

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА КАЧЕСТВО ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ НА БАЛКУ

В.Т. Гришакин, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Аннотация. Изложены и сопоставлены подходы к решению задач идентификации действующей на защемленные балки постоянного поперечного сечения импульсной нагрузки, которые являются составляющими элементами конструкций, используемых в машиностроении. Разработанными подходами задачи сведены к численному решению систем интегральных уравнений Вольтерра.

Ключевые слова: балка, нагрузка, перемещения, деформации, идентификация.

ВПЛИВ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ЯКІСТЬ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА БАЛКУ

В.Т. Гришакін, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Анотація. Викладено та зіставлено підходи до вирішення завдань ідентифікації діючого на защемлені балки постійного поперечного перерізу імпульсного навантаження, які є складовими елементами конструкцій, що використовуються в машинобудуванні. Розробленими підходами задачі зведені до чисельного розв'язання систем інтегральних рівнянь Вольтерра.

Ключові слова: балка, навантаження, переміщення, деформації, ідентифікація.

INFLUENCE OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE QUALITY OF NON-STATIONARY LOAD ON A BEAM

V. Grishakin, Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, KNAHU

Abstract. The approaches to solving the problems of acting on crimped constant cross-section beams identification of pulse loads, which are the constituent elements of the structures used in mechanical engineering are presented and compared. By means of the developed approaches the problems are reduced to a numerical solution of Volterra integral equations systems.

Key words: beam, load, displacement, deformation, identification.

Введение

В связи с неуклонным увеличением сложности производимых металлоконструкций и ростом вычислительных возможностей современной техники проблеме изучения нестационарных колебаний конструкций с распределенными параметрами при воздействии импульсных нагрузок, а также нагрузок, место приложения которых меняется во времени, в теории колебаний деформируемых систем уделяют все большее внимание. В настоящей статье исследовано влияние фактического закрепления балки на качество

идентификации импульсной нагрузки, при использовании различных подходов к решению рассматриваемой обратной задачи.

Анализ публикаций

Краткий литературный обзор работ указанных направлений и описание некоторых задач соответствующих типов приведены в монографии [9]. Также необходимо отметить ряд публикаций [1, 4, 5], в которых освещены различные постановки, методы решения, условия, обеспечивающие единственность, и

другие аспекты исследования обратных задач.

Цель и постановка задачи

Рассматривается балка длиной $2l$ прямоугольного поперечного сечения площадью $F = b \cdot h$, которая связана с декартовой системой координат: ось абсцисс направлена вдоль балки, а ось ординат равноудалена от ее торцов. Исследуется влияние закрепления торцов балки на качество восстановления приложенной к точке $x=0$ нагрузки $P(t)$ по данным измерения нормальных перемещений балки в точке $x=x_0$. Начальные условия считаются однородными (до момента времени $t=0$ балка находится в состоянии покоя).

Метод решения

В рамках гипотез Кирхгофа–Лява уравнение, описывающее поперечные колебания балки, и граничные условия, соответствующие жесткому защемлению ее торцов, имеют вид

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q, \quad (1)$$

$$w|_{x=\pm l} = 0; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=\pm l} = 0, \quad (2)$$

где $w(x, t)$ – нормальные перемещения точек балки; $q = P(t)\delta(x)$ – действующая на балку поперечная нагрузка ($\delta(x)$ – дельта-функция Дирака); ρ – плотность материала; E – модуль упругости при растяжении; $I = bh^3/12$ – момент инерции поперечного сечения балки относительно ее оси.

Для решения задачи (1), (2) применим интегральное преобразование Лапласа по времени. В пространстве изображений, с учетом нулевых начальных условий и симметрии поперечных перемещений относительно начала координат, общее решение (1) представим в виде [3, 10]

$$w^L(x, s) = A_1^L(s)\Phi_1^L(x, s) + A_2^L(s)\Phi_2^L(x, s) + P^L(s)\Phi_3^L(x, s), \quad (3)$$

где индексом L обозначены соответствующие трансформанты; s – параметр преобразования;

$$\Phi_1^L(x, s) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{s} e^{-y_i \sqrt{s}} \cos(y_i \sqrt{s});$$

$$\Phi_2^L(x, s) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{s} e^{-y_i \sqrt{s}} \sin(y_i \sqrt{s});$$

$$y_i(x) = \beta \frac{\sqrt{2}}{2} (l + (-1)^i x); \quad \beta = \sqrt[4]{\gamma \rho F}; \quad \gamma = 1/EI;$$

$$\Phi_3^L(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma}{\beta^4 (s^2 + \mu_k^2)} \cos(\eta_k x);$$

$$\mu_k = \frac{\eta_k^2}{\beta^2}; \quad \eta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}.$$

