УДК 656.015

ОБҐРУНТУВАННЯ ПОКАЗНИКОВОГО ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ДОВЖИН ПЕРЕГОНІВ МІСЬКОГО ПАСАЖИРСЬКОГО ТРАНСПОРТУ

П.Ф. Горбачов, професор, д.т.н., О.В. Макарічев, ст. наук. співроб., к.ф.-м.н., С.В. Свічинський, аспірант, ХНАДУ

Анотація. *Приведено результати дослідження зв'язку між довжинами перегонів та розташуванням зупинних пунктів на шляху прямування між об'єктами транспортного тяжіння. Дано теоретичне обґрунтування придатності показникового розподілу з параметром зсуву для опису довжин перегонів.*

Ключові слова: *перегін, зупинний пункт, показниковий розподіл, параметр зсуву, шлях прямування, розселення населення.*

ОБОСНОВАНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИН ПЕРЕГОНОВ ГОРОДСКОГО ПАССАЖИРСКОГО ТРАНСПОРТА

П.Ф. Горбачев, профессор, д.т.н., А.В. Макаричев, ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., С.В. Свичинский, аспирант, ХНАДУ

Аннотация. *Приведены результаты исследования связи между длинами перегонов и расположением остановочных пунктов на пути следования между объектами транспортного тяготения. Дано теоретическое обоснование пригодности показательного распределения с параметром сдвига для описания длин перегонов.*

Ключевые слова: *перегон, остановочный пункт, показательное распределение, параметр сдвига, путь следования, расселение населения.*

THEORETICAL JUSTIFICATION OF EXPONENTIAL DISTRIBUTION LAW OF DISTANCES BETWEEN STOPS OF CITY PUBLIC TRANSPORT

P. Gorbachov, Professor, Doctor in Technical Science, O. Makarychev, senior researcher, Candidate in Physics and Mathematical Science, S. Svichynskyi, postgraduate, KhNAHU

Abstract. *The paper presents the results of investigation of relation bitween the trip distance on stops location on the route between places of attraction. Theoretical justification of the use fulness of exponential distribution with the shift parameter for describing the trip distance between stops is given.*

Key words: *distance between stops, stop, exponential distribution, shift parameter, route, population allocation.*

Вступ

Щоденні пересування населення є природним проявом міського життя. Переважна більшість людей кожного дня має потребу у переміщенні через необхідність забезпечення себе матеріальними ресурсами, інформацією, задоволення побутових потреб тощо [1]. Це створює певні навантаження на вулично-дорожню мережу, знання яких дозволяє найбільш точно планувати роботу транспорту загального користування [2], який в українських містах залишається основним постачальником перевізних послуг. Шляхи прямування в даному випадку є однією з найважливіших характеристик пересувань. Визначення умов їх формування та закономірностей у довжинах є необхідним кроком формування функції розселення населення, тобто розподілу пасажирів за дальністю поїздок, що надалі дозволить точно моделювати попит на послуги міського пасажирського транспорту (МПТ).

Аналіз публікацій

Сучасні найбільш поширені моделі визначення транспортного попиту у містах у своїй більшості є апріорними [2–6], в яких проведення аналогії між поведінкою людей і природними процесами можна поставити під сумнів. В цих моделях для розподілу пасажирських кореспонденцій між об'єктами транспортного тяжіння здебільшого використовується відстань або час сполучення між ними. Виходить, що шлях пересування є вихідною, «неподільною» складовою зазначених моделей [2–6]. Фактори та закономірності у формуванні шляхів пересування при цьому ніяк не враховуються.

В той же час очевидним є те, що на поїздки людей, зокрема вибір пунктів відправлення та призначення, достатньо вагомий вплив справляє транспорт як об'єкт міської інфраструктури. Всілякі споруди – чи то виробничі, чи то житлові – є доволі стабільними компонентами міст, зміни в яких здійснюються впродовж значних відрізків часу. Аналогічною є ситуація і стосовно транспортної мережі (ТМ). Її формування здійснюється на основі сумісних рішень багатьох учасників міської життєдіяльності – влади, проектних організацій, бізнес-структур та ін., – які приймаються з урахуванням в тій чи іншій мірі інтересів та вимог кожного з них. Тому, незважаючи на наявні плани різної строковості, це виливається у певну випадковість у створенні її елементів з точки зору послідовної фіксації станів ТМ на різних етапах розвитку міста [5, 6]. Тут слід зауважити, що зміни в мережі впливають на доступність об'єктів та поїздки людей до них. Пересування при цьому є найбільш динамічним елементом життєдіяльності міста, який доволі швидко пристосовується до таких змін [6]. Це є відображенням самоорганізації міського населення, що знаходить свій прояв у виникненні закономірностей розселення [2].

