УДК 621-50

Е.Ю. Мелкумян, М.А. Солдатова

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация: в данной статье приведен метод эквивалентного преобразования суть которого заключается в замене некоторого класса нестационарных систем стационарными, для которых методы оптимизации хорошо проработаны.

Ключевые слова: нестационарные системы, методы оптимального управления, методы оптимизации.

Введение

В большинстве методов оптимального управления, разработанных для непрерывных систем, задачи рассматриваются во временной области с использованием понятия пространства состояний и теории матриц. Известно, что все реальные объекты управления в той или иной мере являются нелинейными и нестационарными. Анализ и синтез систем управления для таких объектов представляет собой сложную математическую проблему, решение которой до настоящего времени получено для некоторых частных случаев. В данной работе рассматривается возможность замены некоторого класса нестационарных систем стационарными, для которых методы оптимизации хорошо проработаны.

Постановка задачи

Пусть динамика объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\,\bar{x}(t) + B(t)\,\bar{u}(t)\,, \tag{1}$$

где $\bar{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ – n-мерный вектор состояния; $\bar{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^T$ – n-мерный вектор управляющих воздействий; $A(t)$, $B(t)$ – матрицы переменных коэффициентов размерностью $n \times n$.

Необходимо определить оптимальное управление $\bar{u}^*(t)$, переводящее систему (1) из заданного начального состояния $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0$ в конечное $\bar{x}(t_k) = \bar{x}^k$ и минимизирующее квадратический функционал вида:

$$I_6 = \int\limits_{t_0}^{t_k} \left[\bar{x}^T(t)Q\bar{x}(t) + \bar{u}^T(t)R\bar{u}(t)\right]dt,$$

где: t_k – не фиксировано (фиксировано), Q и R – положительно определенные матрицы размера $n \times n$.

В общем случае, решение указанных задач оптимального управления для системы (1) является весьма сложным ввиду нестационарности параметров системы [1]. Отсюда возникает задача нахождения эквивалентной исходной нестационарной системе (1) стационарной системы, для которой возможно нахождение оптимального решения с последующим обратным преобразованием [2].

Решение задачи

Очевидно, если существует невырожденное линейное преобразование

$$\bar{x}(t) = D(t)\,\bar{y}(t), \tag{2}$$

то систему (1) можно заменить эквивалентной стационарной системой вида

$$\dot{\bar{y}}(t) = Q\bar{y}(t) + R\bar{u}(t). \tag{3}$$

Действительно, если считать $\bar{y}(t)$ – вектором и $D(t)$ – $n \times n$ матрицей переменных коэффициентов, то преобразование (2) переводит уравнение (1) в уравнение

$$\dot{\bar{y}}(t) = D^{-1}(t)\left[A(t)\,D(t) - D(t)\right]\bar{y}(t) + D^{-1}(t)\,B(t)\,\bar{u}(t).$$

В этом случае для данного преобразования необходимо и достаточно выполнение условий

$$D^{-1}(t)\left[A(t)\,D(t) - D(t)\right] = Q, \tag{4}$$

$$D^{-1}(t)\,B(t) = R,$$

где Q и R – матрицы постоянных коэффициентов соответствующего размера.

Нетрудно заметить, что выполнение условий (4) для искомой системы (1) возможно, если

$$B^{-1}(t)\,A(t)\,B(t) - B^{-1}(t)\,B(t) = M = \mathrm{const}. \tag{5}$$

При выполнении условия (5) определении матрицы преобразования $D(t)$ в общем случае весьма затруднительно, так как ее определение сводится к решению дифференциального уравнения вида

$$\dot{D}(t) + \left[B(t)\,MB^{-1}(t) - A(t)\right]D(t) = 0, \tag{6}$$

при неизвестных граничных условиях.

Однако в ряде случаев удается избежать такой неопределенности и получить достаточно простое решение. Действительно, анализируя выражение (4) и (5) имеем

$$M = R^{-1}QR \tag{7}$$

где M – матрица известных постоянных коэффициентов размерностью $n \times n$.

Рассмотрим практические примеры определения матрицы $D(t)$ при различных структурах и вариантах собственных значений матрицы $\boldsymbol{M}$.

Рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. Пусть собственные значения $\{m_i\}\,(i = 1, n)$ матрицы M вещественны и различны. Тогда, считая, что матрица Q является единичной диагональной матрицей матрица R^{-1} определяется как матрица Вандермонда [3] вида

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \dots & m_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

В этом случае $D(t)$ определится из выражения (4) следующим образом

$$D(t) = B(t)\,R^{-1}. \tag{8}$$

Случай 2. Пусть собственные значения $\{m_i\}\,(i = 1, n)$ вещественны, но среди них есть кратные, т.е. $p_1 + p_2 + \ldots + p_i = n$, где p_i число корней m_i обозначим через $M_i(m)$ матрицу размера $i \times i$ вида [3]

$$M_i(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{pmatrix}$$

Тогда, считая, что матрица Q в выражении (6) является жордановой канонической формой матрицы $\boldsymbol{M}$, имеем

$$Q = \begin{pmatrix} Mp_1(m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Mp_1(m_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Mp_1(m_1) \end{pmatrix}$$

Если $\boldsymbol{M}$ нормальный оператор, т.е. $M^T M = MM^T$, то матрица преобразования R имеет ранг n и определяется на базе собственных векторов в виде модальных столбцов [4].

В случае, когда матрица $\boldsymbol{B}(t)$ имеет размерность nxm для определения переменных коэффициентов матрицы $\boldsymbol{B}(t)$ в системе (1) необходимо задать такую структуру матриц Q и R, при которой отсутствуют нулевые элементы и матрица $B(t)$ соответствует устойчивой линейной системе.

Заключение

В результате, при известной матрице $D(t)$ задача оптимального управления нестационарной системой (1) сводится к задаче оптимального управления эквивалентной стационарной системой (3), методы решения которой достаточно известны и хорошо проработаны.

Список использованных источников

1. Красовский А.А. Справочник по теории автоматического управления. – М.: Наука, 1987. 712 с.
2. Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968, 724 с.
3. Дункан В., Коллар А., Фразер Р., Теория матриц и её проложения к дифференциальным уравнениям и динамике. –М.: Иностранная литература., 1950. 448 с.
4. Ланкастер В. Теория матриц. - М.: Наука Гл. ред физ. – мат. литературы. 1972. 272 с.

Отримано 21.12.2015 р.