Входящие в (3) неизвестные функции $A_j^L(s)$ ($j=1, 2$) и $P^L(s)$ определяются из алгебраической системы

$$\begin{aligned} &A_1^L(s)\Phi_1^L(l, s) + A_2^L(s)\Phi_2^L(l, s) + P^L(s)\Phi_3^L(l, s) = 0; \\ &A_1^L(s)[\Phi_4^L(s) + \Phi_5^L(s)] + A_2^L(s)[\Phi_4^L(s) - \Phi_5^L(s)] + P^L(s)\Phi_6^L(s) = 0; \\ &A_1^L(s)\Phi_1^L(x_0, s) + A_2^L(s)\Phi_2^L(x_0, s) + P^L(s)\Phi_3^L(x_0, s) = W^L(s), \end{aligned} \quad (4)$$

которая получается подстановкой (3) в граничные условия (2) и условие $w(x_0, t) = W(t)$ в точке регистрации перемещений ($x = x_0$). В этой системе использованы следующие обозначения:

$$\Phi_4^L(s) = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{s}} e^{-y_i(l)\sqrt{s}} \sin(y_i(l)\sqrt{s});$$

$$\Phi_5^L(s) = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{s}} e^{-y_i(l)\sqrt{s}} \cos(y_i(l)\sqrt{s});$$

$$\Phi_6^L(s) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma \eta_k}{\beta^4 (s^2 + \mu_k^2)} \sin(\eta_k l).$$

При решении системы (4) в явном виде получаемые формулы становятся настолько сложными и громоздкими, что последующий переход в пространство оригиналов связан с принципиальными математическими трудностями. Поэтому производится ее строгая инверсия, в результате чего задача сводится

к решению системы интегральных уравнений Вольterra I рода

$$\int_0^t A_1(\tau)\Phi_1(l, t-\tau)d\tau + \int_0^t A_2(\tau)\Phi_2(l, t-\tau)d\tau + \int_0^t P(\tau)\Phi_3(l, t-\tau)d\tau = 0;$$

$$\int_0^t A_1(\tau)[\Phi_4(t-\tau) + \Phi_5(t-\tau)]d\tau + \int_0^t A_2(\tau)[\Phi_4(t-\tau) - \Phi_5(t-\tau)]d\tau + \quad (5)$$

$$+ \int_0^t P(\tau)\Phi_6(t-\tau)d\tau = 0;$$

$$\int_0^t A_1(\tau)\Phi_1(x_0, t-\tau)d\tau + \int_0^t A_2(\tau)\Phi_2(x_0, t-\tau)d\tau + \int_0^t P(\tau)\Phi_3(x_0, t-\tau)d\tau = W(t),$$

ядра $\Phi_j(x, t)$ ($j = \overline{1, 6}$) которых найдены аналитически с использованием таблиц операционного исчисления [7] и имеют следующий вид:

$$\Phi_1(x, t) = \sum_{i=1}^2 \left[1 - C\left(\frac{\beta_0^2(l + (-1)^i x)^2}{4t}\right) - S\left(\frac{\beta_0^2(l + (-1)^i x)^2}{4t}\right) \right];$$

$$\Phi_2(x, t) = \sum_{i=1}^2 \left[C\left(\frac{\beta_0^2(l + (-1)^i x)^2}{4t}\right) - S\left(\frac{\beta_0^2(l + (-1)^i x)^2}{4t}\right) \right];$$

$$\Phi_4(t) = -\frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin\left(\frac{\beta^2 l^2}{t}\right);$$

$$\Phi_5(t) = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left(1 - \cos\left(\frac{\beta^2 l^2}{t}\right)\right);$$

$$\Phi_3(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma}{l\beta^4 \mu_k} \sin(\mu_k t) \cos(\eta_k x);$$

$$\Phi_6(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma \eta_k}{l\beta^4 \mu_k} \sin(\mu_k t) \sin(\eta_k l),$$

где $C(x)$ и $S(x)$ – интегралы Френеля:

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos \xi}{\sqrt{\xi}} d\xi; \quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin \xi}{\sqrt{\xi}} d\xi.$$

Система интегральных уравнений (5) решалась методом квадратур. Расчеты проводились с привлечением алгоритмов, устойчивых к погрешностям исходных данных [8, 9]. Найденные значения $A_j^L(s)$ ($j = 1, 2$) после инверсии выражения (3) использовались при вычислении поперечных перемещений балки

$$w(x, t) = \int_0^t A_1(\tau)\Phi_1(x, t-\tau)d\tau + \int_0^t A_2(\tau)\Phi_2(x, t-\tau)d\tau + \int_0^t P(\tau)\Phi_3(x, t-\tau)d\tau. \quad (6)$$

