УДК 621.501.72

А.А. Стенин, П.С. Хоменко

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ НА БАЗЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

Аннотация: Предлагается для синтеза оптимальных программных управлений использовать аппарат функций Уолша.

Ключевые слова: Функции Уолша, трансцендентные уравнения, системы второго порядка.

Введение

Решение задач синтеза оптимальных по расходу топлива управлений значительно сложнее задач максимального быстродействия [1,2]. Многое зависит от правильного выбора функционала, т.к. при некоторых условиях может вообще не существовать, либо существовать так называемое ε–оптимальное управление с бесконечным временем перехода. Для выбранного в данной статье функционала оговариваются особые условия существования оптимального решения. В статье предлагается достаточно простой алгоритм решения оптимальной задачи на базе функций Уолша.

Постановка задачи

Пусть линейная нестационарная динамическая система описывается уравнением вида

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_1(t) = a(t)\, x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = b(t)\, u(t) \end{array} \right. . \tag{1}$$

Данной системой можно описать, например, посадку лунного модуля на поверхность Луны. Тогда x_1 – высота над поверхностью, x_2 – скорость сближения с поверхностью.

Необходимо перевести систему вида (1) из заданного начального состояния $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ в заданное конечное состояние $(0,0)$ и минимизировать функционал

$$I(u) = \int\limits_0^T |u(t)|\, dt, \tag{2}$$

где $|u(t)|$ и T задано.

Решение задачи

Пусть коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ представляют собой известные функции времени, монотонные, знакопостоянные, с ограниченными производными. В этом случае, полная последовательность управлений будет $(u_0, u, -u_0)$, где $u_0 = \pm 1$ [1].

Отсюда, задача оптимального программного управления сводится к определению моментов переключения управления t_1 и t_2 из заданного интервала $[0, T]$.

Следует отметить, что для некоторых областей начальных условий могут существовать более короткие последовательности управлений $(0, -u_0)$ и $(-u_0)$. Кроме того, если $T \leqslant T_{\min}$, где $T_{\min}$ – время системы (1), оптимальной по быстродействию, то оптимальное по расходу топлива управление не существует.

При движении системы (1) на интервале $[0, t_1]$ с управлением u_0 в момент времени t_1 будет иметь следующие значения переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$\begin{cases} x_2(t_1) = u_0 \int\limits_0^{t_1} b(t)\,dt + x_2^0 = x_2^1 \\ x_1(t_1) = \int\limits_0^{t_1} a(t)\left[u_0 \int\limits_0^{t_1} b(t)\,dt + x_2^0\right] dt + x_1^0 = x_1^1 \end{cases}. \tag{3}$$

Движение системы (1) на интервале $[t_1, t_2]$ начинается с точки $\left(x_1^1, x_2^1\right)$ при управлении $u(t) = 0$ и заканчивается в момент времени t_2 при следующих значениях $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$\begin{cases} x_2(t_2) = x_2^1 = x_2^2 \\ x_1(t_2) = x_2^1(t_2 - t_1) + x_1^1 = x_1^2 \end{cases}. \tag{4}$$

Наконец, при движении на последнем интервале управления $[t_2, T]$ при управлении $u(t) = -u_0$ будем иметь следующие значения переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$\begin{cases} x_1(T) = 0 = -u_0 \int\limits_{t_2}^{T} a(t)\left[\int\limits_{t_2}^{T} b(t)\,dt + x_2^2\right] dt + x_1^2 \\ x_2(T) = 0 = -u_0 \int\limits_{t_2}^{T} b(t)\,dt + x_2^2 \end{cases}. \tag{5}$$

Решение системы уравнений (5) с учетом (3) и (4) относительно неизвестных моментов t_1 и t_2 в аналитическом виде в общем случае не представляется возможным. Для ее решения предлагается использовать аппарат функций Уолша [3].

Введем масштаб времени $\tau = \frac{t}{T}$, где $\tau \in [0, 1]$. Тогда система (1) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a'(\tau)\,x_2(\tau) \\ \dot{x}_2(t) = b'(\tau)\,u(\tau) \end{cases}, \tag{6}$$

где $a'(\tau) = Ta\left(\frac{t}{T}\right)$ $b'(\tau) = Tb\left(\frac{t}{T}\right)$.

Запишем приближение $a'(\tau)$ и $b'(\tau)$ на системе функций Уолша:

$$a'(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(1)} \Phi_i(\tau); \; b'(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(2)} \Phi_i(\tau),$$

где

$$c_i^{(1)} = \int\limits_0^1 a'(\tau)\,\Phi_i(\tau)d\tau;\ c_i^{(2)} = \int\limits_0^1 b'(\tau)\,\Phi_i(\tau)d\tau.$$

Здесь число слагаемых m выбирается из условия наилучшего равномерного приближения

$$\left|a'(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(1)}\Phi_i(\tau)\right| < \varepsilon;\ \left|b'(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{(2)}\Phi_i(\tau)\right| < \varepsilon,$$

где ε – наперед заданная точность аппроксимации.