Оскільки маршрутний транспорт в українських містах освоює більшу частину пересувань міського населення, зростання його мережі є пропорційним розгалуженню ТМ. З огляду на це, характеристики маршрутної мережі (ММ) МПТ можна взяти за основу визначення розподілу пасажирів за дальністю поїздок, яка повністю визначається шляхом прямування пасажира між об'єктами транспортного тяжіння в маршрутній системі міста.

Однією з основних характеристик ММ виправдано можна вважати довжини перегонів МПТ. В роботі [7] було встановлено, що дані довжини за лишком мінімального значення довжини перегону у місті $l_{\min}$ ($l'_k = l_k - l_{\min}$, де l'_k – скорегована довжина перегону, l_k – фактична довжина k-го перегону) можуть бути описані за допомогою показникового закону розподілу. Одним з пояснень цього був асимптотично нормальний двомірний розподіл просторових координат ЗП, з якого випливає закон розподілу Релея, придатний для опису довжин перегонів l_k, котрий за визначених умов може бути замінений на показниковий з параметром зсуву [8]. Це пояснення є прийнятним, але не може вважатися вичерпним. Виявлена можливість опису фактичних довжин перегонів l_k розподілом Релея в дослідженні функцій розселення населення на основі характеристик ММ носить допоміжний характер, оскільки покликана підтвердити асимптотичну нормальність двомірного розподілу зупинних пунктів (ЗП) по території міст [8]. Це спричинило пошук додаткових підтверджень показникового характеру розподілу величини l'_k.

Мета і постановка задачі

Через те що l_k входить у функцію та щільність розподілу Релея у квадратичному вигляді та через безуспішні спроби віднайти аналітичні перетворення даного закону, було здійснено перехід від нього до показникового розподілу l'_k. Останній слід вважати основним при описі довжин перегонів, тому що йому властиві більші описові спроможності стосовно довжин перегонів та широкі можливості застосування аналітичних перетворень. Подальше використання саме показникового розподілу потребує, окрім виявленої можливості переходу до нього, безпосереднього підтвердження. Саме тому метою даної статті є теоретичне обґрунтування показникового розподілу довжин перегонів l'_k. В якості характеристик ММ, на основі яких буде здійснюватись обґрунтування, було обрано шлях пересування між будь-якою парою ЗП та розташування проміжних ЗП на ньому. Для досягнення поставленої мети в загальному випадку доцільно зафіксувати довжину шляху пересування між парою ЗП та теоретично обґрунтувати виникнення показникового характеру розподілу довжин перегонів МПТ [7].

Теоретичні основи виникнення закономірностей у довжинах перегонів

Довжину пересування між будь-якою парою зупинних пунктів у місті, згідно з викладеним вище, можна представити виразом (1) та графічно зобразити рис. 1

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} l_k = \sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(l'_k + l_{\min}\right) = n_{ij} \cdot l_{\min} + \sum_{k=1}^{n_{ij}} l'_k, \quad (1)$$

де n_{ij} – кількість перегонів на шляху прямування між парою ЗП i та j, випадкова величина [7].

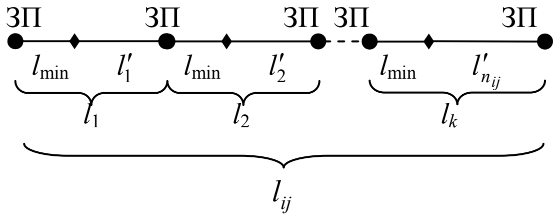

Рис. 1. Графічна інтерпретація шляху прямування l_{ij} згідно з виразом (1)

Позначимо через l'_{ij} другу складову суми (1)

$$l'_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} l'_k = l_{ij} - n_{ij} \cdot l_{\min} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(l_k - l_{\min}\right). \quad (2)$$

Таким чином, l'_{ij} являє собою суму випадкових доповнень мінімальної довжини перегону до l_k, тобто $l_k = l_{\min} + l'_k$, де l'_k – випадкове доповнення.