В случае шарнирного закрепления задача также может быть сведена к подобной (5) системе интегральных уравнений, которая получается подстановкой решения (3) в трансформированные по Лапласу уравнения (1) и граничные условия $w|_{x=\pm l} = 0$ и $\partial^2 w / \partial x^2|_{x=\pm l} = 0$, соответствующие шарнирному закреплению торцов, и последующим переходом в пространство оригиналов. Второе уравнение упомянутой системы запишется следующим образом:

$$\int_0^t A_1(\tau)\Phi_2(l, t-\tau)d\tau - \int_0^t A_2(\tau)\Phi_1(l, t-\tau)d\tau + \int_0^t P(\tau)\Phi_7(t-\tau)d\tau = 0,$$

где $\Phi_7(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma}{l\beta^2 \eta_k^2} (1 - \cos(\mu_k t)) \cos(\eta_k l)$,

а ее решение сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_0^t P(\tau)\Phi_3(x_0, t-\tau)d\tau = W(t) \quad (7)$$

относительно $P(t)$, функции $A_1(t)$ и $A_2(t)$ при этом тождественно равны нулю.

Альтернативный метод решения задачи (1), (2) может быть развит на подходе, изложенном в работах [6, 11], который заключается во введении дополнительных сосредоточенных нагрузок $P_1(t)$, приложенных в окрестности торцов балки, –

$q = P(t)\delta(x) + P_1(t)\delta((l-\varepsilon)\pm x)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.
Представив решение (1) в виде разложения по собственным формам колебания балки [11], несложно на основании свойства ортогональности тригонометрических функций получить выражение

$$w^L(x, s) = P^L(s)\Phi_3^L(x, s) + M^L(s)\Phi_8^L(x, s), \quad (8)$$

при получении которого выполнен предельный переход $P^L(s)\varepsilon \rightarrow M^L(s)$, а $\Phi_8^L(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\gamma\eta_k}{I\beta^4(s^2 + \mu_k^2)} \sin(\eta_k l) \cos(\eta_k x)$.

Последующий переход в область оригиналов с использованием теоремы о свертке и таблиц [7] не представляет принципиальных затруднений. Таким образом, задача идентификации функции $P(t)$ сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра

$$\begin{aligned} & \int_0^t P(\tau)\Phi_3(x_0, t-\tau)d\tau + \\ & + \int_0^t M(\tau)\Phi_8(x_0, t-\tau)d\tau = W(t); \quad (9) \\ & \int_0^t P(\tau)\Phi_6(t-\tau)d\tau + \int_0^t M(\tau)\Phi_9(t-\tau)d\tau = 0, \end{aligned}$$

второе уравнение которой получено подстановкой оригинала (8) в граничное условие $\partial w/\partial x|_{x=\pm l} = 0$ в случае жесткого защемления торца балки. Ядра системы (9) являются табличными

$$\begin{aligned} \Phi_8(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\gamma\eta_k}{I\beta^4\mu_k} \sin(\eta_k l) \sin(\mu_k t) \cos(\eta_k x), \\ \Phi_9(t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\gamma\eta_k^2}{I\beta^4\mu_k} \sin(\mu_k t) \sin(\eta_k l)^2. \end{aligned}$$

Решение системы (9) осуществляется численно с использованием метода квадратур и регуляризирующего алгоритма Тихонова для обеспечения устойчивого вычислительного процесса и снижения влияния погрешностей в исходных данных. Располагая функциями $P(t)$ и $M(t)$, можно вычислить прогибы балки в результате инверсии (8). Очевидно, что в случае шарнирного закрепления балки, исходя из выражения (8) и условия

$\partial^2 w/\partial x^2|_{x=\pm l} = 0$, следует, что $M(t) = 0$, а относительно нагрузки $P(t)$ получим известное интегральное уравнение (7).

Аналогичный подход может быть реализован в рамках уточненной теории Тимошенко [11], когда уравнения колебания балки описываются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k' GF \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= q; \quad (10) \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k' GF \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) &= m, \end{aligned}$$

которая дополняется граничными условиями

$$w|_{x=\pm l} = 0; \quad \psi|_{x=\pm l} = 0, \quad (11)$$

соответствующими условиям жесткого защемления торцов балки.

В (10) и (11) ψ – угол поворота нормали от изгиба к нейтральной линии балки; m – внешний изгибающий момент; $G = E/2(1+\nu)$ – модуль упругости при сдвиге; ν – коэффициент Пуассона; k' – коэффициент сдвига, зависящий от формы поперечного сечения (для прямоугольной формы $k' \approx 6/5$). Остальные величины описаны ранее.

Традиционным подходом к решению задачи (10), (11) является разложение функций w и ψ по формам свободных колебаний балки

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cos(\eta_k x); \\ \psi(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \sin(\eta_k x), \end{aligned} \quad (12)$$

записанных с учетом симметрии нагружения и граничных условий. Здесь $w_k(t)$ и $\psi_k(t)$ – неизвестные коэффициенты.