Из свойств аппарата функций Уолша известно [3], что при интегрировании и умножении функций Уолша мы остаемся в классе функций Уолша, т.е.

$$\begin{array}{l} \int a'(\tau)\,d\tau = \int \sum\limits_{i=0}^{m-1} c_i^{(1)}\Phi_i(\tau)d\tau = \sum\limits_{i=0}^{m-1} d_i^{(1)}\Phi_i(\tau) = D_m^{(1)}\Phi_m(\tau) \\ \int b'(\tau)\,d\tau = \int \sum\limits_{i=0}^{m-1} c_i^{(2)}\Phi_i(\tau)d\tau = \sum\limits_{i=0}^{m-1} d_i^{(2)}\Phi_i(\tau) = D_m^{(2)}\Phi_m(\tau) \\ \int a'(\tau)\left[\int b'(\tau)\,d\tau\right]d\tau = D_m^{(3)}\Phi_m(\tau) \end{array}.$$

Отсюда систему (5) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \geqslant -u_0 D_m^{(3)}\Phi_m(1) - u_0 x_2^2(1-\tau_2) + x_1^2 \\ \varepsilon \geqslant -u_0 D_m^{(2)}\Phi_m(\tau_2) + x_2^2 \end{array} \right., \tag{7}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2^2 = x_2^1 = u_0 D_m^{(2)}\Phi(\tau_1) \\ x_1^2 = x_1^1 + x_2^1(\tau_2 - \tau_1);\ x_1^1 = u_0 D_m^{(3)}\Phi_m(\tau_1) + x_2^0\tau_1 + x_1^0 \end{array} \right.. \tag{8}$$

Решение системы (7) относительно неизвестных τ_1 и τ_2 осуществляется по следующему алгоритму (рис. 1). Следует отметить, что алгоритм автоматически просматривает и короткие последовательности управлений.

Решение может быть не найдено, если неправильно выбрано значение начального управления, область начальных условий или время управления T, потому в алгоритм необходимо внести коррективы.

Выводы

Предложенный алгоритм позволяет избежать необходимости решения трансцендентных уравнений для определения моментов переключения τ_1 и τ_2. Точность определения моментов переключения зависит от числа слагаемыхm. Алгоритм легко обобщается на другие системы второго порядка.

 ISSN 1560-8956

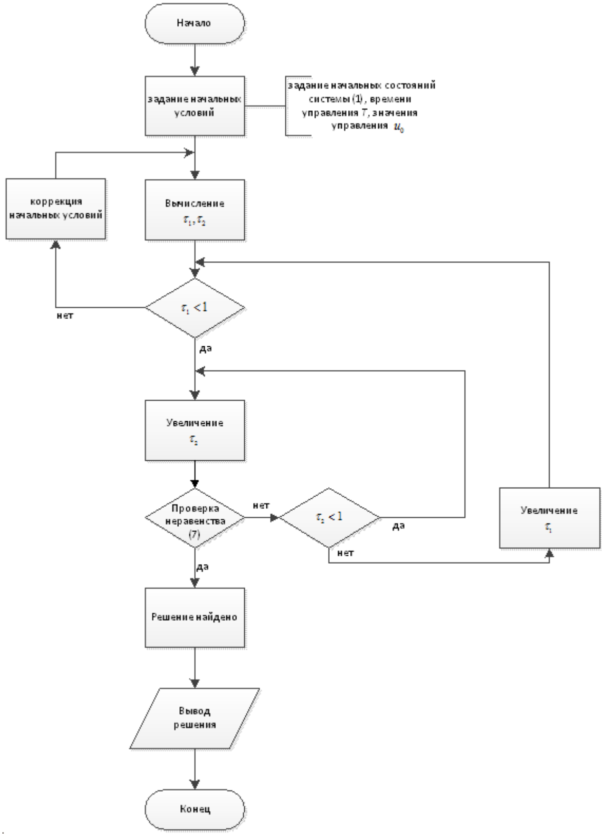

Рис. 1 – Блок-схема алгоритма определения оптимальных моментов переключения

Литература

1. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление – М.: Машиностроение 1968г. 764с.
2. Пасько В.П., Стенин А.А., Хоменко П.С. Синтез оптимальных законов движения линейных стационарных моделей технологических процессов при “идеальном” операторе в контуре управления // Адаптивні системи автоматичного управління. – Випуск 15 (35). – Київ, 2009. – С. 71–76.
3. Варакин Л.Е. Теория систем сигналов – М.: Сов. радио 1978г. 304с.

Отримано 11.03.2011 р.