC/ISAS-99. – Cambridge, Massachusetts, September 15–17, 1999. – 3. – P. 213–218.
11. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. Москва: Наука, 1991. – 434 С.