Поскольку представления (10) не позволяют обеспечить выполнение второго условия (11), то на торцах балки прикладываются подлежащие определению изгибающие моменты $M_1(t)$ и $M_2(t)$ (в силу симметрии деформаций $M_1(t) = -M_2(t) = M(t)$). В ре-

зультате функция $m(x, t)$, входящая в правую часть первого уравнения системы (10), запишется следующим образом – $m(x, t) = M_1(t)\delta(l-x) - M_2(t)\delta(l+x)$. Выражение для поперечной нагрузки q остается без изменений: $q(x, t) = P(t)\delta(x)$.

В результате подстановки (12) в (11) и интегрального преобразования Лапласа по временной переменной получим систему алгебраических уравнений относительно ψ_k^L и w_k^L :

$$\begin{aligned} (s^2 + a_1^2 \eta_k^2) w_k^L + a_1^2 \eta_k \psi_k^L &= \frac{1}{\rho Fl} P^L; \\ a_2^2 \eta_k w_k^L + (s^2 + a_2^2 + a_3^2 \eta_k) \psi_k^L &= \\ &= \frac{1}{\rho Il} 2M^L \sin(\eta_k l), \end{aligned} \quad (13)$$

где $a_1 = \sqrt{k'G/\rho}$; $a_2 = a_1 \sqrt{F/I}$; $a_3 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в балке.

Ее решение не представляет принципиальных затруднений

$$\begin{aligned} w_k^L(s) &= a_5 \frac{s^2 + a_2^2 + a_3^2 \eta_k^2}{\Delta_k(s)} P^L(s) - \\ &- 2a_6 a_1^2 \frac{\eta_k}{\Delta_k(s)} \sin(\eta_k l) M^L(s); \\ \psi_k^L(s) &= -a_5 a_2^2 \frac{\eta_k}{\Delta_k(s)} P^L(s) + \\ &+ 2a_6 \frac{s^2 + a_1^2 \eta_k^2}{\Delta_k(s)} \sin(\eta_k l) M^L(s), \end{aligned}$$

где $\Delta_k(s) = s^4 + ((a_1^2 + a_3^2)\eta_k + a_2^2)s^2 + a_1^2 a_3^2 \eta_k^4$; $a_5 = 1/\rho Fl$; $a_6 = 1/\rho Il$. Последующий переход в пространство оригиналов с использованием справочных данных [7] и выражений (12) приводит к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \int_0^t P(\tau) \Phi_{10}(x, t - \tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t M(\tau) \Phi_{11}(x, t - \tau) d\tau; \\ \psi(x, t) &= \int_0^t P(\tau) \Phi_{12}(x, t - \tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t M(\tau) \Phi_{13}(x, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \Phi_{10}(x, t) &= a_5 \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\eta_k x) \sum_{i=1}^2 \Omega_{i,k}(t) (a_2^2 + a_3^2 \eta_k^2 - \omega_{i,k}^2); \\ \Omega_{i,k}(t) &= (-1)^i \sin \omega_{i,k} t / \omega_{i,k} D_k; \\ \Phi_{11}(x, t) &= -2a_6 a_1^2 \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \sin(\eta_k l) \cos(\eta_k x) \sum_{i=1}^2 \Omega_{i,k}(t); \\ \Phi_{12}(x, t) &= -a_5 a_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \sin(\eta_k x) \sum_{i=1}^2 \Omega_{i,k}(t); \\ \Phi_{13}(x, t) &= 2a_6 \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\eta_k l) \sin(\eta_k x) \sum_{i=1}^2 \Omega_{i,k}(t) (a_1^2 \eta_k^2 - \omega_{i,k}^2); \\ \omega_{i,k} &= \sqrt{[(a_1^2 + a_3^2)\eta_k + a_2^2 - (-1)^i D_k] / 2}; \\ D_k &= \sqrt{[(a_1^2 + a_3^2)\eta_k + a_2^2]^2 - 4a_1^2 a_3^2 \eta_k^4}. \end{aligned}$$

Таким образом, задача идентификации действующей на балку нагрузки с жестко заземленными торцами сводится к системе из двух интегральных уравнений Вольтерра относительно функций F и M , которая формируется подстановкой выражений (14) во второе условие (11), обеспечивающее приближенное удовлетворение равенства $\psi(\pm l, t) = 0$, и соотношение $w(x_0, t) = W(t)$. Процедура решения полученной системы аналогична описанной ранее.

Очевидно, что в случае шарнирного опирания торцов, моделируемое условиями $w|_{x=\pm l} = 0$ и $\partial \psi / \partial x|_{x=\pm l} = 0$, $M \equiv 0$, что существенно упрощает решение задачи идентификации, которая сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра $\int_0^t P(\tau) \Phi_{10}(x_0, t - \tau) d\tau = W(t)$, записанного в соответствии с равенством $w(x_0, t) = W(t)$.