Виходячи з цього, l'_k можна отримати як результат випадкового поділу l'_{ij} на n_{ij} випадкових складових (доданків), що представлено на рис. 2. Відмінність від рис. 1 полягає у суміщенні точок початку та закінчення відрізків $l_{\min}$, що є тотожним їх видаленню.

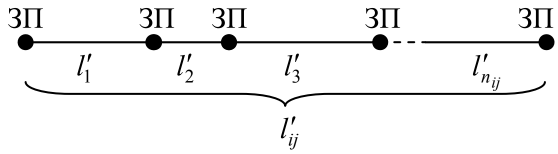

Рис. 2. Поділ шляху прямування l'_{ij} на n_{ij} складових

Якщо розглянути, посилаючись на даний рисунок, доданки l'_1, $l'_1 + l'_2$, $l'_1 + l'_2 + l'_3$, … , $l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_{n_{ij}}$, то вони є порядковими статистиками $l'_1 = x_{(1)}$, $l'_1 + l'_2 = x_{(2)}$, … , $l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_{n_{ij}-1} = x_{(n_{ij}-1)}$ випадкової величини X, рівномірно розподіленої на відрізку l'_{ij}.

Величина X спостерігається у $(n_{ij} - 1)$ випадках-експериментах, результатом кожного з яких є поява ЗП на шляху від i до j, кількість котрих становить $n = n_{ij} - 1$ та має розподіл Пуассона [9]

$$P_n(l'_{ij}) = \frac{(\lambda l'_{ij})^n}{n!} e^{-\lambda l'_{ij}}, \qquad \lambda = \frac{1}{\bar{n}}, \quad n = n_{ij} - 1, \quad (3)$$

де $\bar{n}$ – середня кількість ЗП на шляху прямування між i та j.

Таким чином, отримуємо підхід до опису l'_{ij}, в рамках якого можна виділити два процеси: перший, для якого випадковою величиною є поява n незалежних точок – ЗП, рівномірно розподілених на проміжку (0, l'_{ij}), і другий, пуассонівський, процес, для якого відомий розподіл ймовірностей (3).

Введемо випадкову подію A_n, яка полягає в тому, що у проміжках $\{\beta_i\}$ буде знаходитись рівно один ЗП (точка пуассонівського процесу), а у проміжках $\{\alpha_i\}$ – жодного (рис. 3).

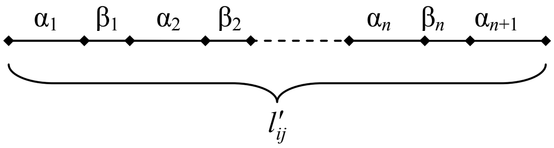

Рис. 3. Графічне подання події A_n

Для першого процесу появи рівно n рівномірно розподілених ЗП ймовірність події A_n визначається наступним чином [9]

$$P\{A_n|B\}=$$
$$=\left(\frac{\beta_1}{l'_{ij}}\right)\cdot\left(\frac{\beta_2}{l'_{ij}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\beta_n}{l'_{ij}}\right)\cdot n!=\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}{(l'_{ij})^n}\cdot n!, \quad (4)$$

де B – подія, котра визначається як поява рівно n ЗП на проміжку (0, l'_{ij}).

Множник $n!$ пояснюється тим, що не робиться ніяких відмін між перестановками n точок по n проміжках [9].