Численные результаты

Конкретные расчеты проводились для балки со следующими геометрическими параметрами и физическими характеристиками материала: $2l = 0,47$ м; $b = 0,06$ м; $h = 0,02$ м; $\rho = 7890$ кг/м³; $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$. Параметр регуляризации, необходимый для реализации используемого при численном решении интегральных уравнений Вольтерра регуляризирующего алгоритма Тихонова,

принимался на основании принципа невязки [8, 9]. Идентификация действующей на балку нагрузки $P(t)$ осуществлялась по значениям прогибов балки $W(t)$ в равноудаленной от торцов балки точке ($x_0 = 0$). При этом функция $W(t)$ определялась методом конечно-элементного моделирования переходных процессов в балке, обусловленных приложением импульсной нагрузки $\bar{P}(t) = P_0 \sin(\pi t/t_{im})H(t_{im} - t)$, где $H(t)$ – единичная функция Хевисайда; $P_0 = 1,875$ кН, $t_{im} = 207,5$ мкс. На результат моделирования были наложены случайные числа с нулевым математическим ожиданием и амплитудой в 5% от максимального значения $W(t)$ на исследуемом временном интервале ($t \in [0; 3t_0]$; $3t_0 = 14,7325$ мс) для имитации ошибок измерения, передачи и обработки данных. Шаг по времени при решении расчетной системы дифференциальных уравнений принят равным $t_{im}/6$.

Результаты решения задачи идентификации $P(t)$ изображены на рис. 1–3. При этом обозначенные цифрами 1, 2 и 3 кривые вычислены на основании систем интегральных уравнений (5), (9) и (13), соответственно, к которым изложенными в настоящей работе подходами может быть сведена рассматриваемая задача.

Рис. 1 получен для случая, когда при конечно-элементном моделировании, проводимом с целью формирования исходных данных, узлы модели с координатами $x = \pm l$ принимались неподвижными вдоль оси ординат и объединялись по степени свободы продольных перемещений. График нормального перемещения срединной точки балки для такого варианта закрепления торцов изображен на рис. 4 кривой 1.

На рис. 2 изображены восстановленные как функции времени внешние нагрузки, когда при КЭ-моделировании деформаций балки ее торцы жестко соединялись с массивным упругим телом, изготовленным из того же, что и сама балка, материала. Сформированные методом конечных элементов значения функции $W(t)$ изображены в виде кривой 2 на рис. 4.

Подобные результаты идентификации (рис. 3) получены и для случая, когда при КЭ-моделировании считалось, что каждый край балки зажат двумя парами упругих тел, взаимодействующих с балкой через цилиндрические поверхности (т.е. при КЭ решалась контактная задача). При этом продольная координата внутренних опор принималась равной $x = \pm l$, а внешних – $x = \pm(l + h)$.

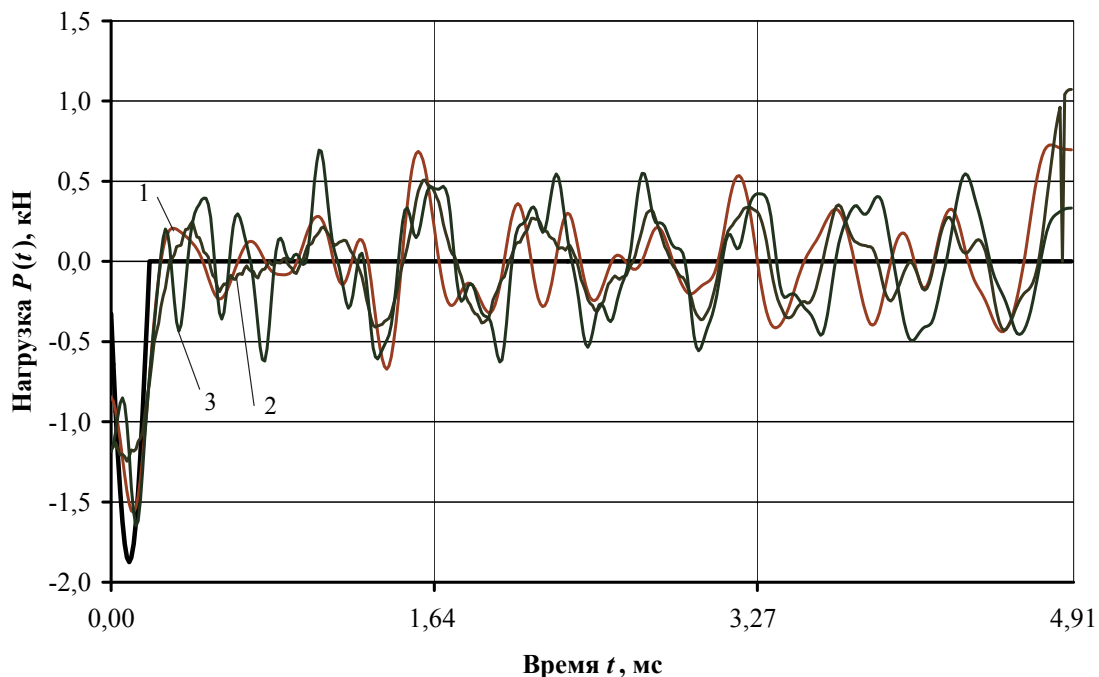


Рис. 1. Результат идентификации при первом варианте фиксации краев

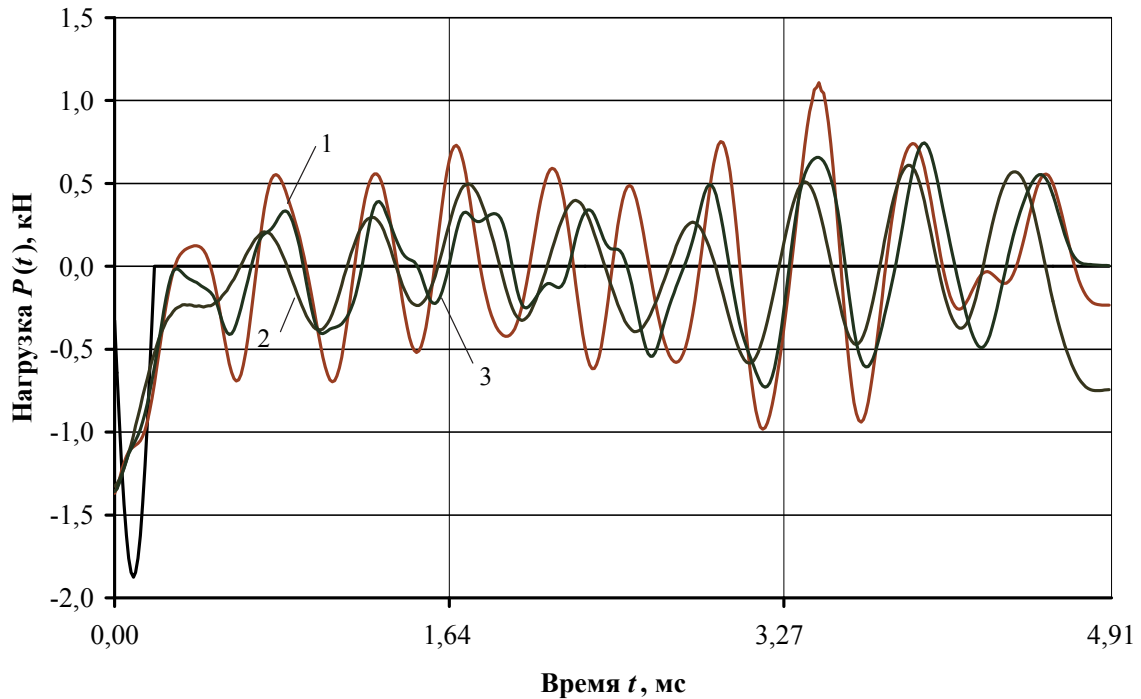


Рис. 2. Результат идентификации при втором варианте фиксации краев

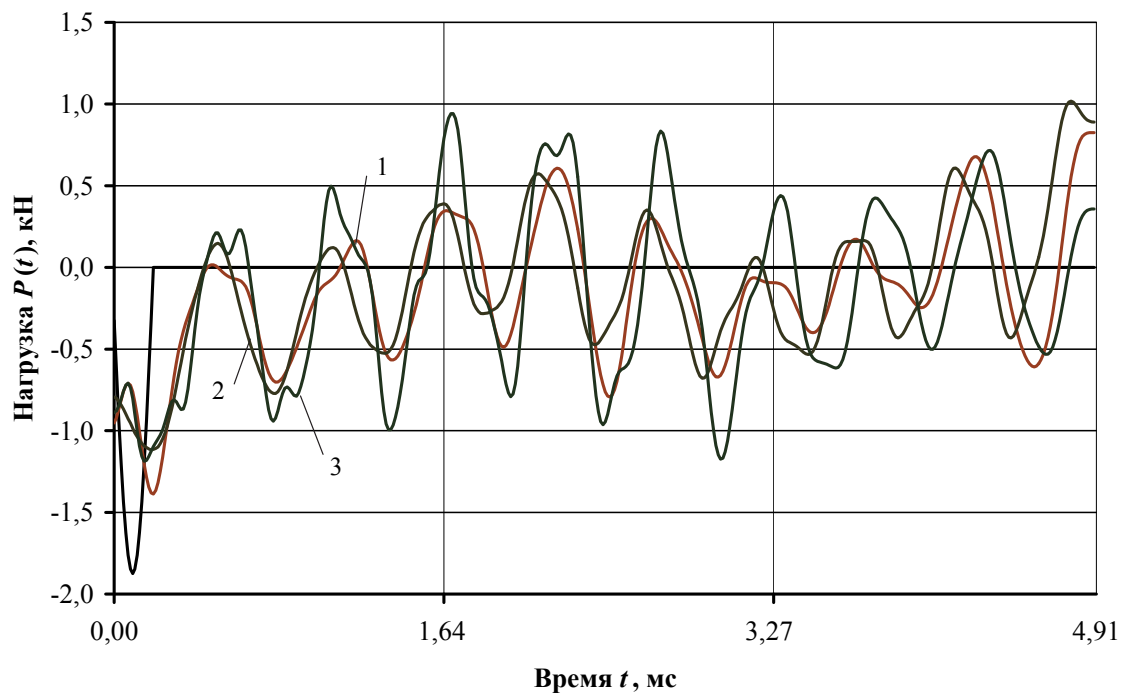


Рис. 3. Результат идентификации при третьем варианте фиксации краев

Предполагалось, что материал опор идентичен материалу балки, нижние опорные элементы неподвижны, а к верхним приложено давление 40 МПа для фиксации краев балки. Значение в 40 МПа выбиралось по критерию наилучшего соответствия восстановленной нагрузки с эталонной, а проведенные численные эксперименты свидетельствуют о чувствительности результата идентификации

как к прижимающему давлению, так и к коэффициенту трения в контактных парах (приведенные на рисунке кривые соответствуют значению коэффициента 0,1).