Для другого, пуассонівського, процесу

$$P\{A_n|B\}=\frac{P\{A_n\cdot B\}}{P\{B\}}. \quad (5)$$

Оскільки для пуассонівського потоку точок, в нашому випадку ЗП, події на неперетинних проміжках є незалежними [9], ймовірність сумісної події $\{A_n \cdot B\}$ можна обчислити як добуток ймовірностей окремих подій

$$P(C)=\lambda\beta_i e^{-\lambda\beta_i}, \quad P(D)=e^{-\lambda\alpha_i}, \quad (6)$$

де C – подія, яка полягає у появі одного ЗП на проміжку β_i; D – подія, яка полягає у тому, що на проміжку α_i не з'явиться жодного ЗП. Безумовна ж ймовірність події $\{B\}$ визначається виразом (3). Тоді виходить, що

$$P\{A_n|B\}=$$
$$=\left(\lambda\beta_1\cdot\lambda\beta_2\ldots\lambda\beta_n\cdot e^{-\lambda\beta_1}\cdot e^{-\lambda\beta_2}\ldots e^{-\lambda\beta_n}\times\right.$$
$$\left.\times e^{-\lambda\alpha_1}\cdot e^{-\lambda\alpha_2}\ldots e^{-\lambda\alpha_{n+1}}\right)\Big/\frac{(\lambda l'_{ij})^n}{n!}e^{-\lambda l'_{ij}}= \quad (7)$$
$$=\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}{(l'_{ij})^n}\cdot n!$$

Отже, умовні ймовірності A_n для обох процесів співпадають, тобто сумісний розподіл n рівномірно розподілених ЗП на проміжку (0, l'_{ij}) є таким самим, як і сумісний розподіл точок (ЗП) пуассонівського процесу, якщо їх на проміжку (0, l'_{ij}) рівно n одиниць.

Тут слід відзначити, що для пуассонівського процесу випадкова довжина проміжку між сусідніми точками – ЗП – має показниковий розподіл ймовірностей [9]. Це свідчить, що два підходи до розгляду l'_{ij} підтверджують показниковий характер розподілу l'_k.

Обґрунтування придатності показникового розподілу для опису довжин перегонів

Підтвердження показникового розподілу довжин перегонів можна отримати, якщо впорядкувати точки $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$, які відповідають згаданим вище порядковим статистикам, за зростанням $x_{(0)}=0\le x_{(1)}\le x_{(2)}\le\ldots\le x_{(n)}\le x_{(n+1)}=l'_{ij}$ та знайти розподіл величини $x_{(k+1)}-x_{(k)}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$. Для цього зручно знайти ймовірність

$$P\left\{x_{(k+1)}-x_{(k)}>x\right\},\quad k=0,1,2,\ldots,n, \quad (8)$$

де $\left\{x_{(k+1)}-x_k>x\right\}$ – подія, яка означає, що на проміжку довжиною x немає жодної точки поділу, в нашого випадку – жодного ЗП (рис. 4).

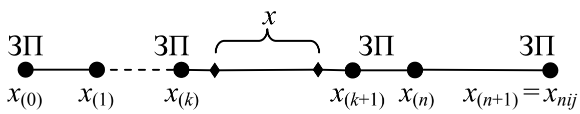

Рис. 4. Графічне подання події $\left\{x_{(k+1)}-x_k>x\right\}$

Виходячи з цього, ймовірність події (8) можна визначити як ймовірність добутку незалежних подій, які полягають в тому, що точки $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots x_{(n+1)}$ не належать проміжку довжини x [10]

$$P\{x_{(k+1)}-x_{(k)}>x\}=\left(\frac{l'_{ij}-x}{l'_{ij}}\right)^n=\left(1-\frac{x}{l'_{ij}}\right)^n. \quad (9)$$

Нехай $l'_{ij}\to\infty$ та $n\to\infty$ таким чином, що границя $l'_{ij}/n+1=l'_{ij}/n_{ij}\to\overline{l'_k}$ – фіксована, тобто середня довжина перегону за лишком $l_{\min}$ прямує до $\overline{l'_k}$. Тоді можна попередньо стверджувати, що

$$\lim P\left\{x_{(k+1)}-x_{(k)}>x\right\}=e^{-\frac{x}{\overline{l'_k}}},\ x>0. \quad (10)$$

З метою доведення даного виразу оберемо $x>0$ та зафіксуємо його. Згідно з визначенням натурального логарифму та за теоремою про граничний перехід під знаком неперервної функції отримаємо [10]

$$\lim P\left\{x_{(k+1)} - x_{(k)} > x\right\} = \lim\left(1 - \frac{x}{l'_{ij}}\right)^{n} = \\ = e^{\lim n \ln\left(1 - \frac{x}{l'_{ij}}\right)}. \quad (11)$$