Вычисленные методом конечных элементов перемещения $W(t)$ показаны на рис. 4 кривой 3.

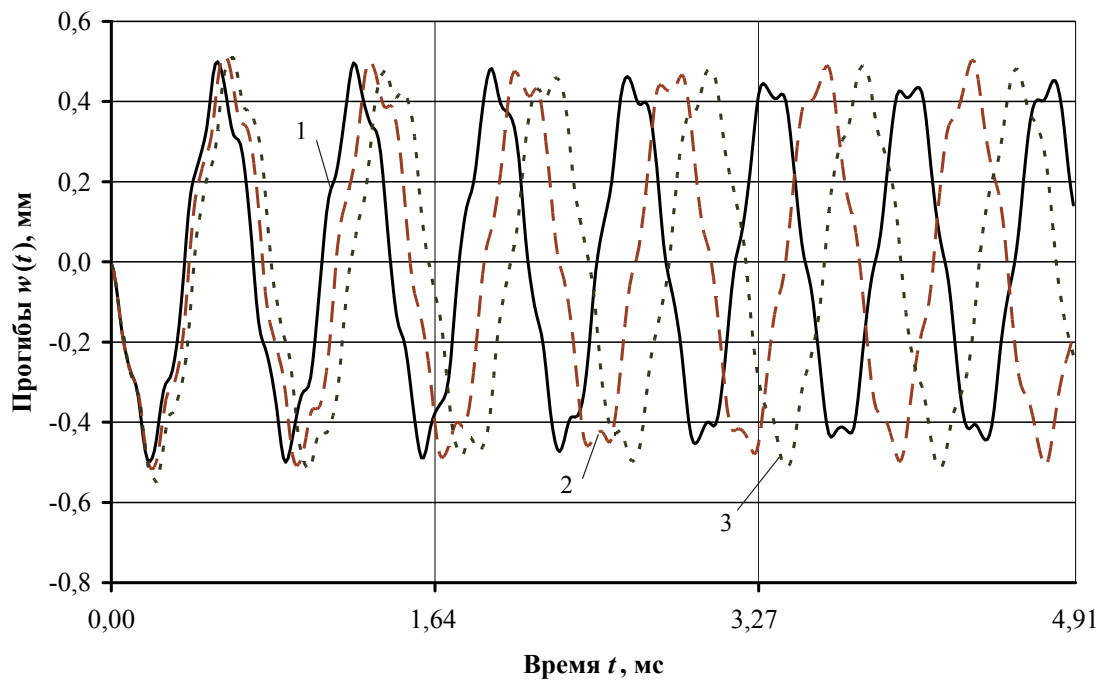


Рис. 4. Прогибы центров балок

Из анализа приведенных на рис. 1–3 графиков следует, что для исследуемой балки приемлемая для инженерной практики точность восстановления может быть получена на основании уравнений, записанных в рамках классических гипотез Кирхгофа–Лява (кривые 1 и 2). При этом более близкие к эталонному решению \bar{P} (кривая 0 на рис. 1) результаты получаются при использовании первого изложенного в настоящей работе подхода – расхождение по максимальному значению в пределах 20%. Качество идентификации при реализации второго подхода (при введении дополнительного изгибающего момента для приближенного удовлетворения граничных условий) несколько хуже по сравнению с первым. Привлечение уточненной модели (третий подход) не дает ожидаемого улучшения качества восстановления.

Очевидно, что более качественное восстановление закона изменения во времени действующей на балку нагрузки может быть получено за счет использования априорной информации о продолжительности ее действия t_{im} . Располагая данной информацией, можно существенно уменьшить «степень некорректности» [2] исследуемой обратной задачи через уменьшение размерности расчетной системы линейных алгебраических уравнений и сведение ее к переопределенной. Особенно это актуально для нагрузки импульсного типа (с малым по сравнению с

t_0 значением t_{im}), которая и была рассмотрена в настоящей работе. Следует отметить, что изложенные в работе подходы без каких-либо модификаций позволяют дать ориентировочное значение t_{im} на первом этапе решения, а следовательно, исключить ошибки восстановления нагрузки при $t > t_{im}$ (рис. 1–3) на втором. Реализация данной процедуры позволила существенно улучшить качество идентификации (расхождение по максимальному значению не более 15%).

В целом изложенные в настоящей работе подходы к идентификации действующей на балку нагрузки ориентированы, в первую очередь, на балки с жесткой фиксацией торцов, а идентифицированные на их основании значения нагрузки весьма близки к точным. В то же время использование данных подходов при альтернативных вариантах заземления краев балки (в частности, через соединение с упругим массивным телом или посредством зажатия цилиндрическими телами) приводит к низкому качеству восстановления. Следовательно, изложенные подходы требуют уточнения математической формулировки граничных условий, приводящих к более точному описанию взаимодействия балки с ее опорными элементами. Например, вводимый во втором подходе изгибающий момент M может быть согласован с деформациями $\partial w / \partial x$ на торце балки

посредством соотношения $M = \pm C \partial w / \partial x|_{x=\pm l}$, где C – коэффициент изгибной жесткости заделки, устанавливаемый опытным путем. Подобным образом может быть изменена формулировка граничных условий в третьем подходе.

Выводы

В настоящей работе изложены три подхода к идентификации как функции времени действующей на балку с жестко защемленными краями импульсной нагрузки. Для моделирования колебаний балки используются уравнения, записанные как на гипотезах Кирхгофа–Лява, так и на гипотезах Тимошенко. Изложенными подходами задача идентификации сведена к системам интегральных уравнений Вольтерра I рода, решение которых осуществляется численно с привлечением специальных регуляризирующих алгоритмов. Исходные данные принимались по результатам конечно-элементного моделирования колебаний балки при известном внешнем нагружении, которое и используется для оценки качества идентификации. Показано, что классическая модель балки позволяет получать результаты с приемлемой для инженерной практики точностью. При ином, чем жесткая фиксация торцов балки, варианте защемления краев изложенные подходы позволяют лишь дать приближенную конфигурацию во времени искомой нагрузки. Для получения точных значений необходима корректировка математической формулировки граничных условий, приводящая к более точному описанию взаимодействия балки с ее опорными элементами. Улучшение качества восстановления может быть также достигнуто за счет использования априорной информации о продолжительности действия нагрузки, что особенно актуально для нагрузок импульсного типа.

Литература

1. Аникина Т.А. Идентификация неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при изгибных колебаниях / Аникина Т.А., Богачев И.В., Ватульян А.О. // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – №1. – С. 107–115.

2. Апарцин А.С. Неклассические интегральные уравнения Вольтерра первого рода / А.С. Апарцин. – Новосибирск: Наука, 1999. – 193 с.
3. Бабаев А.Э. Нестационарные колебания биморфной балки в режимах прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта / А.Э. Бабаев, А.А. Бабаев, И.В. Янчевский // Актуальные проблемы физико-механических исследований. Акустика и волны. – 2007. – № 3. – С. 16–27.
4. Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач / А.Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1988. – 181 с.
5. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
6. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем // Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 339 с.
7. Диткин В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
8. Тихонов А.Н. Численные методы решения некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 230 с.
9. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций: монография / Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воропай, А.С. Шарапата. – Х.: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
10. Янютин Е.Г. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел: в 2 частях // Е.Г. Янютин, А.В. Воропай, С.И. Поваляев, И.В. Янчевский. – Х.: ХНАДУ. – Часть 2. – 2010. – 212 с.
11. Янютин Е.Г. Импульсное деформирование упругих элементов конструкций / Е.Г. Янютин. – К.: Наукова думка, 1993. – 146 с.

Рецензент: В.П. Кожушко, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 04 ноября 2014 г.