Оскільки прийнята умова $l'_{ij} \to \infty$, тоді $\frac{x}{l'_{ij}} \to 0$, а $\ln\left(1 - \frac{x}{l'_{ij}}\right) \sim -\frac{x}{l'_{ij}}$. Звідси виходить, що

$$\lim P\left\{x_{(k+1)} - x_{(k)} > x\right\} = e^{\lim n \ln\left(1 - \frac{x}{l'_{ij}}\right)} = \\ = e^{\lim\left(-\frac{nx}{l'_{ij}}\right)} = e^{-x \lim \frac{n}{l'_{ij}}} = e^{-x \lim \frac{n+1}{l'_{ij}} \cdot \lim \frac{n}{n+1}} = \\ = e^{-x \lim \frac{n+1}{l'_{ij}}} = e^{-\frac{x}{\bar{l}'_k}}, \quad (12)$$

чим і підтверджується правильність виразу (10) [10].

Таким чином, гіпотеза про показниковий характер розподілу ймовірностей l'_k має сенс.

Висновки

В результаті теоретичних досліджень властивостей довжин перегонів МПТ з використанням засобів теорії ймовірностей було встановлено, що їх розподіл має показниковий характер, спричинений розташуванням зупинних пунктів на шляху від одного об’єкта транспортного тяжіння до іншого.

Таким чином, виявлені закономірності у довжинах перегонів міського пасажирського транспорту формуються під впливом багатьох факторів та мають глибоке підґрунтя, що бере свій початок з розташування ЗП у плані міст.

Література

1. Социально-экономические проблемы развития и функционирования транспортных систем городов и зон их влияния: науч. материалы XVI междунар. (девятнадцатой Екатеринбургской) науч.-практ. конф., 16–17 июня 2010 г. / Уральский гос. эконом. ун-т, Белорус. науч.-исслед. и проект. ин-т градостроительства [и др.] – Екатеринбург: Изд-во Уральского гос. экон. ун-та, 2011. – С. 99–132, II, [363] с.
2. Ефремов И.С. Теория городских пассажирских перевозок: учеб. пособие для вузов / И.С. Ефремов, В.М. Кобозев, В.А. Юдин. – М.: Высшая школа, 1980. – 535 с.
3. Shahriar A.Z. An integrated urban land use and transportation demand model based on Lowry linage / A.Z. Shahriar, A. Morteza // Journal of Applied Sciences. – 2008. – №8 (7). – P. 1197–1205.
4. Iacono M. Models of Transportation and Land Use Change: A Guide to the Territo-ry / M. Iacono, D. Levinson, El-Geneidy A. // A Journal of Planning Literature Online First. – 2008. – P. 1–18. – Режим доступу до журн.: http://tram.mcgill.ca/Research/Publications/models_of_transport_land_u-se_guided_ter.pdf.
5. Feng Xie. Evolving transportation networks / Xie Feng , Levinson D. – Springer, 2011. – 278 p.
6. Rodrigue J.-P. The geography of transport systems / Jean-Paul Rodrigue, Claude Comtois, Brian Slack. – Taylor & Francis e-Library, 2006. – 284 p.
7. Горбачов П.Ф. Статистичний опис взаємного розташування зупиночних пунктів міського пасажирського транспорту / П.Ф. Горбачов, П.С. Кабалянц, С.В. Свічинський // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожно-го университета: сб. науч. трудов. – 2011. – №53. – С. 66–69.
8. Горбачов П.Ф. Закономірності просторових характеристик маршрутного транспорту міст / П.Ф. Горбачов, П.С. Кабалянц, С.В. Свічинський // Автомобильный транспорт: сб. науч. трудов. – 2012. – №30. – С. 118–122.
9. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А.Я. Хинчин. – М.: Физмат-г-из, 1963. – 236 с.
10. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа. – Т. 1, 1988. – 712 с.

Рецензент: Є.В. Нагорний, професор, д.т.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 10 грудня 2012 р.